

Etude analytique des propriétés
statistiques des centroïdes de vitesse
dans un modèle turbulent simple

François Levrier

(LERMA / LRA - ENS et Observatoire de Paris)

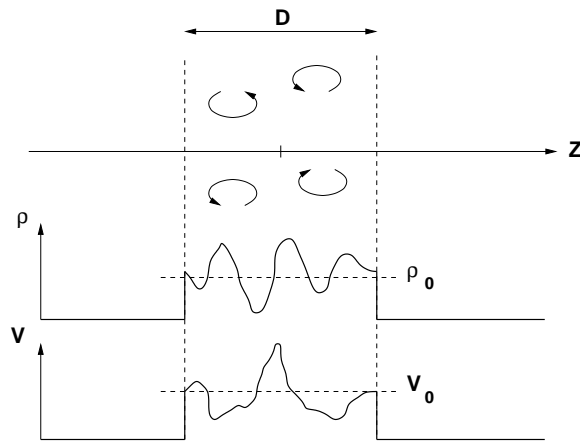
20 Octobre 2003

Position du problème

- Détermination du champ de vitesse
 - Mouvements turbulents du MIS
 - Support des nuages moléculaires
- Observations de raies spectrales
 - Obtention d'une température d'antenne $T_a(\mathbf{X}, u)$
 - u vitesse longitudinale ; \mathbf{X} direction d'observation
- Difficultés
 - Une seule composante accessible
 - Effet d'épaisseur optique
 - Effet de projection couplant densité et vitesse
 - Résolutions spatiale et spectrale
- Méthode : calcul des moments de T_a

$$W_n(\mathbf{X}) = \int u^n T_a(\mathbf{X}, u) du$$

Modèle simple de couche turbulente



– Le modèle

- Couche turbulente \perp à la ligne de visée
- Densité moyenne ρ_0
- Vitesse longitudinale moyenne v_0
- Vitesse et densité nulles en dehors de la couche

– Hypothèses

- Turbulence homogène et isotrope
- Cas d'une transition optiquement mince
- Excitation uniforme
- Pas de rayonnement de fond
- Elargissement Doppler uniforme
- Fluctuations "faibles" en densité et en vitesse

Moments de la raie spectrale

- Expression de la température d'antenne

$$T_a(\mathbf{X}, u) = \int T_e(\mathbf{x}) \kappa_0(\mathbf{x}) \phi(v_z(\mathbf{x}) - u) dz$$

- T_e température d'excitation
- κ_0 coefficient d'absorption intégré
- ϕ profil de la raie normalisé

- Avec les hypothèses

$$T_a(\mathbf{X}, u) = \alpha \int \rho(\mathbf{x}) \phi(v_z(\mathbf{x}) - u) dz$$

- Moment d'ordre n de T_a

$$W_n(\mathbf{X}) = \alpha \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \left[\int w^k \phi(w) dw \right] \left[\int \rho v_z^{n-k} dz \right]$$

- En particulier :

- Intensité $I = W_0 = \int \alpha \rho dz$
- Centroïde non normalisé $C = W_1 = \int \alpha \rho v_z dz$
- Introduction du centroïde normalisé $C_0 = C/I$

Mesures statistiques

- Statistiques 3D à partir de statistiques 2D
 - Mesures 2D sur les cartes des moments $W_n(\mathbf{X})$
 - Les relier à des mesures statistiques des champs 3D
 - Cas général de la densité non uniforme
- Outils statistiques
 - Mesure de la corrélation à deux points
 - Séparation \mathbf{R} sur le plan du ciel
 - Fonctions d'autocorrélation $A_{W_n} = \langle W_n(\mathbf{X})W_n(\mathbf{X} + \mathbf{R}) \rangle$
 - Fonctions de structure $S_{W_n} = \langle [W_n(\mathbf{X}) - W_n(\mathbf{X} + \mathbf{R})]^2 \rangle$
 - Moyennes $\langle \dots \rangle$ prises sur la position \mathbf{X}
 - Identiques aux moyennes d'ensemble (ergodicité)
 - Homogénéité $\Rightarrow S_{W_n}(\mathbf{R}) = 2 [A_{W_n}(\mathbf{0}) - A_{W_n}(\mathbf{R})]$

