# DÉSORDRE ET COHÉRENCE DANS LES STRUCTURES DU MILIEU INTERSTELLAIRE : ANALYSE STATISTIQUE, FILTRAGE INTERFÉROMÉTRIQUE ET TRANSFERT RADIATIF

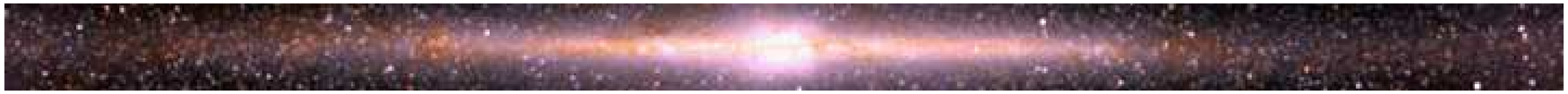
**François Levrier**

**Soutenance de thèse**
**10 décembre 2004**

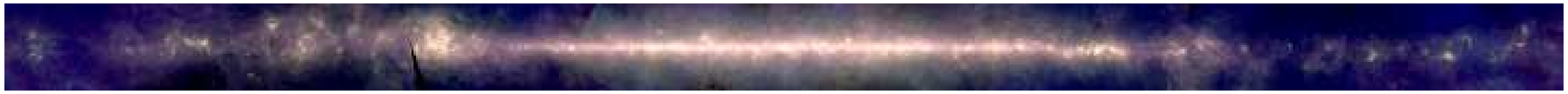
# Le milieu interstellaire

## Les composantes du disque Galactique

**Étoiles (Composite 1.25 $\mu$m, 2.2 $\mu$m et 3.5 $\mu$m)** *(Hauser et al., 1995)*

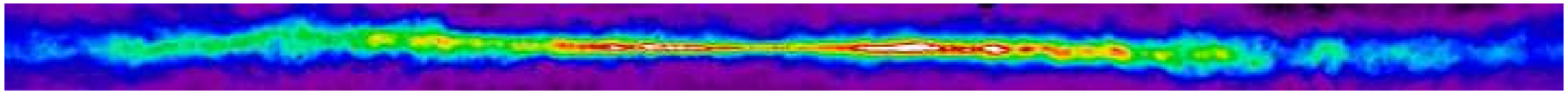


**Poussières (Composite 12 $\mu$m, 60 $\mu$m et 100 $\mu$m)** *(Wheelock et al., 1994)*



**Milieu moléculaire (CO : 2.6 mm)** *(Dame et al., 1987)*

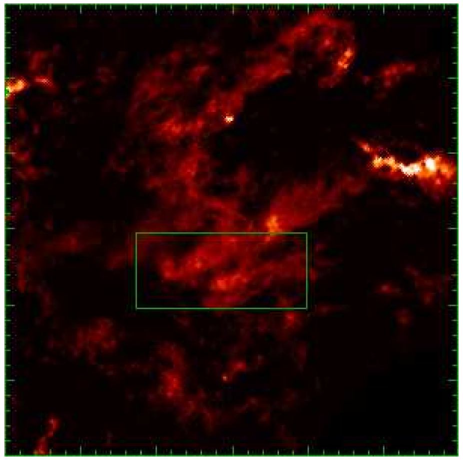
**Milieu atomique (HI : 21 cm)** *(Burton, 1985; Kerr et al., 1986)*

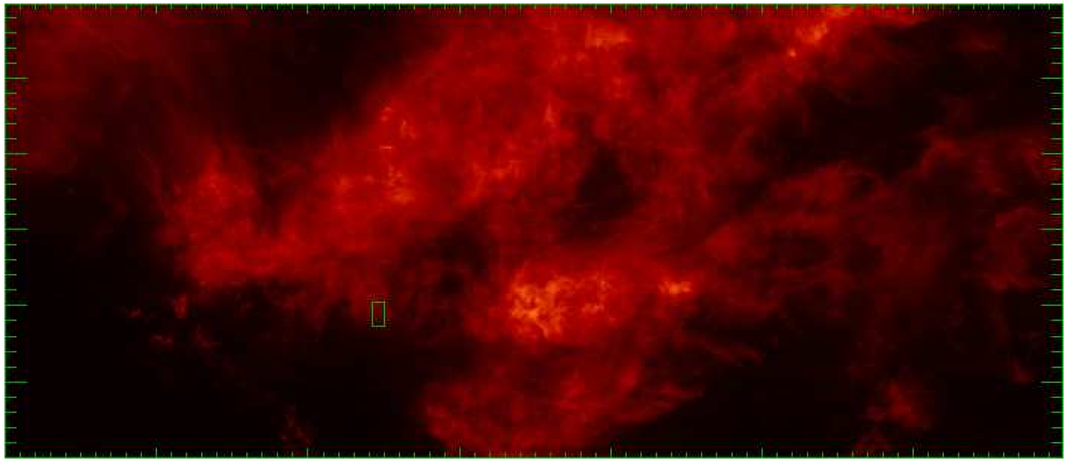


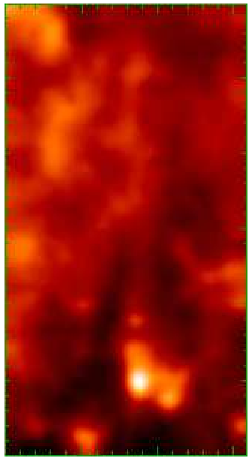
**Un milieu multiphasique**

# Des structures complexes et autosimilaires

- En brillance, spatialement...



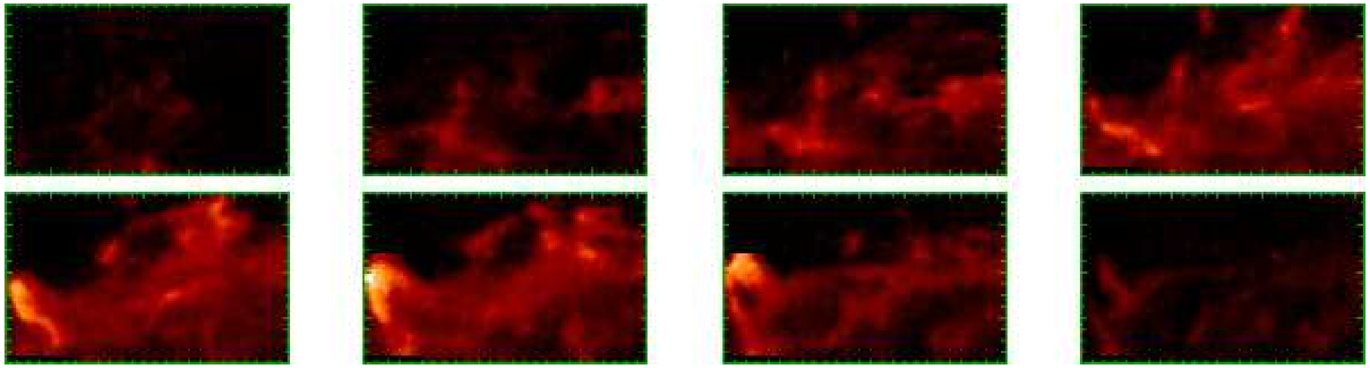




*(Dame et al., 1987)* *(Goldsmith et al., in prep.)* *(Hily-Blant et al., in prep.)*

- ... et en vitesse

-2,87 km/s -3,17 km/s -3,47 km/s -3,77 km/s



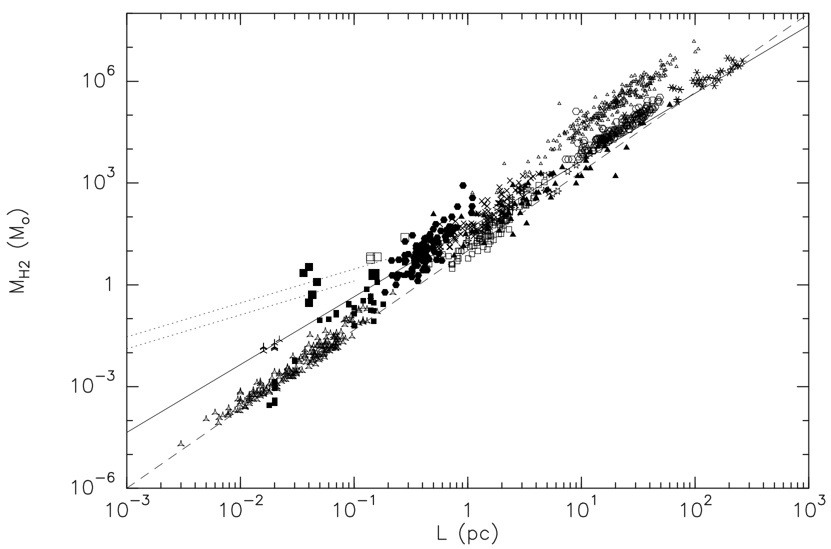
-4,07 km/s -4,37 km/s -4,67 km/s -4,97 km/s *(Hily-Blant et al., in prep.)*

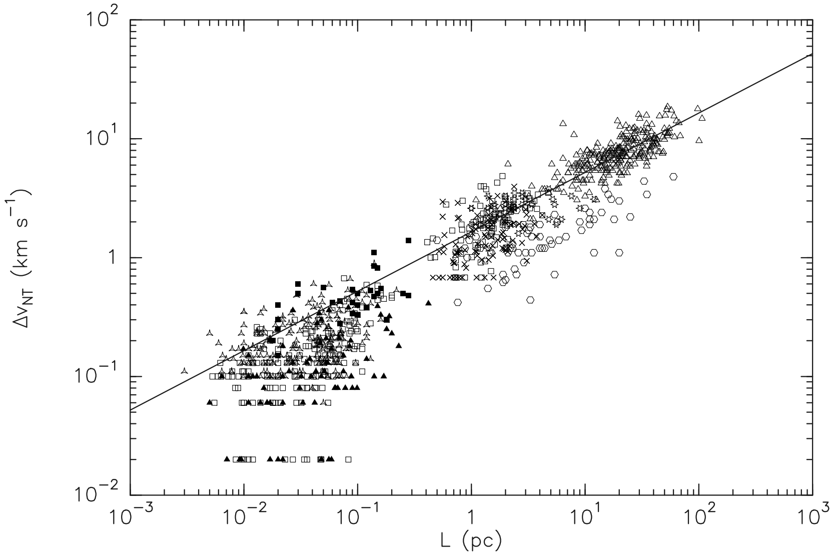
$L \sim 1$ pc

$c_s \sim 0{,}1$ km/s

# Observation de lois de puissance

*(Falgarone, 1998)*




**QUELLES LOIS DE PUISSANCE?**

**Compréhension de l'origine physique de la structuration**

**(gravité, turbulence, champ magnétique...)**

**Problème de détermination observationnelle**

# Un problème inverse: deux difficultés

## La projection

Profondeur inaccessible → 2 dimensions d'espace

Effet Doppler → 1 dimension de vitesse

Conclusion: projection (PPP,VVV) sur (PPV)

▼

**Comment comprendre les lois de puissance en projection ?**

## La dynamique d'échelles

Détermination des lois nécessite une bonne dynamique en échelles

Cartographie des structures en interférométrie

▼

**Comment remonter aux lois des champs projetés ?**

**On va traiter le problème dans le sens direct**

# Modélisation du milieu diffus

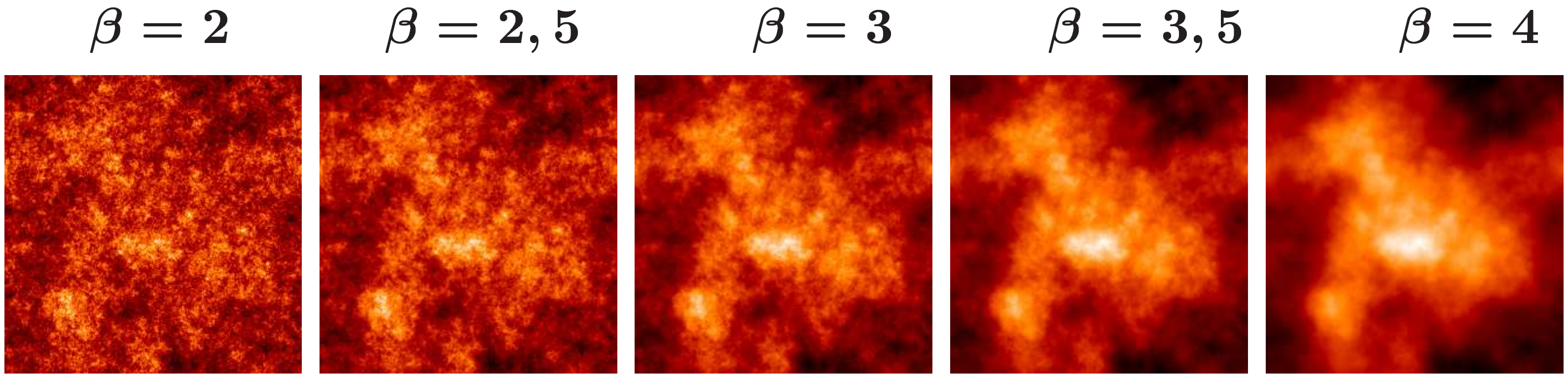
## Mouvements browniens fractionnaires

$$S_F^{(2)}(\vec{r}) = \left\langle [F(\vec{x}+\vec{r}) - F(\vec{x})]^2 \right\rangle_{\vec{x}} \propto r^{2H}$$

