

ETUDE EXPERIMENTALE DES ONDES DE GRAVITE DANS UN FLUIDE STRATIFIE

François LEVRIER

Stage expérimental, MIP 2e année
sous la direction de Jérôme PARET et Patrick TABELING
LPS,ENS

Septembre 1997

Table des matières

1 Etude théorique	3
1.1 Instabilité de Kelvin-Helmholtz	3
1.2 Ondes de gravité à une interface	6
2 Etude expérimentale	7
2.1 Le dispositif	7
2.1.1 Contraintes et choix expérimentaux	8
2.1.2 Réalisation pratique de la cellule	9
2.2 Instabilité de Kelvin-Helmholtz	9
2.2.1 Des problèmes de traceurs...	9
2.2.2 Observation du phénomène	10
2.3 Ondes de gravité	11
2.3.1 Modification du dispositif	11
2.3.2 Observation du phénomène	11
2.3.3 Relation de dispersion	13
A Instabilité de Kelvin-Helmholtz	20
A.1 Hypothèses	20
A.2 Linéarisation des équations; obtention de la relation de dispersion	21
A.3 Discussion de la relation de dispersion	22
B Ondes de gravité	24
B.1 Équations de départ	24
B.2 Linéarisation des équations; obtention de la relation de dispersion	25

Remerciements

Je tiens à remercier Patrick TABELING et son équipe, pour m'avoir accueilli pendant un mois dans leur laboratoire. En particulier, la réussite de ce stage est en grande partie due aux conseils et à l'aide que m'a apportés Jérôme PARET.

Plus personnellement, je remercie Yann BOURET, du Magistère de Chimie, pour ses précieux conseils quant au nettoyage du dispositif expérimental...

Introduction

Le but de ce stage, effectué au cours du mois de Septembre 1997 au Laboratoire de Physique Statistique de l'ENS, était à l'origine de modéliser les conditions d'un écoulement tel que celui de l'atmosphère. Malheureusement, nous n'avons pu être en mesure de réaliser cet objectif et nous nous sommes rabattus sur l'observation de phénomènes déjà bien connus tant théoriquement qu'expérimentalement dans un fluide stratifié. On trouvera dans ce rapport une étude qualitative de la réalisation de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz ainsi qu'une vérification de la relation de dispersion caractéristique des ondes de gravité dans un tel fluide.

Chapitre 1

Etude théorique

NB : Pour les calculs détaillés des relations de dispersion, on se reportera aux annexes.

1.1 Instabilité de Kelvin-Helmholtz

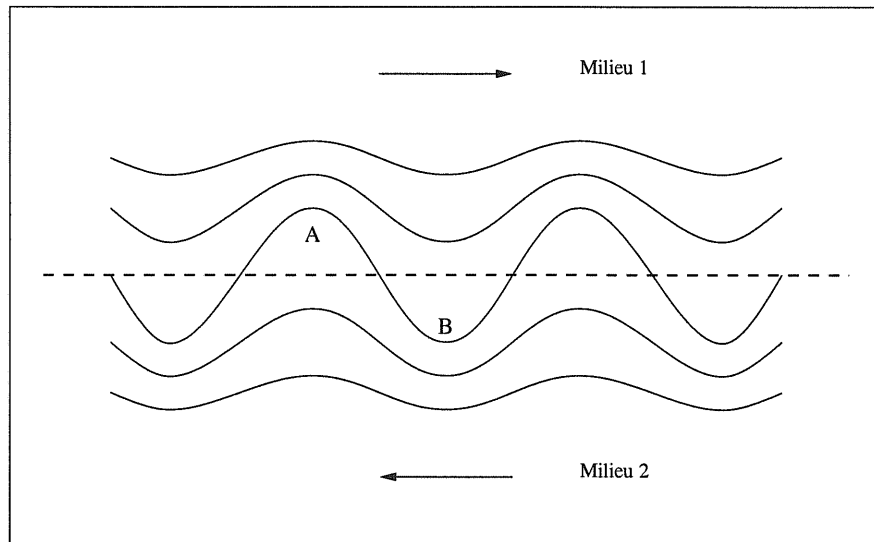


FIG. 1.1 – *Phase initiale*

L'instabilité de Kelvin-Helmholtz se produit lorsque deux fluides sont en écoulement de cisaillement aux vitesses $\vec{U}$ et $-\vec{U}$.