Méthode de résolution

- Réécriture des cartes des moments
 - Séparation moyenne et fluctuations de ρ et v
 - Fluctuations faibles : développement de I, C, C_0
- Au premier ordre non trivial
 - Calcul général des moyennes $\langle \dots \rangle$ de chaque terme
 - Faire apparaître les fonctions d'autocorrélation 3D
 - Calcul explicite dans le cas des fBm

Séparation moyenne et fluctuations

- Exemple de l'intensité

$$I(\mathbf{X}) = \int \alpha \rho(\mathbf{X}, z) dz = \alpha \rho_0 D \left[1 + \underbrace{\frac{1}{D} \int \frac{\delta \rho(\mathbf{X}, z)}{\rho_0} dz}_{y_{\rho_x}} \right]$$

- Pour le centroïde, apparition des termes

$$y_{v_x} = \frac{1}{D} \int \frac{\delta v}{v_0} dz \quad , \quad y_{\rho v_x} = \frac{1}{D} \int \frac{\delta \rho \delta v}{\rho_0 v_0} dz$$

- Fluctuations “faibles”

$$|y_{\rho_x}| < 1 \quad , \quad |y_{v_x}| < 1 \quad , \quad |y_{\rho v_x}| < 1$$

→ Vrai si les fluctuations locales sont $|\delta f/f_0| < 1$

→ Vrai pour des grandes fluctuations se compensant

→ y_{ρ_x} et y_{v_x} d'ordre 1, $y_{\rho v_x}$ d'ordre 2

- Expressions de I , C et C_0

$$I = \alpha \rho_0 D [1 + y_{\rho_x}]$$

$$C = \alpha \rho_0 v_0 D [1 + y_{\rho_x} + y_{v_x} + y_{\rho v_x}]$$

$$C_0 = v_0 [1 + y_{\rho_x} + y_{v_x} + y_{\rho v_x}] [1 + y_{\rho_x}]^{-1}$$

Autocorrélation de l'intensité

- Expression en fonction de y_ρ

$$A_I(\mathbf{R}) = (\alpha\rho_0 D)^2 \left[1 + \underbrace{\langle y_{\rho_{\mathbf{X}}} \rangle + \langle y_{\rho_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \rangle}_1 + \underbrace{\langle y_{\rho_{\mathbf{X}}} y_{\rho_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \rangle}_2 \right]$$

- Homogénéité et définition de la moyenne

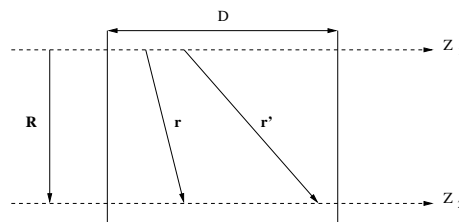
$$\langle y_{\rho_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \rangle = \langle y_{\rho_{\mathbf{X}}} \rangle = \frac{1}{\rho_0 D} \int \langle \delta\rho(\mathbf{X}, z) \rangle dz = 0$$

- Terme d'ordre 2

$$\langle y_{\rho_{\mathbf{X}}} y_{\rho_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \rangle = \frac{1}{(\rho_0 D)^2} \iint \langle \delta\rho(\mathbf{X}, z_1) \delta\rho(\mathbf{X} + \mathbf{R}, z_2) \rangle dz_1 dz_2$$