**Exposant de Hurst $H$ compris entre 0 et 1**

## Simulations

- **Amplitude en loi de puissance $A(\vec{k}) \propto k^{-\beta/2}$**
- **Phase aléatoire $\Phi(\vec{k})$**




*(Stutzki et al., 1998 ; Bensch et al., 2001; Brunt & Heyer, 2002; Miville-Deschênes et al., 2003)*

# Caractérisation des structures

## Outils statistiques sur un champ $F$ en dimension $n$

**Fonction de structure d'ordre deux** $S_F^{(2)}(\vec{r}) = \left\langle [F(\vec{x}+\vec{r}) - F(\vec{x})]^2 \right\rangle_{\vec{x}} \propto r^{2H}$

*Relation linéaire* ▼

**Fonction d'autocorrélation** $A_F(\vec{r}) = \langle F(\vec{x})F(\vec{x}+\vec{r})\rangle_{\vec{x}} = \sigma_F^2 - \Lambda r^{2H}$

*Transformée de Fourier* ▼

**Spectre de puissance** $P_F(\vec{k}) = |\widehat{F}(\vec{k})|^2 \propto k^{-\beta}$

*Moyenne pondérée* ▼

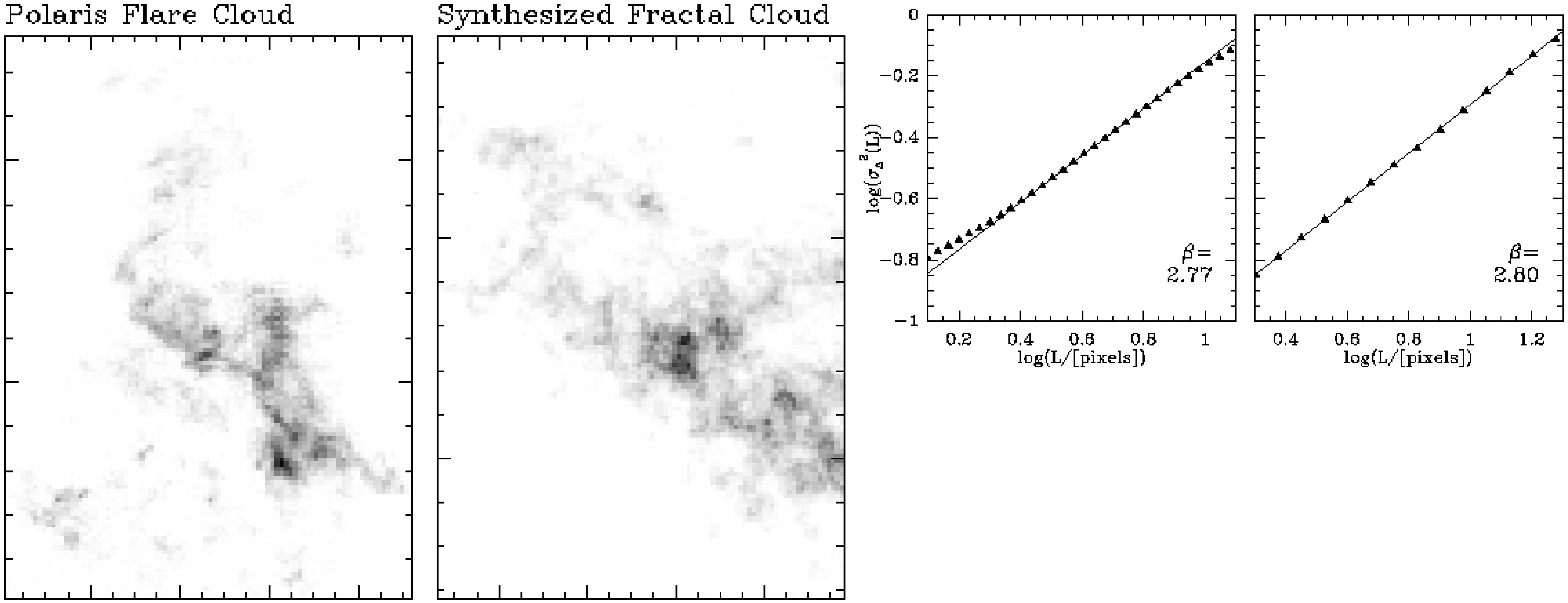
**$\Delta$-variance** $\sigma_\Delta^2(L) = \left\langle (F * K_L)^2 \right\rangle_{\vec{x}} \propto L^\gamma$

$$\beta = 2H + n \qquad \gamma = \beta - n = 2H$$

**Relations non valides sur les estimateurs**

# Justification de la modélisation

## Comparaison entre un champ réel et un champ synthétique




*(Stutzki et al., 1998)*

✔ **Apparence visuelle semblable**

✔ **Propriété statistique compatible**

# Le problème de la projection

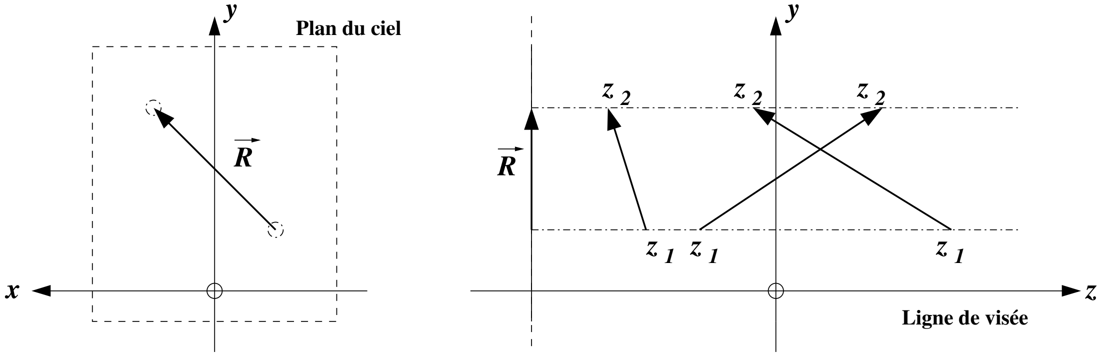
## Les observables

**Température de brillance $T_b(\vec{X}, u)$**

**Intensité intégrée $I = \int T_b du$** **Centroïde $C = \int u T_b du$**

## Propriétés statistiques de $I$, $C$ et $C_0 = C/I$

**Comment dépendent-elles des corrélations 3D des champs $\rho$ et $\vec{v}$ ?**



# État des lieux

## Résultat connu pour la densité

*(Stutzki et al.,1998 ; Goldman, 2000)*

- **Nuage homogène et isotrope; Transition optiquement mince**
- **Échelles transverses $R$ / Profondeur $D$ du nuage**

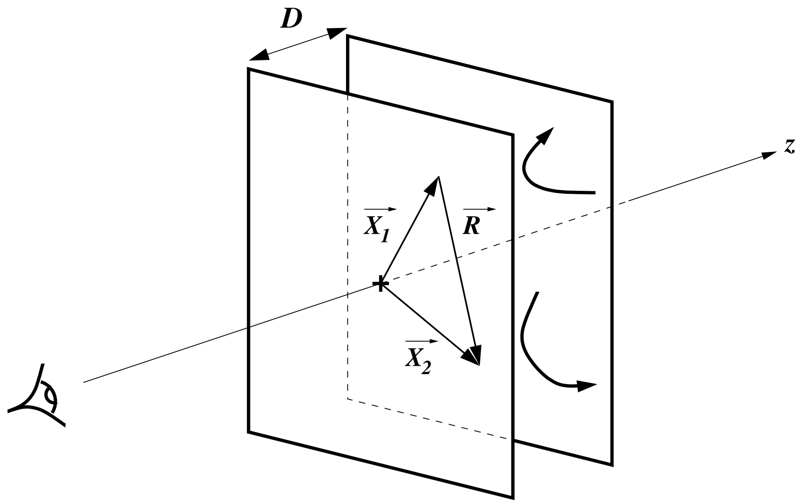
$$\beta_I = \beta_\rho \quad \textbf{pour} \quad R \ll D$$
$$\beta_I = \beta_\rho - 1 \quad \textbf{pour} \quad R \gg D$$

## Problème posé

**Existe-t-il un résultat semblable pour la vitesse?**

**Approche analytique** | **Approche numérique**

## Couche turbulente d'épaisseur finie




**Densité moyenne $\rho_0$**

**Vitesse longitudinale moyenne $v_0$**

**Fluctuations $\delta\rho$ et $\delta v$**

- **Turbulence homogène et isotrope**
- **Transition optiquement mince + Température d'excitation uniforme**
- **Fluctuations de densité faibles**

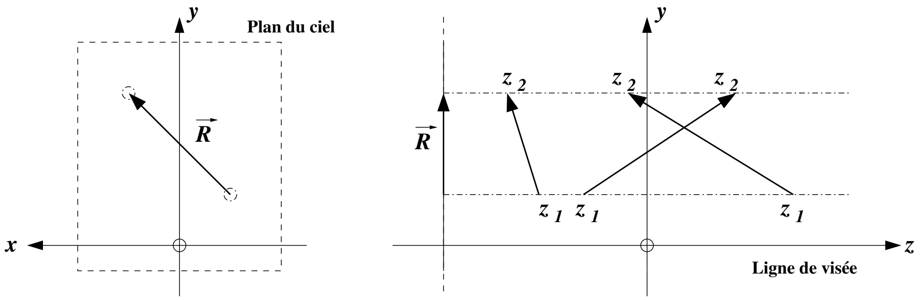
$$I = \alpha \int \rho dz \qquad C = \alpha \int \rho v_z dz$$

→ **Développement en puissances des fluctuations de densité $\sigma_\rho / \rho_0$**

# Résultats analytiques

**Intensité intégrée**

$$A_I(\vec{R}) = (\alpha D)^2[\rho_0^2 + M_{\rho,\rho}(\vec{R})]$$




**Centroïde non normalisé**

$$A_C(\vec{R}) = (\alpha D)^2[\rho_0^2 v_0^2 + \rho_0^2 M_{v,v}(\vec{R}) + 2\rho_0 M_{\rho v,v}(\vec{R}) + v_0^2 M_{\rho,\rho}(\vec{R}) + M_{\rho v,\rho v}(\vec{R})]$$

**Centroïde normalisé**

$$A_{C_0}(\vec{R}) = v_0^2 + M_{v,v}(\vec{R}) + \frac{2}{\rho_0} M_{\rho v,v}(\vec{R}) - \frac{2}{\rho_0} M^{(s)}_{v,v,\rho}(\vec{R},\vec{R}) + \dots$$

**Ordre 0** **Ordre 1** **Ordre 2 et plus**

$$M_{\rho,\rho}(\vec{R}) = \frac{1}{D^2} \iint \left\langle \delta\rho(\vec{X}, z_1)\,\delta\rho(\vec{X}+\vec{R}, z_2) \right\rangle_{\vec{X}} dz_1 dz_2$$

*(Levrier, 2004)*

# Résultats à l'ordre le plus bas

## Expressions similaires pour $A_I$, $A_C$ et $A_{C_0}$

$$\beta_C = \beta_{C_0} = \beta_v \quad \text{aux échelles transverses } R \ll D$$