- Autocorrélation des fluctuations de densité

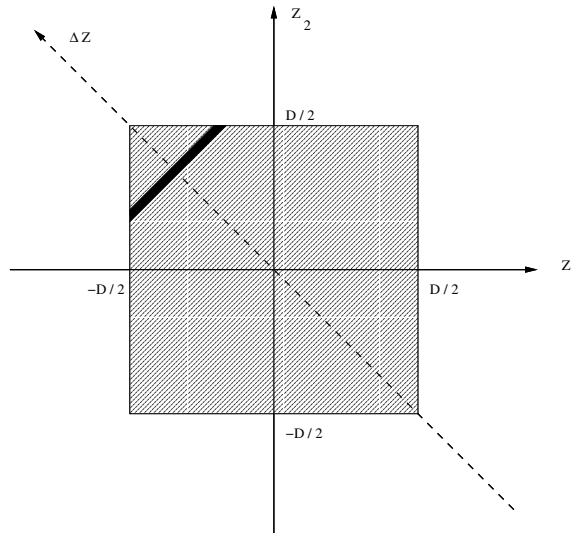
→ Par définition, $B_{\rho,\rho}(\mathbf{r}) = \langle \delta\rho(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \delta\rho(\mathbf{x}) \rangle$



$$A_I(\mathbf{R}) = (\alpha\rho_0 D)^2 \left[1 + \underbrace{\frac{1}{\rho_0^2} \frac{1}{D^2} \iint B_{\rho,\rho}(\mathbf{R}, z_2 - z_1) dz_1 dz_2}_{M_{\rho,\rho}(\mathbf{R})} \right]$$

Passage à une intégrale simple

- Méthode de Chandrasekhar et Münch (1952)
 - $B_{\rho,\rho}$ ne dépend que de $\Delta z = z_2 - z_1$
 - Changement de variable $(z_1, z_2) \rightarrow (z_1, \Delta z)$



- Obtention d'une intégrale simple sur $x = \frac{\Delta z}{D}$

$$M_{\rho,\rho}(\mathbf{R}) = \int_{-1}^1 (1 - |x|) B_{\rho,\rho}(\mathbf{R}, xD) dx$$

Autocorrélation du centroïde C

- Expression en fonction de y_ρ , y_v et $y_{\rho v}$

$$A_C(\mathbf{R}) = (\alpha \rho_0 v_0 D)^2 [1 + \langle \alpha_1 \rangle + \langle \alpha_2 \rangle + \langle \alpha_3 \rangle + \langle \alpha_4 \rangle]$$

→ α_i terme d'ordre i

$$\alpha_1 = y_{\rho_X} + y_{\rho_{X+R}} + y_{v_X} + y_{v_{X+R}}$$

$$\alpha_2 = y_{\rho_X} y_{\rho_{X+R}} + y_{\rho_X} y_{v_{X+R}} + y_{\rho_{X+R}} y_{v_X} + y_{v_X} y_{v_{X+R}} + y_{\rho v_X} + y_{\rho v_{X+R}}$$

- Traitement semblable au cas de l'intensité

$$\langle \alpha_1 \rangle = 0$$

$$\langle \alpha_2 \rangle = \frac{M_{\rho,\rho}(\mathbf{R})}{\rho_0^2} + \frac{M_{v,v}(\mathbf{R})}{v_0^2} + \langle y_{\rho_X} y_{v_{X+R}} \rangle + \langle y_{\rho_{X+R}} y_{v_X} \rangle + 2 \langle y_{\rho v_X} \rangle$$

- Hypothèse de turbulence homogène isotrope

$$\rightarrow B_{v,\rho}(\mathbf{r}) = -B_{v,\rho}(-\mathbf{r}) \Rightarrow \langle y_{\rho_X} y_{v_{X+R}} \rangle + \langle y_{\rho_{X+R}} y_{v_X} \rangle = 0$$

$$\rightarrow \langle y_{\rho v_X} \rangle \propto B_{v,\rho}(\mathbf{0}) \Rightarrow \langle y_{\rho v_X} \rangle = 0$$