## Approche dans l'espace direct

- Champs $\delta\rho$ et $\delta v$ modélisés par des browniens fractionnaires: $H_\rho$ et $H_v$
- Calcul analytique de $M_{\rho,\rho}$ et $M_{v,v}$ pour $R \ll D$

$$H_I = H_\rho + \frac{1}{2} \;\text{ pour }\; H_\rho < \frac{1}{2} \;\text{ et }\; H_I = 1 \;\text{ pour }\; H_\rho > \frac{1}{2}$$

$$H_C = H_{C_0} = H_v + \frac{1}{2} \;\text{ pour }\; H_v < \frac{1}{2} \;\text{ et }\; H_C = H_{C_0} = 1 \;\text{ pour }\; H_v > \frac{1}{2}$$

*(Stutzki et al., 1998 ; Levrier, 2004)*

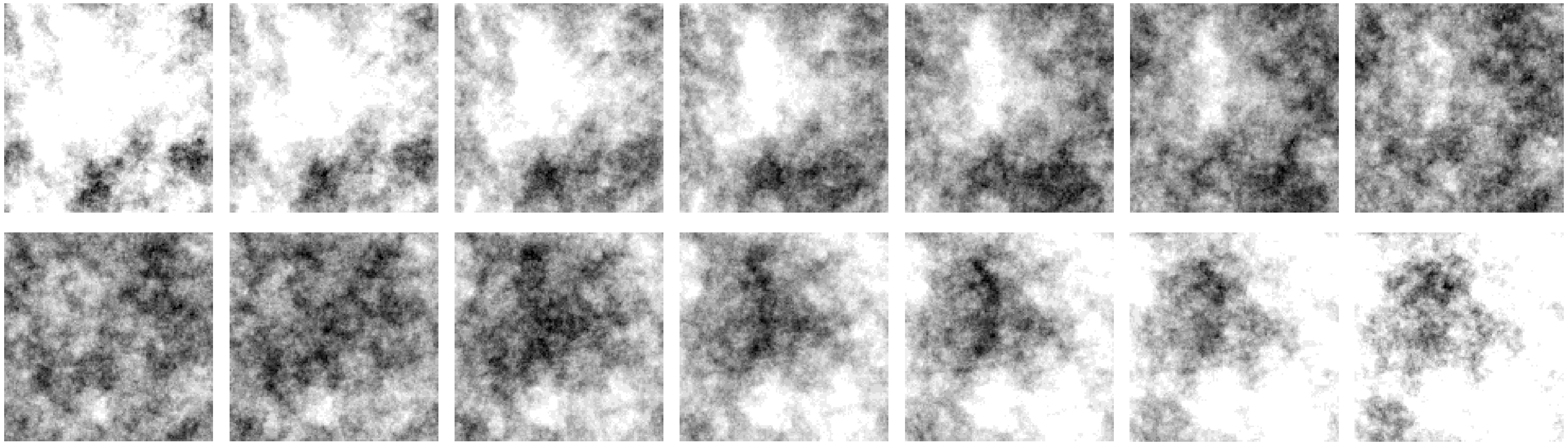
# Approche numérique

## Construction de cubes de données *(Miville-Deschênes et al., 2003)*

- **Champs $\rho$ et $v_z$ browniens fractionnaires 3D avec $3 \leq \beta_\rho, \beta_v \leq 5$**
- **Émission gaussienne de chaque cellule**

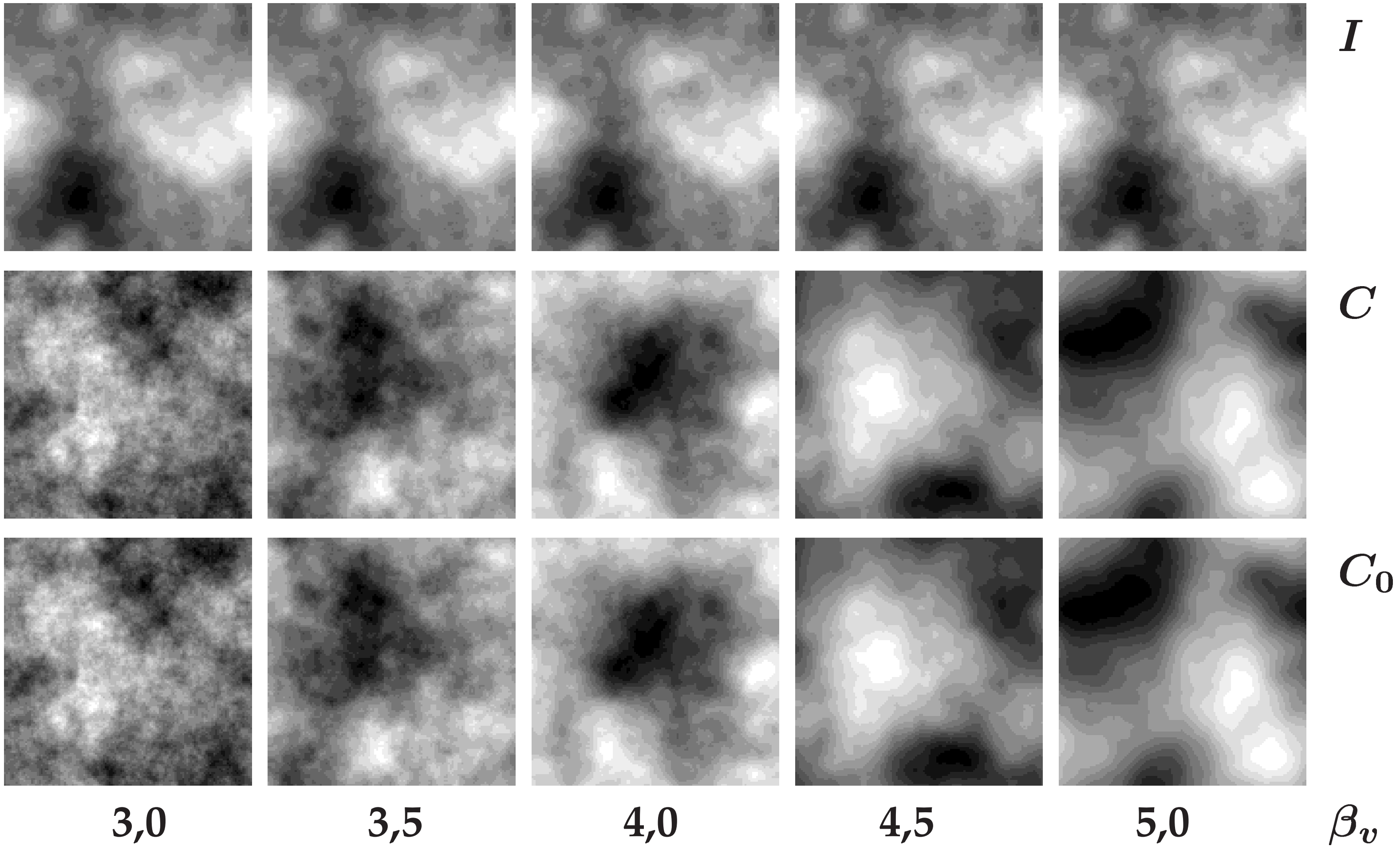
$$T_b(\vec{X}, u_k) \propto \sum_z \frac{\rho(\vec{x})\delta z}{\sqrt{2\pi}\sigma_{th}} exp \left\{ -\frac{[v_z(\vec{x}) - u_k]^2}{2\sigma_{th}^2} \right\}$$

## Cartes par canaux $\beta_\rho = 3,5 \quad \beta_v = 4,5 \quad T = 100\ K$ (milieu diffus)



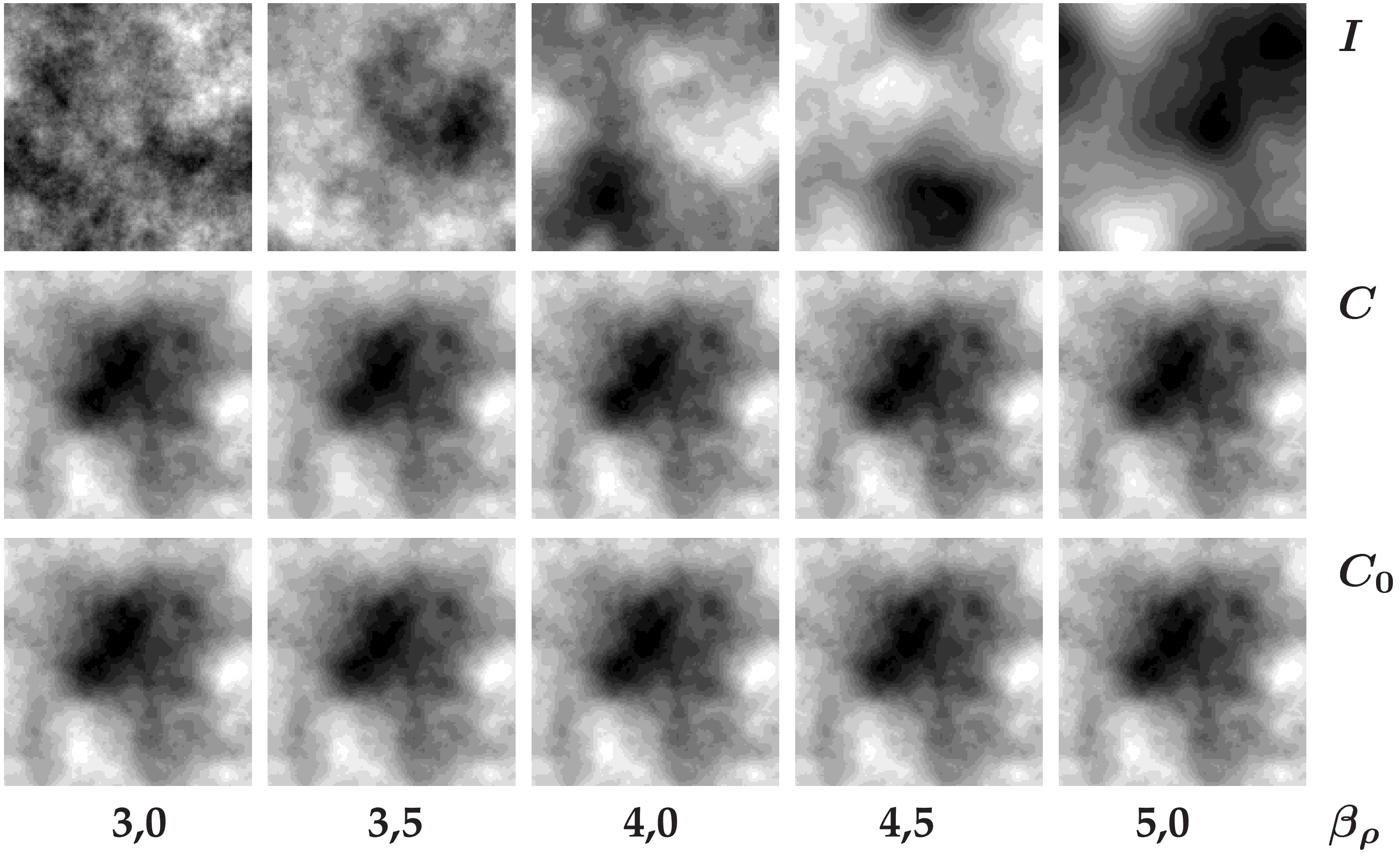
# Cartes d'observables

$\beta_\rho = 4$ et $T = 100\ K$



# Cartes d'observables

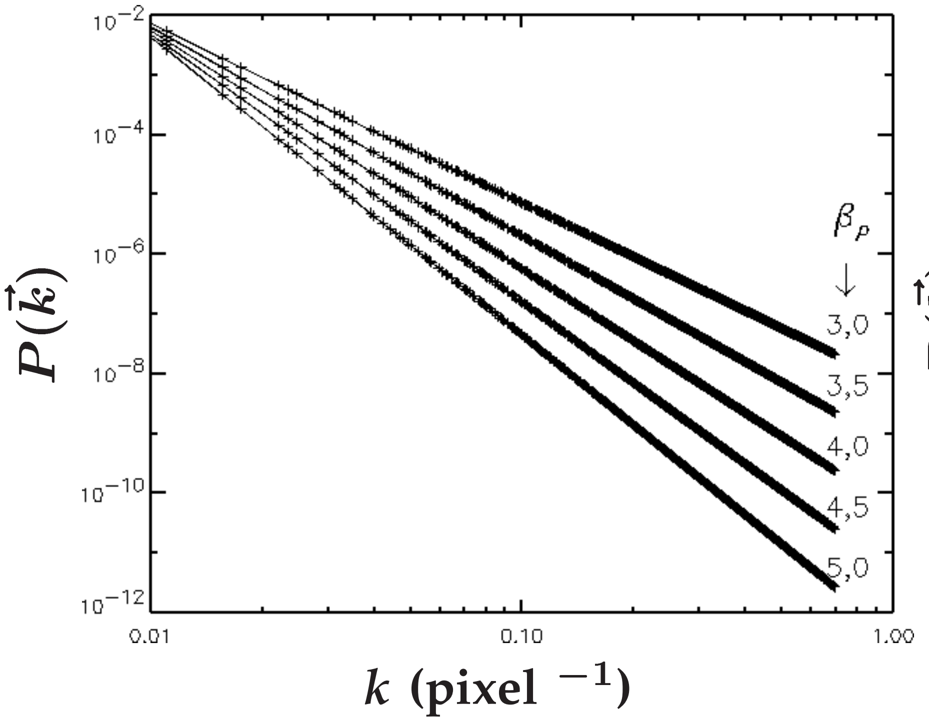
$\beta_v = 4$ et $T = 100\ K$



# Spectre de puissance des cartes d'intensité

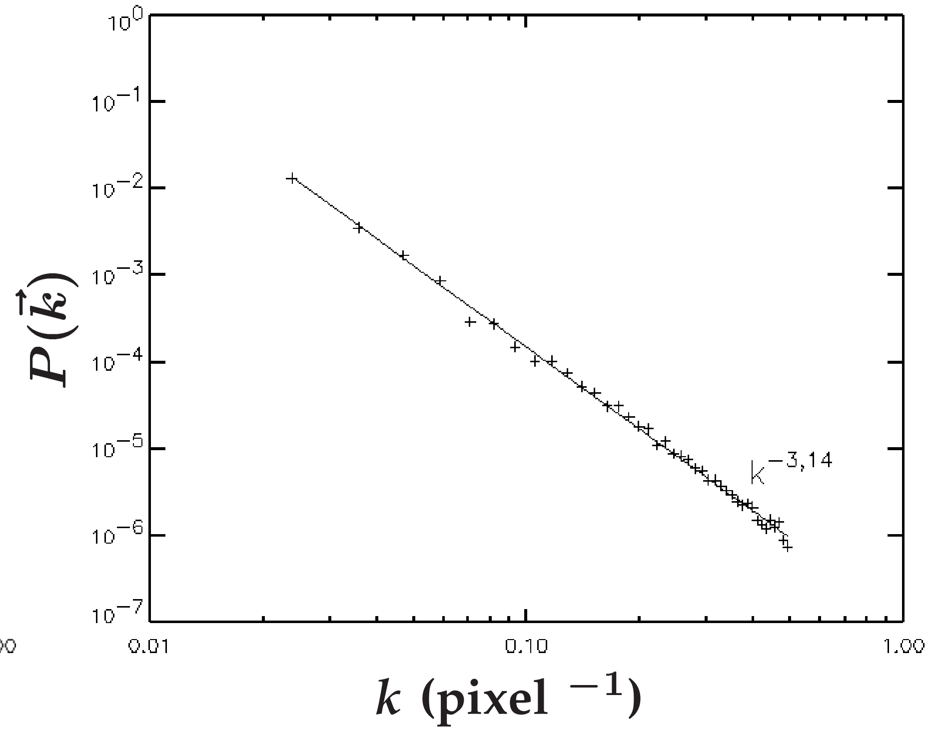
**Limite $R \ll D$**

**Intensité intégrée de 5 cubes PPV $(\beta_v = 4)$**



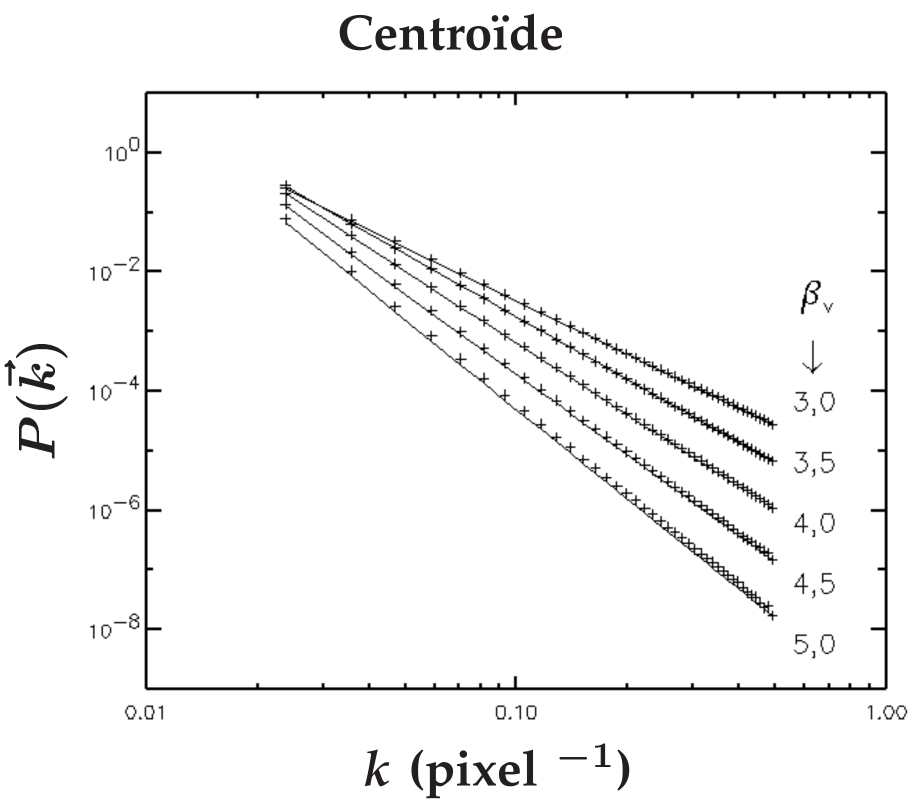

**Limite $R \gg D$**

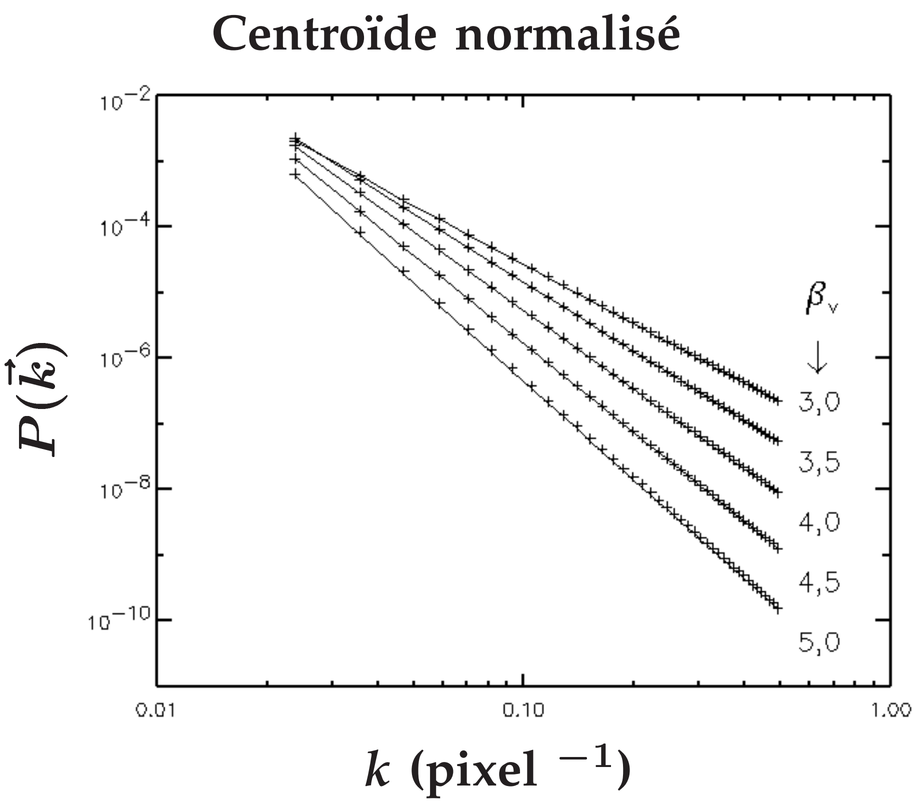
**Coupe d'un cube de densité $(\beta_\rho = 4)$**



# Spectres de puissance des centroïdes

- $\sigma_\rho/\rho_0 < 0,3$ **par construction des browniens fractionnaires**
- **Observation visuelle des cartes de centroïdes**




$$\beta_C = \beta_{C_0} = \beta_v$$

# Limitations de la méthode

## Calibration de l'axe des vitesses

- Vitesse moyenne non nulle ➔ $v_0^2 M_{\rho,\rho}(\vec{R}) \neq 0$
- Pour $\beta_\rho < \beta_v$ : $\sigma_\rho/\rho_0 \to 0 : \beta_C \to \beta_v$ $\sigma_\rho/\rho_0 \to 0,3 : \beta_C \to \beta_\rho$
- Conservation de l'égalité $\beta_{C_0} = \beta_v$

**Limite purement technique**

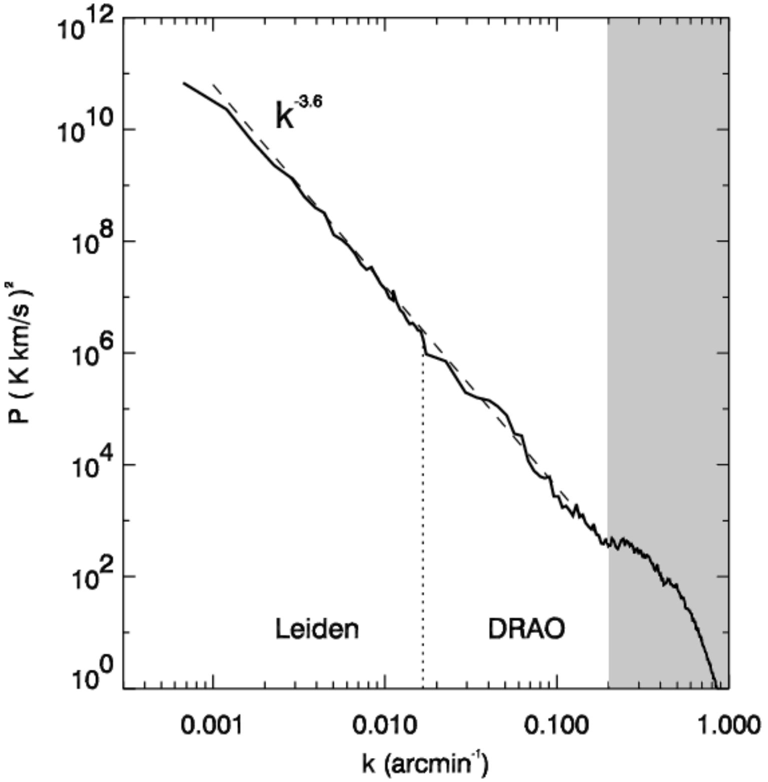
## Fluctuations de densité importantes

- $\rho$ : exponentielle de brownien fractionnaire
- Pour $\beta_\rho < \beta_v$ : $\beta_{C_0} = \beta_C = \beta_\rho$

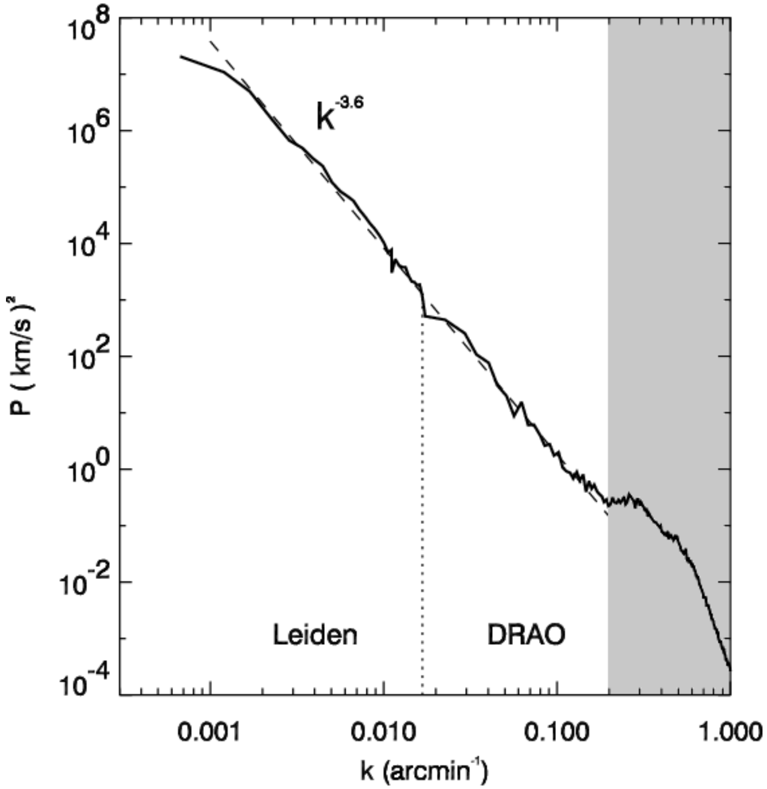
**Limite fondamentale**

# Observations des spectres de puissance du HI

**Intensité intégrée**




**Centroïde**




*(Miville-Deschênes et al., 2003)*

$$\beta_I = \beta_{C_0} = 3,6 \pm 0,2 \quad \text{compatible avec la loi de Kolmogorov}$$