- Au deuxième ordre

$$A_C(\mathbf{R}) = (\alpha \rho_0 v_0 D)^2 \left[1 + \frac{M_{\rho,\rho}(\mathbf{R})}{\rho_0^2} + \frac{M_{v,v}(\mathbf{R})}{v_0^2} \right]$$

Autocorrélation du centroïde C_0

- Expression et développement

$$A_{C_0}(\mathbf{R}) = v_0^2 \left\langle \left[1 + \sum_{i=1}^4 \alpha_i \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{p=0}^n y_{\rho_X}^p y_{\rho_{X+R}}^{n-p} \right] \right\rangle$$

- Contribution des différents ordres

→ Ordre 0 : v_0^2

→ Ordre 1 : $v_0^2 [\langle y_{v_X} \rangle + \langle y_{v_{X+R}} \rangle] = 0$

→ Ordre 2 : $v_0^2 [\langle y_{v_X} y_{v_{X+R}} \rangle - 2 \langle y_{v_X} y_{\rho_X} \rangle] = M_{v,v}(\mathbf{R})$

En effet $\langle y_{v_X} y_{\rho_X} \rangle = \int_{-1}^1 (1 - |x|) B_{v,\rho}(\mathbf{0}, xD) dx = 0$

- Au deuxième ordre

$$A_{C_0}(\mathbf{R}) = v_0^2 \left[1 + \frac{M_{v,v}(\mathbf{R})}{v_0^2} \right]$$

Mouvements Browniens fractionnaires

– Mesures statistiques 3D en loi de puissance

→ Fonctions de structure

$$S_\rho(\mathbf{r}) = \langle [\rho(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \rho(\mathbf{x})]^2 \rangle = 2\Lambda_\rho |\mathbf{r}|^{2H_\rho}$$

$$S_v(\mathbf{r}) = \langle [v(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - v(\mathbf{x})]^2 \rangle = 2\Lambda_v |\mathbf{r}|^{2H_v}$$

→ Fonctions d'autocorrélation

$$B_{\rho,\rho}(\mathbf{r}) = -\Lambda_\rho r^{2H_\rho} + \langle \delta\rho^2 \rangle \quad B_{v,v}(\mathbf{r}) = -\Lambda_v r^{2H_v} + \langle \delta v^2 \rangle$$

– H_v et H_ρ : Exposants de Hurst

→ $0 < H < 1$

→ Le champ est d'autant plus lisse que H est grand.

– Il s'agit de calculer les intégrales :

$$I_{\Lambda,\mu} = \frac{1}{D^2} \int_{-D}^D (D - |z|) [-\Lambda(R^2 + z^2)^H + \mu] dz$$

Calcul des intégrales

- Passage à une intégrale sur $[0, D]$

$$I_{\Lambda, \mu} = \frac{2}{D^2} \int_0^D (D - z) [-\Lambda(R^2 + z^2)^H + \mu] dz$$

- Séparation en trois termes

$$I_{\Lambda, \mu} = - \underbrace{\left[\frac{2\Lambda}{D} \int_0^D (R^2 + z^2)^H dz \right]}_{J_{\Lambda}} + \underbrace{\left[\frac{2\Lambda}{D^2} \int_0^D z(R^2 + z^2)^H dz \right]}_{K_{\Lambda}} + \mu$$

- K_{Λ} explicitable

$$K_{\Lambda} = \frac{\Lambda D^{2H}}{H + 1} \left[\left(1 + \frac{R^2}{D^2} \right)^{H+1} - \left(\frac{R^2}{D^2} \right)^{H+1} \right]$$

- J_{Λ} n'est pas explicitable

→ Sauf si $R = 0$

→ Développement aux séparations faibles $R \ll D$

Développement en puissances de R/D

- Changement de variable $y = z/R$ ($R > 0$)

$$J_\Lambda = \frac{2\Lambda R^{2H+1}}{D} \int_0^{D/R} (1 + y^2)^H dy$$

- Séparation pour $D > R$

$$J_\Lambda = \frac{2\Lambda R^{2H+1}}{D} \left[\mathcal{J}_0(H) + \int_1^{D/R} y^{2H} (1 + y^{-2})^H dy \right]$$