**Résultats similaires sur les plasmas astrophysiques** *(Higdon, 1986 ; Armstrong et al., 1995)*

# Le problème de la dynamique

## Détermination des lois de puissance des observables

**Mesure correcte de l'émission sur une grande plage d'échelles**

**Résolution** **Champ de vue** **Bruit**

## Cartographie de l'émission

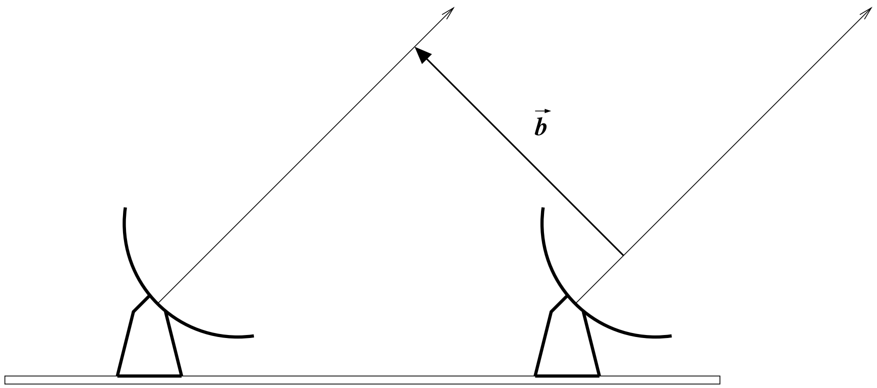
- **Antenne unique → 1 antenne pointe $N$ directions successivement**
- **Synthèse d'ouverture → $N$ antennes pointent 1 direction simultanément**

ALMA at Chajnantor
(Courtesy NAOJ)
ESO PR Photo 14/01 (6 April 2001) © European Southern Observatory

**Projet ALMA (2012)**
**64 antennes de 12 mètres**

# Le filtrage interférométrique

**Mesure de la corrélation entre les signaux reçus par chaque antenne**




$$V(\vec{b}) = TF[B(\vec{X})I(\vec{X})]$$

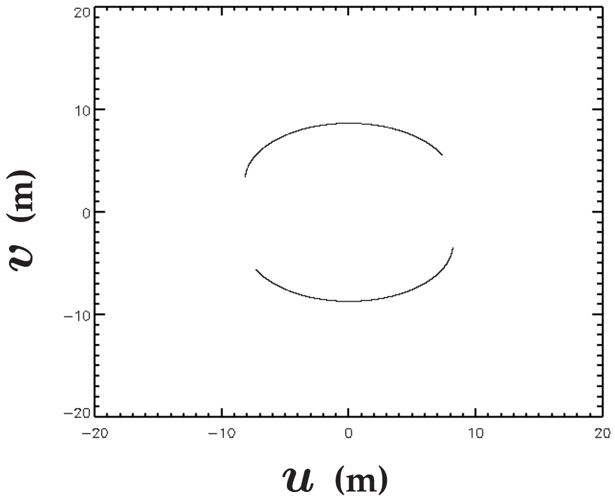
$V$ : Fonction de visibilité

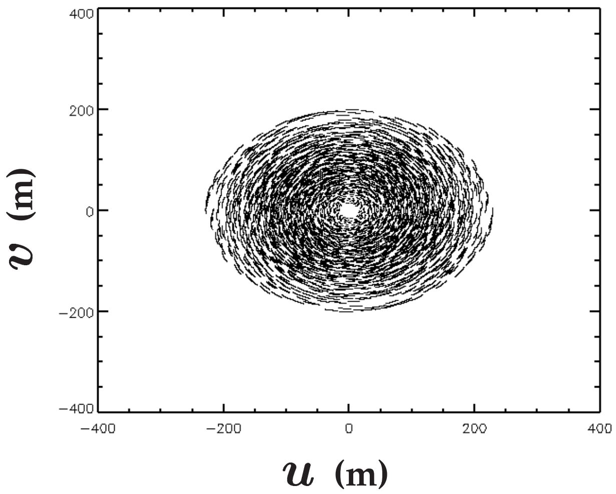
$B$ : Lobe d'antenne

$I$ : Distribution de brillance

*(Thompson et al., 1991)*

**Couvertures $u - v$ (coordonnées de $\vec{b}$)**



# La question posée

## Dégradation des images

**Distributions de brillance 2D : $H_0, \beta_0, \gamma_0$**

*Filtrage interférométrique* ▼

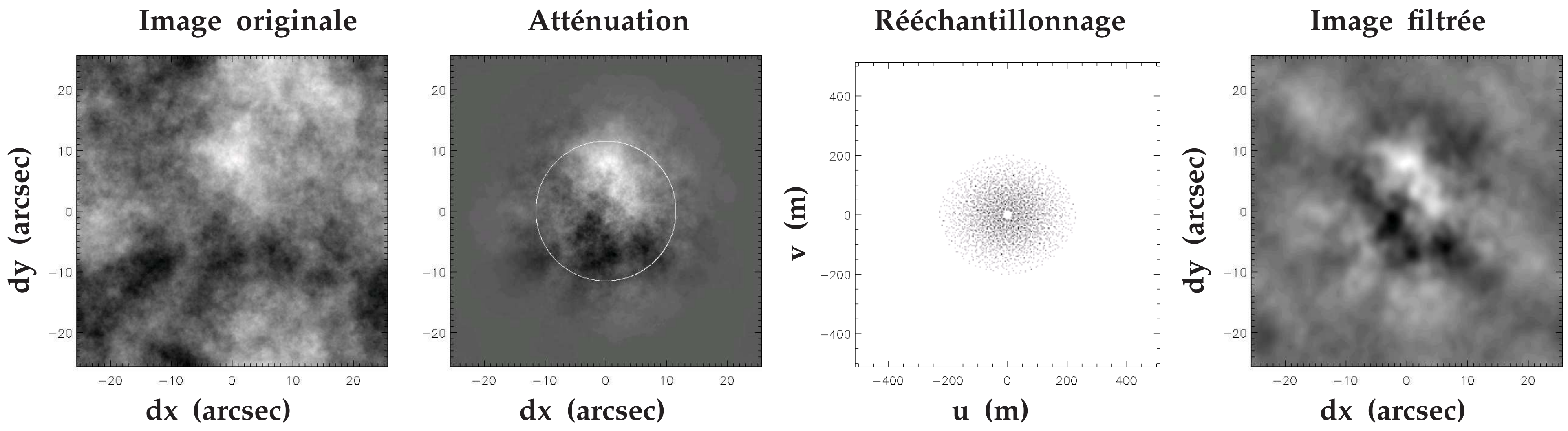
**Distributions de brillance modifiées : $H, \beta, \gamma$**

**Quels outils statistiques sont les plus fiables?**

## Approche numérique directe

- **Champs browniens fractionnaires 2D**
- **Simulateur instrumental simple**
- **Comparaison des mesures statistiques en entrée et en sortie**

# Simulateur interférométrique



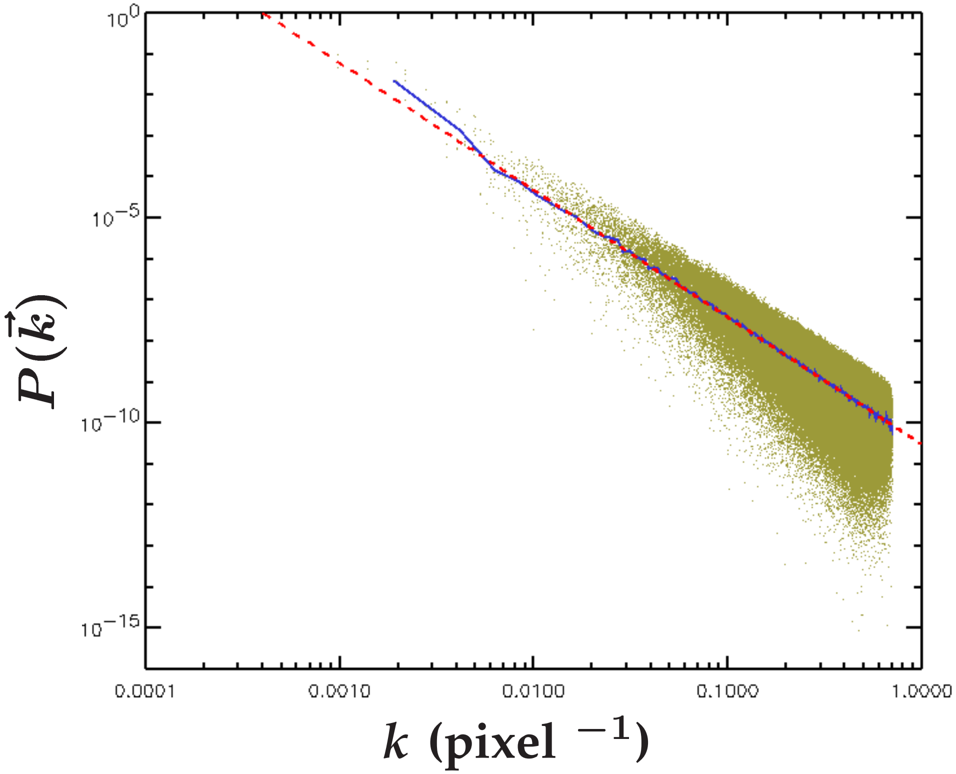

## Un outil simple pour des images complexes

- Petit nombre de configurations fixes
- Un seul type d'antennes
- Une seule fréquence d'observation
- Fonction de rééchantillonnage "porte"
- Sources de bruit et d'erreurs ignorées

**Identifier $\beta$, $H$ ou $\gamma$ sur une plage d'échelles**

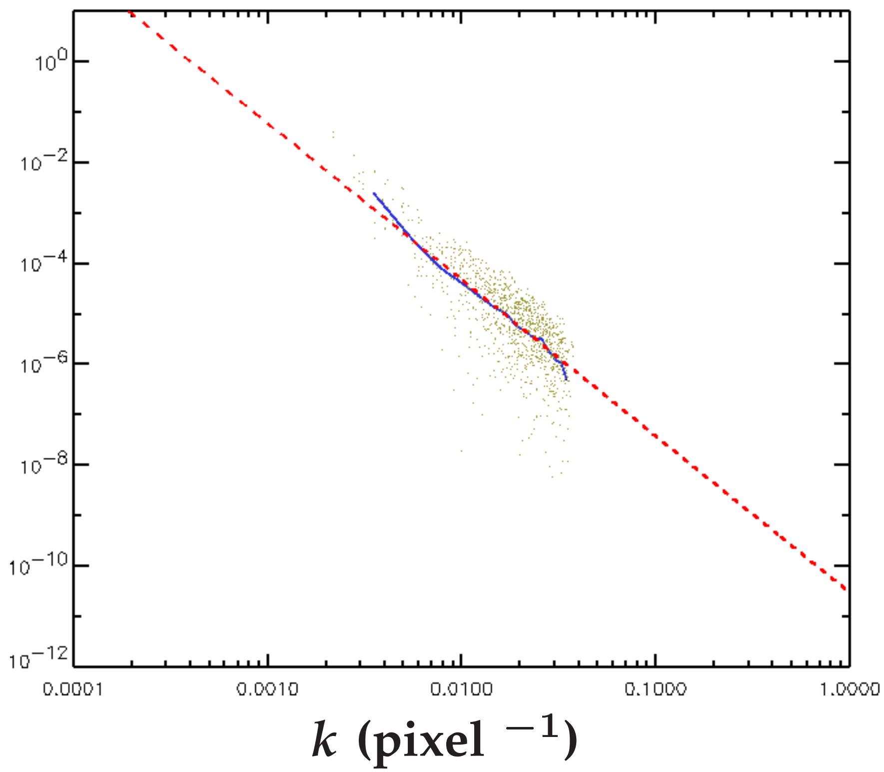
# Spectre de puissance des images filtrées

**Effet du lobe primaire**




**Dynamique complète**

**Effet de la couverture**

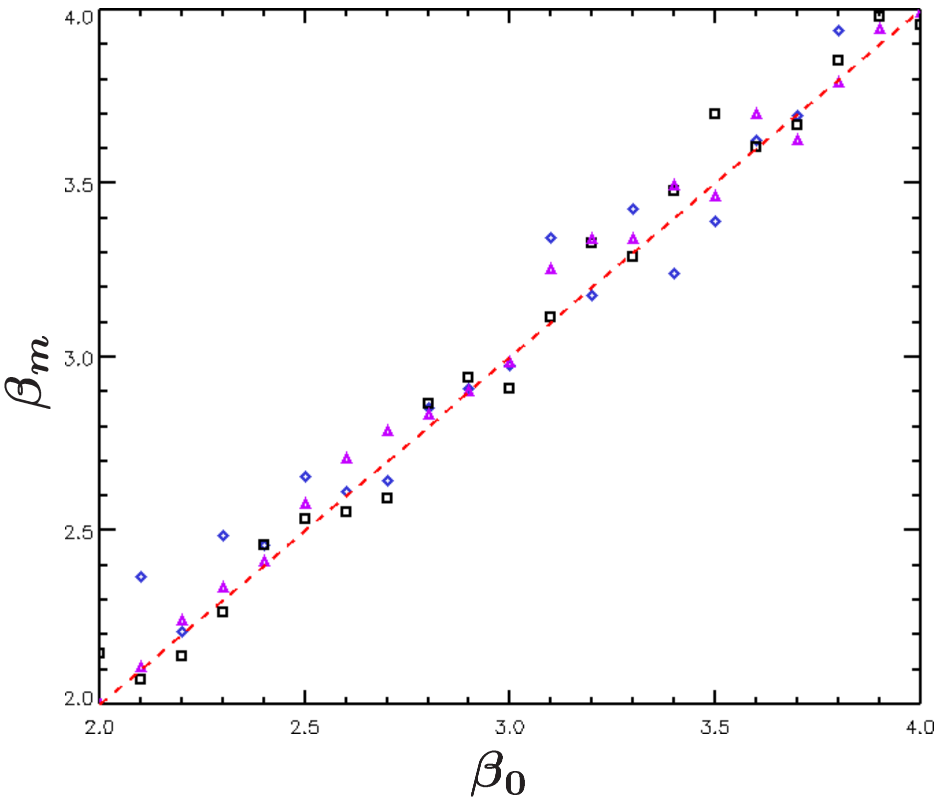



**Dynamique restreinte**

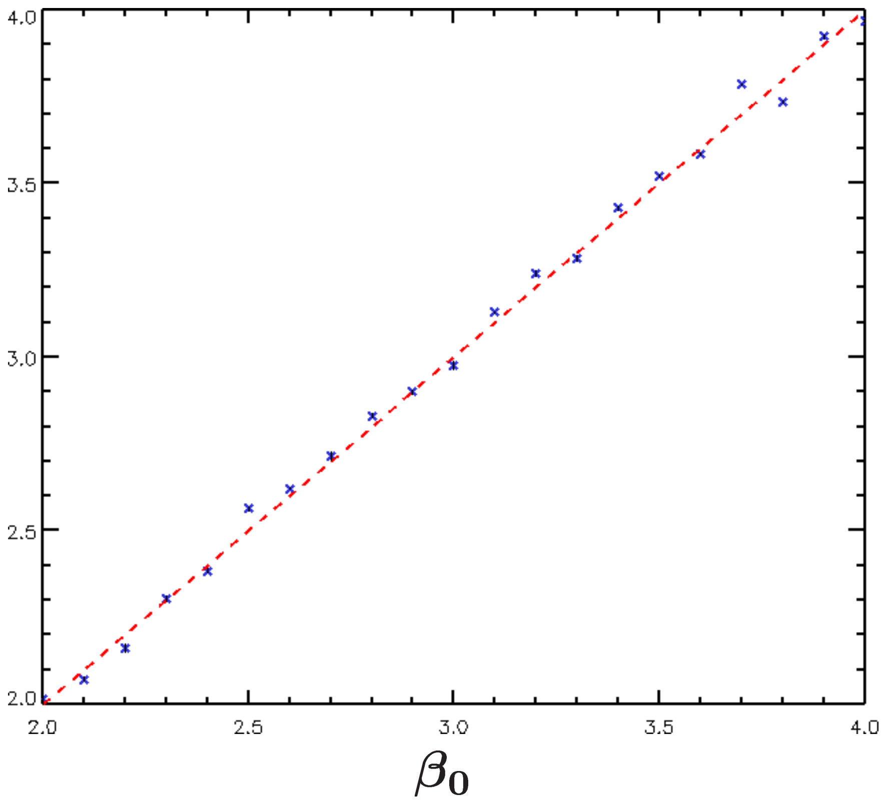
**Moyenne azimutale ➜ Loi de puissance originale**

## Ajustements de lois de puissance

**Configurations séparées**

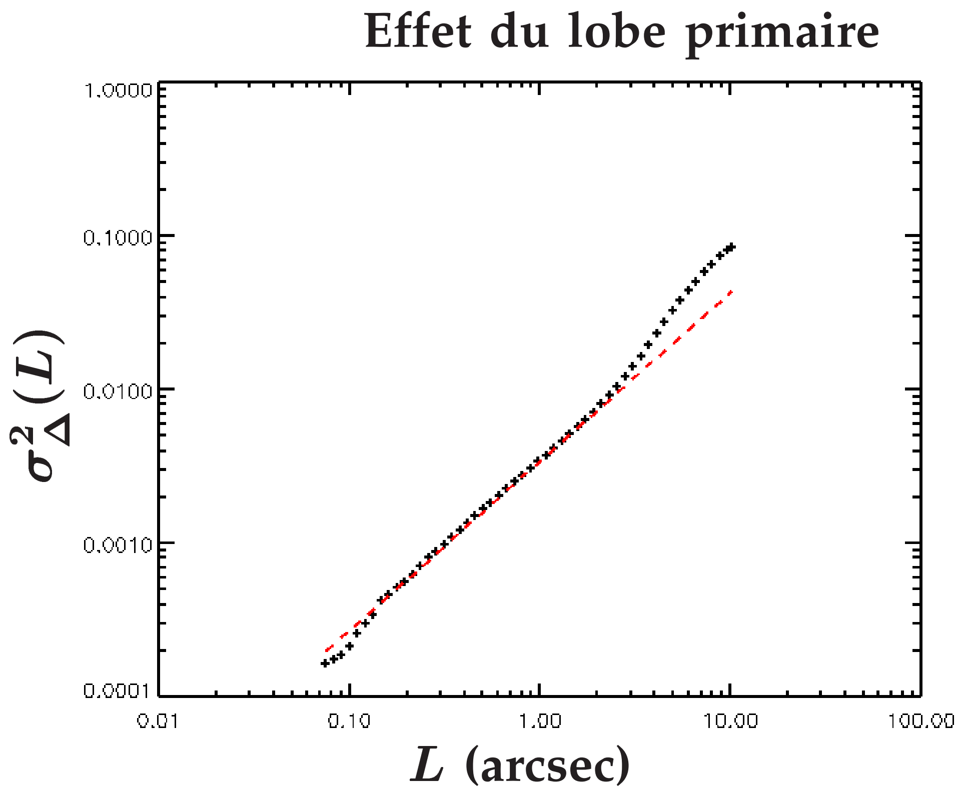


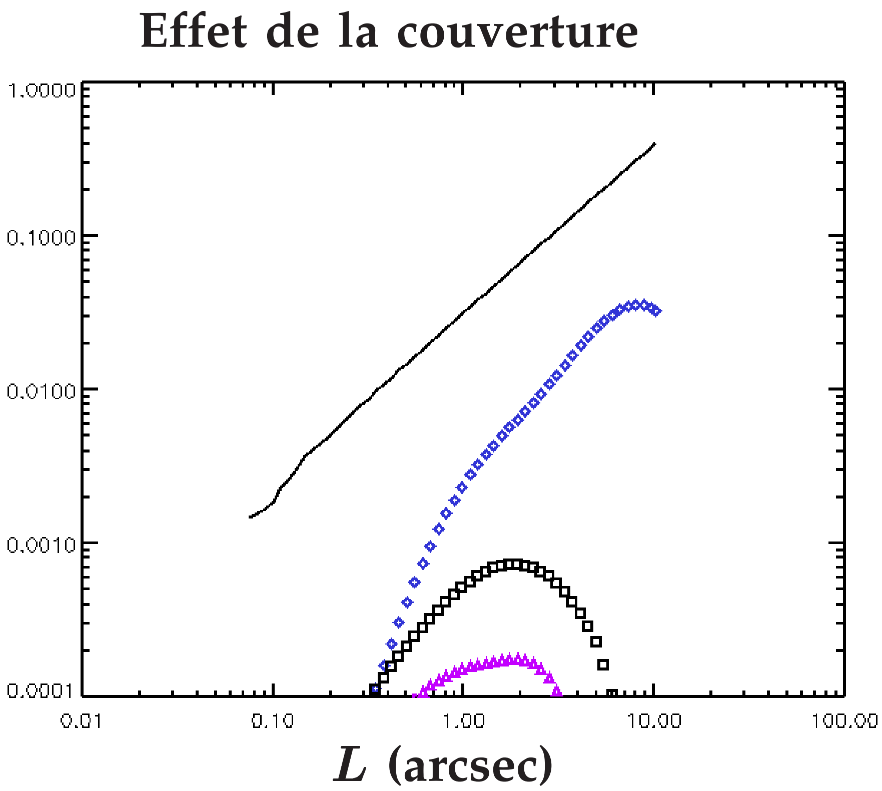

**Configurations combinées**




**Fiabilité de l'indice spectral**

# Δ-variance des images filtrées



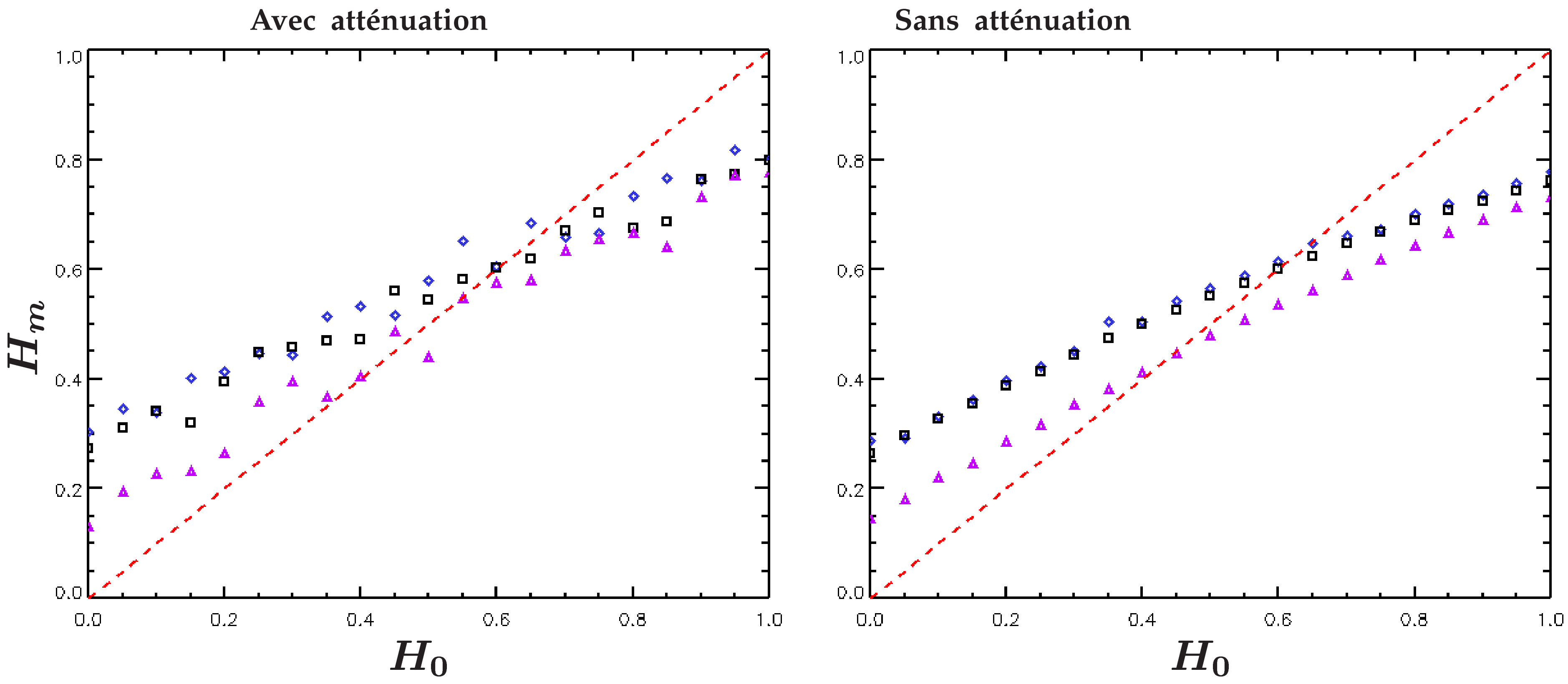




- **Dynamique d'échelles restreinte par le champ de vue**
- **Trou dans la couverture $u - v$ affecte une grande plage d'échelles**