- Développement de l'intégrande

$$J_\Lambda = \frac{2\Lambda R^{2H+1}}{D} \left[\mathcal{J}_0(H) + \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(H) \int_1^{D/R} y^{2H-2k} dy \right]$$

$$\gamma_0(H) = 1 \quad , \quad \gamma_k(H) = \frac{H(H-1)\dots(H-k+1)}{k!}$$

Développement : cas $H \neq 0.5$

– Ecriture explicite des intégrales

$$\int_1^{D/R} y^{2H-2k} dy = \frac{1}{2H-2k+1} \left[\left(\frac{R}{D} \right)^{2k-2H-1} - 1 \right]$$

– Développement de K_Λ

$$K_\Lambda = \frac{\Lambda D^{2H}}{H+1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (H+1) \left(\frac{R}{D} \right)^{2k} - \left(\frac{R}{D} \right)^{2(H+1)} \right]$$

– Termes dominants dans les intégrales $I_{\Lambda,\mu}$

→ Pour $0 < H < 0.5$:

$$I_{\Lambda,\mu} = \mu + \mathcal{A}_{\Lambda,D,H} + \mathcal{B}_{\Lambda,D,H} \left(\frac{R}{D} \right)^{2H+1}$$

→ Pour $0.5 < H < 1$:

$$I_{\Lambda,\mu} = \mu + \mathcal{A}_{\Lambda,D,H} + \mathcal{C}_{\Lambda,D,H} \left(\frac{R}{D} \right)^2$$

→ \mathcal{A} , \mathcal{B} et \mathcal{C} fonctions de Λ , D , H uniquement

Développement : cas $H = 0.5$

- Intégrale $k = 1$

$$\int_1^{D/R} y^{-1} dy = -\ln\left(\frac{R}{D}\right)$$

- Autres intégrales inchangées
- Termes dominants dans $I_{\Lambda,\mu}$ pour $H = 0.5$

$$I_{\Lambda,\mu} = \mu - \frac{\Lambda D}{3} + \Lambda D \left(\frac{R}{D}\right)^2 \ln\left(\frac{R}{D}\right)$$

Fonctions d'autocorrélation des cartes 2D

– Exemple de l'intensité

$$A_I(\mathbf{R}) = (\alpha\rho_0 D)^2 \left[1 + \frac{1}{\rho_0^2} I_{\Lambda_\rho, \langle \delta\rho^2 \rangle} \right]$$

→ Pour $0 < H_\rho < 0.5$

$$\frac{A_I(\mathbf{R})}{(\alpha D)^2} = \left[\rho_0^2 + \langle \delta\rho^2 \rangle + \mathcal{A}_{\Lambda_\rho, D, H_\rho} + \mathcal{B}_{\Lambda_\rho, D, H_\rho} \left(\frac{R}{D} \right)^{2H_\rho+1} \right]$$

→ Pour $H_\rho = 0.5$

$$\frac{A_I(\mathbf{R})}{(\alpha D)^2} = \left[\rho_0^2 + \langle \delta\rho^2 \rangle - \frac{\Lambda_\rho D}{3} + \Lambda_\rho D \left(\frac{R}{D} \right)^2 \ln \left(\frac{R}{D} \right) \right]$$

→ Pour $0.5 < H_\rho < 1$

$$\frac{A_I(\mathbf{R})}{(\alpha D)^2} = \left[\rho_0^2 + \langle \delta\rho^2 \rangle + \mathcal{A}_{\Lambda_\rho, D, H_\rho} + \mathcal{C}_{\Lambda_\rho, D, H_\rho} \left(\frac{R}{D} \right)^2 \right]$$