**Outil mal adapté à la synthèse d'ouverture**

# Fonction de structure des images filtrées

## Ajustements de lois de puissance




**Outil mal adapté à la synthèse d'ouverture**

# Diagnostics du filtrage

## Adaptation des outils à l'espace de mesure

**$\Delta$-variance** *(Bensch et al., 2001)*
**Fonction de structure** $\Leftrightarrow$ *Espace réel* $\Leftrightarrow$ **Antenne unique**
**Fonction d'autocorrélation** *(Kleiner & Dickman, 1985)*

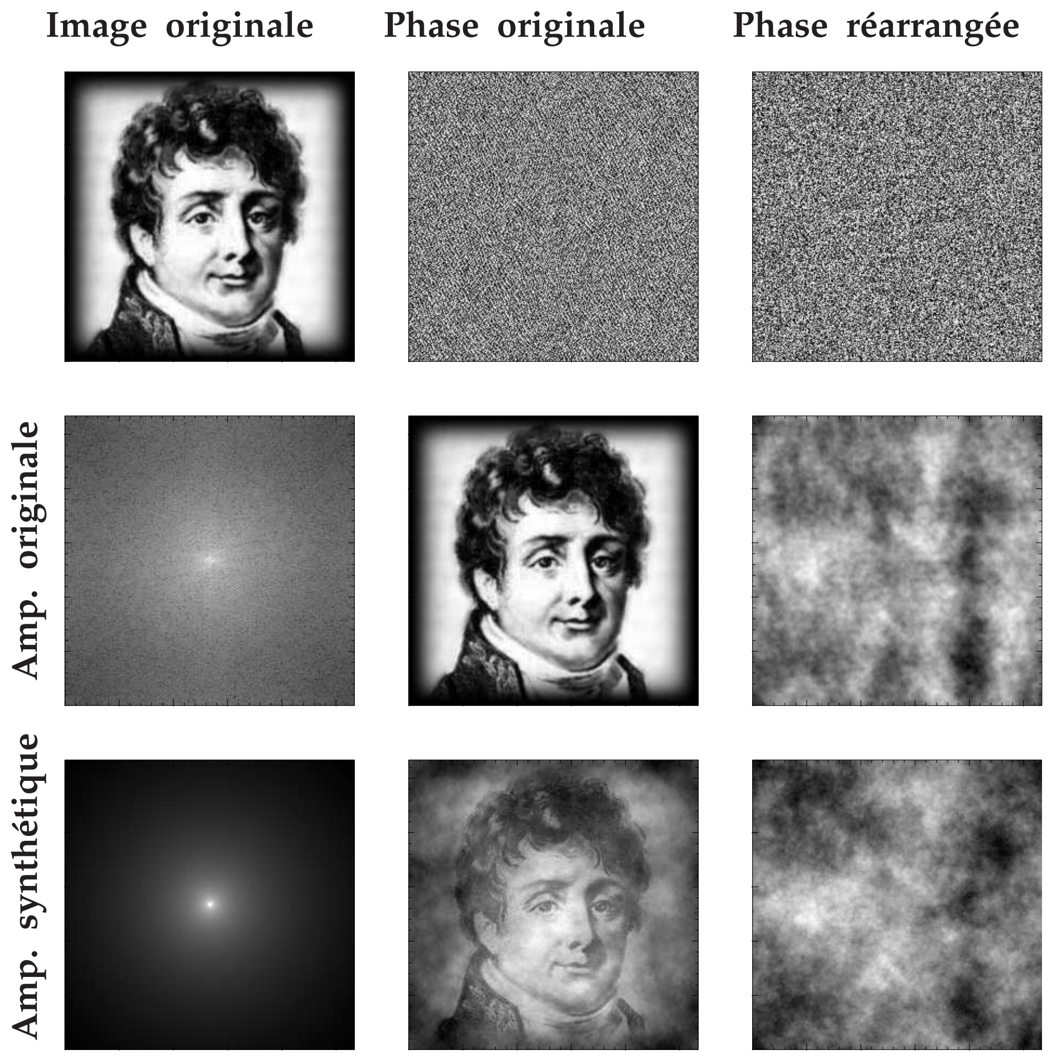
**Spectre de puissance** $\Leftrightarrow$ *Espace de Fourier* $\Leftrightarrow$ **Synthèse d'ouverture**

## Conclusions

**On dispose directement des visibilités**

| Amplitudes | Phases |
|---|---|
| Spectre de puissance | ? |

# Importance de la structure spatiale de la phase

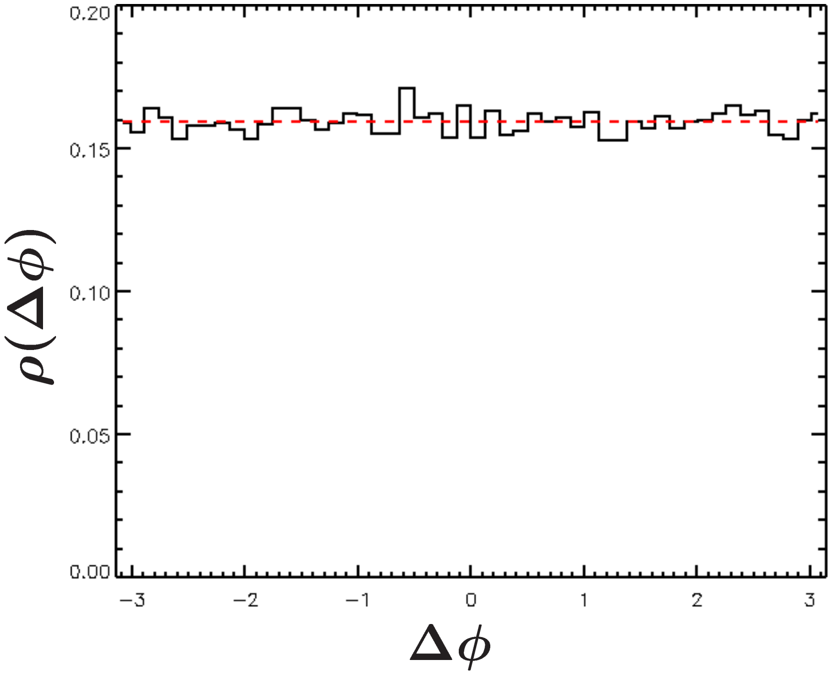


# Incréments de phase

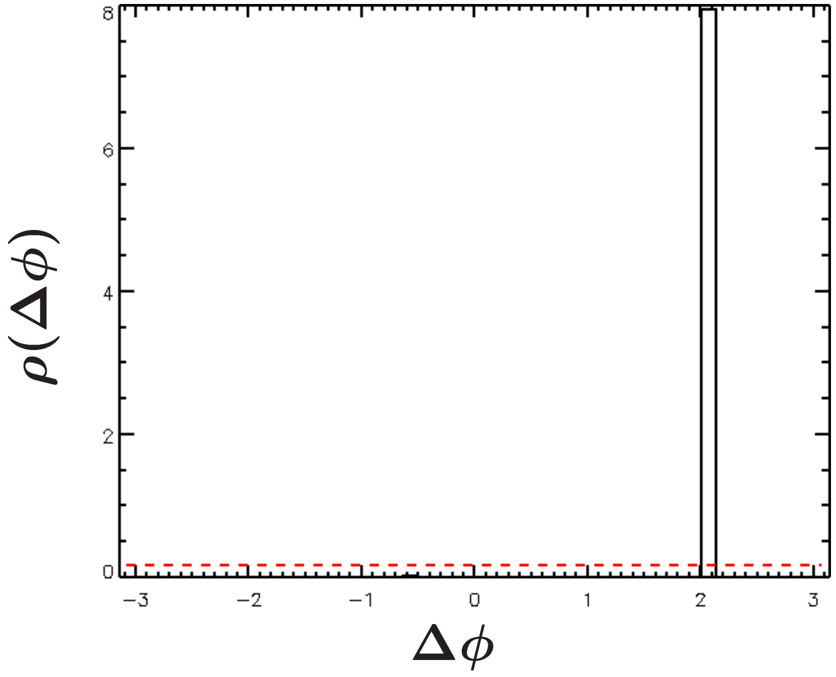
$$\Delta\Phi(\vec{k},\vec{\delta}) = \Phi(\vec{k}+\vec{\delta}) - \Phi(\vec{k})$$

## Cas particuliers

**Brownien fractionnaire $512 \times 512$**



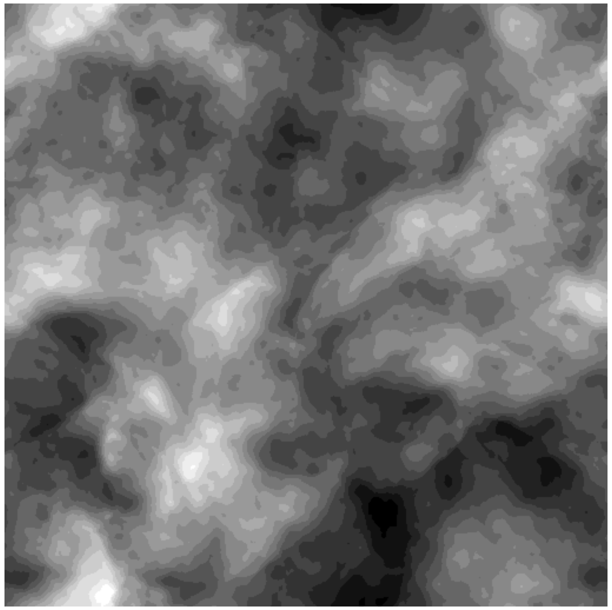

**Source ponctuelle**



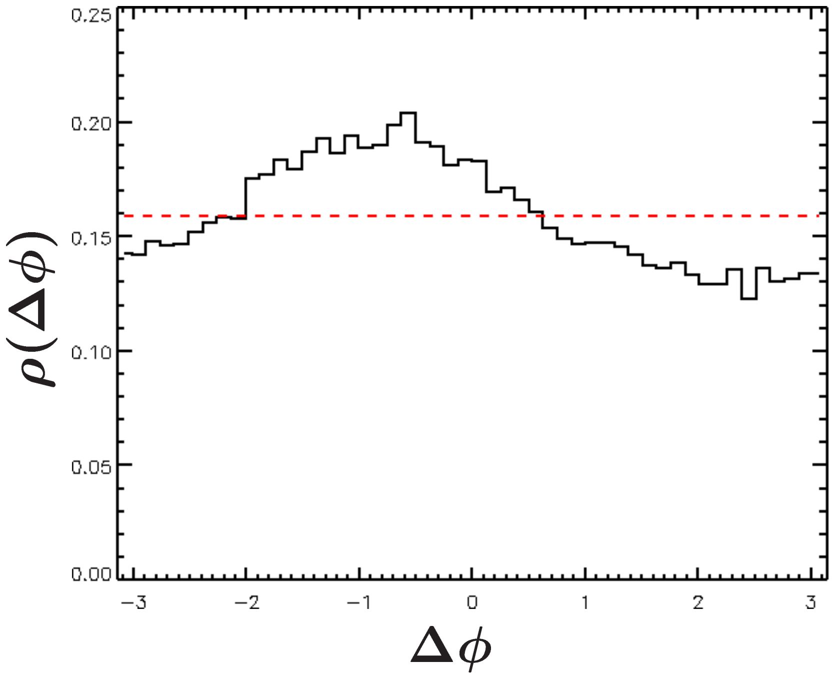
# Exemple intermédiaire

## Simulation hydrodynamique compressible *(Porter et al., 1994)*

**Densité de colonne**



**Histogramme des incréments de phase ($\vec{\delta} = \vec{e}_x$)**

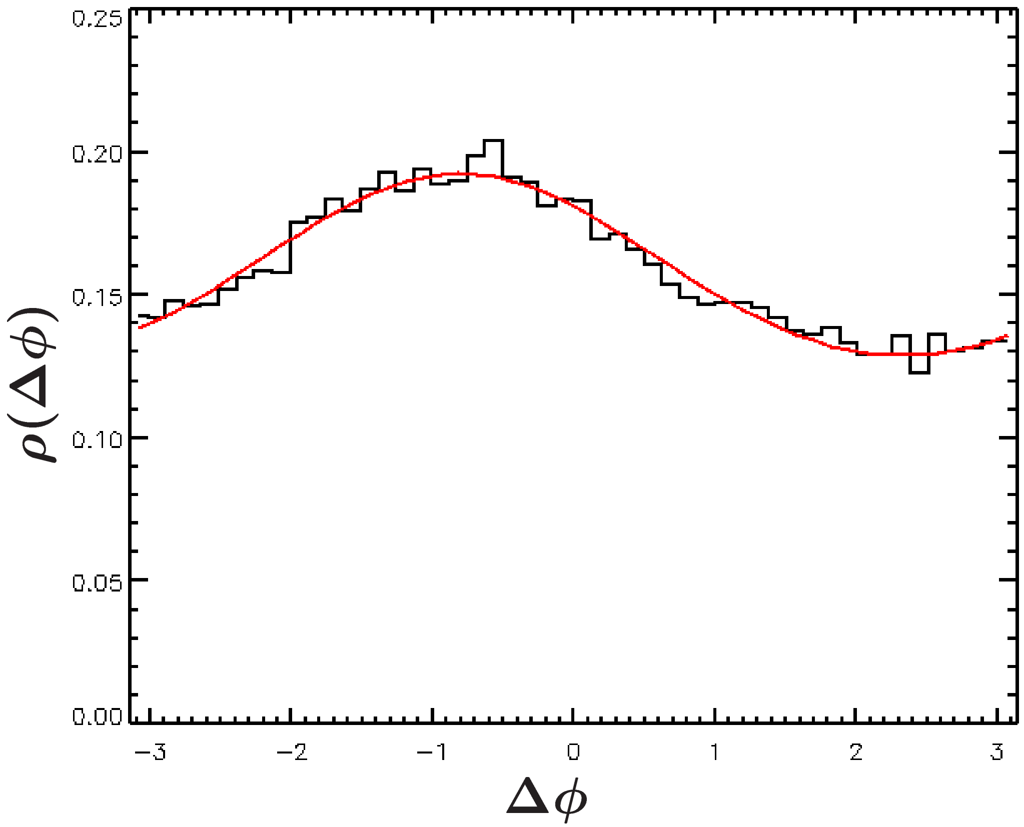


# Distribution de von Mises

$$\rho(\Delta\phi) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} e^{-\kappa cos(\Delta\phi - \mu)}$$

*(Watts et al., 2003)*

$\mu$ : position du minimum $\qquad$ $\kappa$ : amplitude de l'oscillation



# Entropie et "quantité de structure"

## Caractérisations de la non-uniformité des histogrammes

**Entropie** $$\mathcal{S}(\vec{\delta}) = -\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\Delta\phi)\, ln[\rho(\Delta\phi)] d\Delta\phi$$

*(Polygiannakis & Moussas, 1995 ; Chiang & Coles, 2000)*

**"Quantité de structure"** $\mathcal{Q}(\vec{\delta}) = ln\,(2\pi) - \mathcal{S}(\vec{\delta})$ **positive**

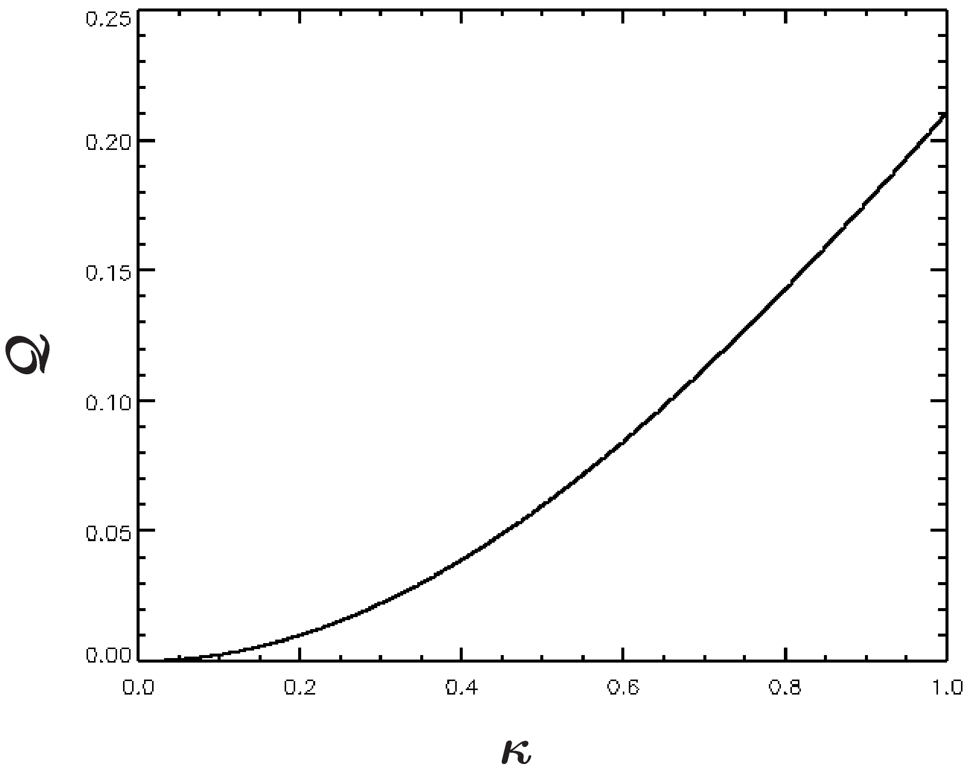
## Propriétés (souhaitables)

- **Invariance des cartes $\mathcal{S}(\vec{\delta})$ et $\mathcal{Q}(\vec{\delta})$ par translation de l'image**
- **Rotation des cartes $\mathcal{S}(\vec{\delta})$ et $\mathcal{Q}(\vec{\delta})$ par rotation de l'image**
- **Symétrie des cartes $\mathcal{S}(\vec{\delta})$ et $\mathcal{Q}(\vec{\delta})$ par symétrie de l'image**

# Entropie et distribution de von Mises

## Quantité de structure associée à une distribution de von Mises

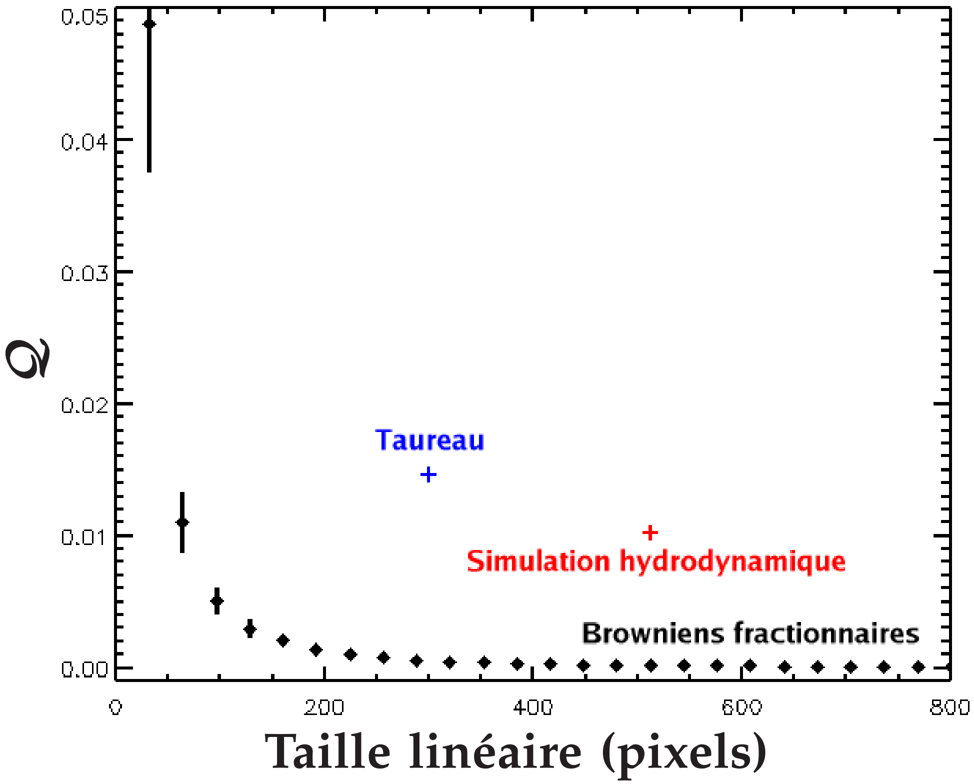
$$\mathcal{Q} = \kappa \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} - ln\left[I_0(\kappa)\right]$$



# Détection de la présence de "structure"

## Test numérique

- Browniens fractionnaires de tailles diverses
- Champs issus d'une simulation et d'une observation



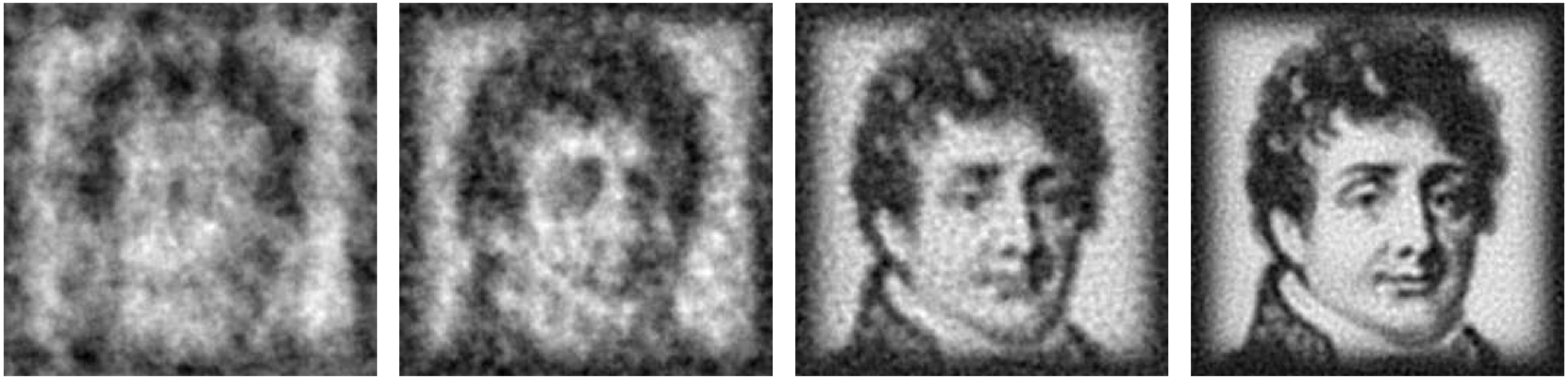
# Quelques questions

## Contraintes sur la déconvolution?

- Diagnostic en Fourier $\Leftrightarrow$ Synthèse d'ouverture
- Collection de sources ponctuelles: quelle structure de la phase?
- Lien avec les ondelettes?

## Le couplage amplitude / phase

Conservation de la phase dans un disque de rayon $k_0$



$k_0 = 5$ pixels $k_0 = 10$ pixels $k_0 = 20$ pixels $k_0 = 30$ pixels

# Conclusions

## Des résultats...

- Relation entre les propriétés statistiques 2D et 3D
- Adaptation des outils statistiques à l'espace des mesures
- Limite des browniens fractionnaires comme modèle du milieu interstellaire

## ... des perspectives...

- Problème du transfert radiatif : modification des profils de raie *(Hegmann)*
- Raffinement de la prise en compte du bruit
- Champs plus réalistes de densité et de vitesse

## ... et une vaste question

**Qu'est ce que la structure?**