– Idem pour les autres quantités

Fonctions de structure des cartes 2D

– Intensité

→ Pour $0 < H_\rho < 0.5$: $S_I(\mathbf{R}) \propto (R/D)^{2H_\rho+1}$

→ Pour $H_\rho = 0.5$: $S_I(\mathbf{R}) \propto (R/D)^2 \ln(R/D)$

→ Pour $0.5 < H_\rho < 1$: $S_I(\mathbf{R}) \propto (R/D)^2$

– Centroïde normalisé

→ Pour $0 < H_v < 0.5$: $S_{C_0}(\mathbf{R}) \propto (R/D)^{2H_v+1}$

→ Pour $H_v = 0.5$: $S_{C_0}(\mathbf{R}) \propto (R/D)^2 \ln(R/D)$

→ Pour $0.5 < H_v < 1$: $S_{C_0}(\mathbf{R}) \propto (R/D)^2$

– Centroïde non normalisé

$$S_C(\mathbf{R}) = v_0^2 S_I(\mathbf{R}) + (\alpha \rho D)^2 S_{C_0}(\mathbf{R})$$

Effet de lissage par projection

- Exposant de Hurst de l'intensité

$$H_I = H_\rho + 0.5 \quad (0 < H_\rho < 0.5) \quad \text{et} \quad H_I = 1 \quad (H_\rho > 0.5)$$

- Lissage par projection (Stutzki *et al.* 1998)
- Equivalent à la conservation de l'indice spectral

- Exposant de Hurst du centroïde normalisé

$$H_{C_0} = H_v + 0.5 \quad (0 < H_v < 0.5) \quad \text{et} \quad H_{C_0} = 1 \quad (H_v > 0.5)$$

- Au premier ordre en fluctuations et aux petites échelles
- Résultat de Miville-Deschênes *et al.* 2003 :

$$\gamma_{C_0} = \gamma_v$$

- Turnover pour $H > 0.5 \Leftrightarrow$ Propriétés des fBm

Uniformité d'un fBm pour $H > 1$

- Lissage par projection : $H_{3D} > 0.5 \Rightarrow H_{2D} > 1$
- Incrément d'un fBm avec $H > 1$
 - Subdivision de la séparation \mathbf{r} en p segments :

$$\overline{[\mathcal{F}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathcal{F}(\mathbf{x})]^2} = \sum_{k=0}^{p-1} \overline{\Delta \mathcal{F}_k^2} + 2 \sum_{i < j} \overline{\Delta \mathcal{F}_i \Delta \mathcal{F}_j}$$

→ Introduction de $\mathcal{G}_{\mathbf{r},p}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}(\mathbf{x} + \mathbf{r}/p) - \mathcal{F}(\mathbf{x})$

$$\overline{\Delta \mathcal{F}_i \Delta \mathcal{F}_j} \leq \overline{\mathcal{G}_{\mathbf{r},p}^2(\mathbf{x})} = 2\Lambda(r/p)^{2H}$$

→ Passage à la limite $p \rightarrow \infty$

$$\overline{[\mathcal{F}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathcal{F}(\mathbf{x})]^2} \leq \frac{2\Lambda r^{2H}}{p^{2(H-1)}} \rightarrow 0$$

→ Pas de régime fBm avec $H > 1$

Conclusions

- Formalisation des propriétés de C_0
 - C_0 “Moyenne” de la vitesse
 - Même dans un modèle stochastique en ρ et v
 - Au premier ordre, C_0 est bien à v ce que I est à ρ
- Comparaison avec Miville-Deschênes *et al.* 2003
 - Analytique / Espace réel (numérique / Fourier)
 - On retrouve $\gamma_{C_0} = \gamma_v$
- Rapprochement avec la méthode MVC (Lazarian)
 - $S_C(\mathbf{R}) = v_0^2 S_I(\mathbf{R}) + (\alpha \rho D)^2 S_{C_0}(\mathbf{R})$
 - Soustraction de la contribution de $I \Leftrightarrow$ normalisation