Si l'interface entre eux se déforme comme sur la figure 1.1, la relation de Bernoulli donne:

En A : $P_1 < P_2$, $V_1 > U$ et $V_2 < U$

En B : $P_1 > P_2$, $V_1 < U$ et $V_2 > U$

On assiste alors à un enroulement de la nappe tourbillonnaire. Dans cet écoulement bidimensionnel, la vorticité est un scalaire advect  :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \omega = 0$$

  l'instant initial, la vorticité est portée uniquement par la couche de mélange d'épaisseur δ :

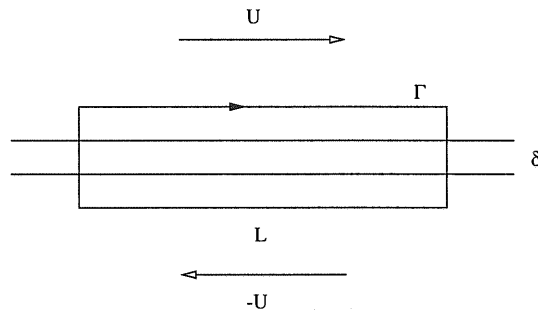


FIG. 1.2 – Circulation à l'interface

$$\Gamma = \int_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = -2UL = \omega \delta L$$

donc

$$\omega = \frac{-2U}{\delta}$$

La partie de la couche de séparation au voisinage de A se déplaçant à la vitesse $\frac{\vec{V}_1 + \vec{V}_2}{2}$, elle se dirige vers la droite. Au contraire, B va vers la gauche. On observe alors les rouleaux de Kelvin-Helmholtz:

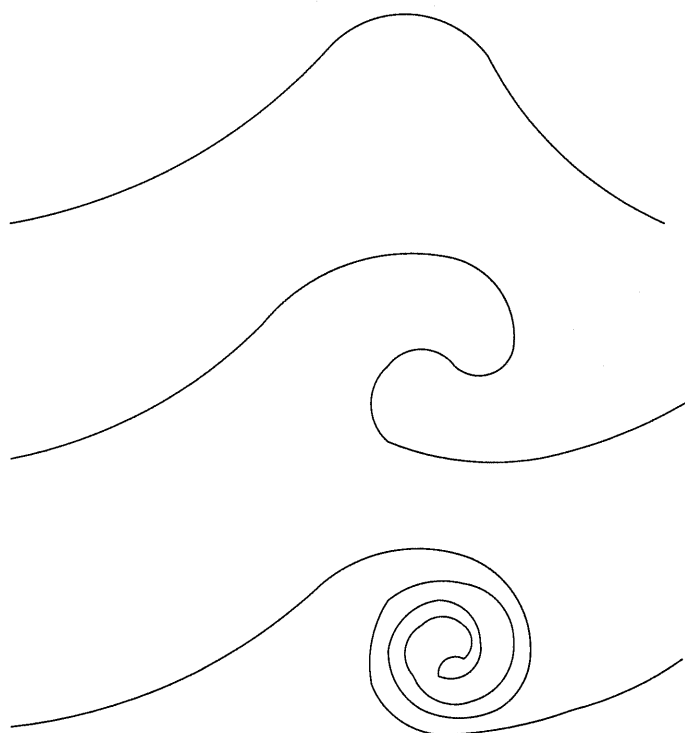


FIG. 1.3 – *Rouleaux de Kelvin-Helmholtz*

1.2 Ondes de gravité à une interface

On connaît déjà les ondes de gravité à la surface de la mer, par exemple, et on se rappelle de la relation de dispersion qui les caractérise, à savoir:

$$\omega^2 = gk$$

Ici, la situation est similaire. La seule différence réside dans le fait qu'on ne néglige pas la densité du fluide supérieur comme dans le cas de l'air. On montre dans l'annexe B que si l'on suppose $\rho_1 < \rho_2$, alors la relation de dispersion cherchée est:

$$\omega^2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} gk$$

On fait pour ce calcul l'hypothèse que les deux fluides sont inviscides, ce qui entraîne un non-amortissement des oscillations. Comme on l'a vu au cours de ce stage, la réalité est bien différente, et les ondes de gravité à l'interface s'amortissent assez rapidement.

Chapitre 2

Etude expérimentale

2.1 Le dispositif

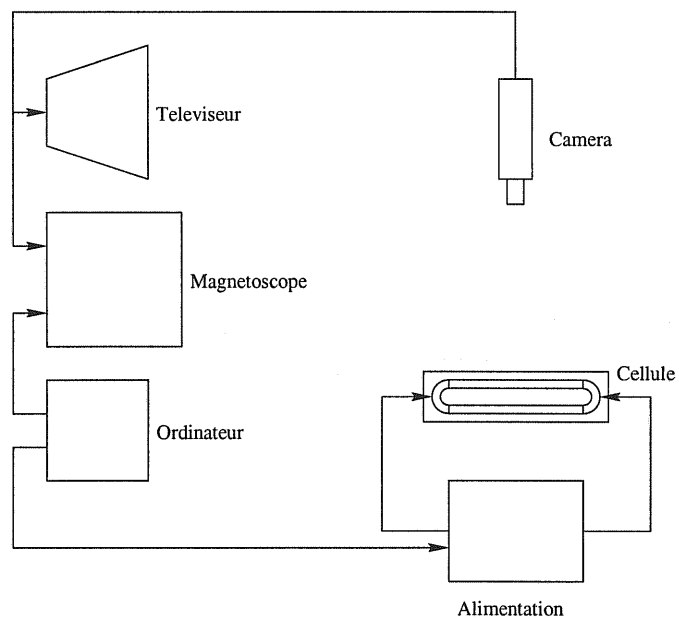


FIG. 2.1 – *Schéma d'ensemble*

2.1.1 Contraintes et choix expérimentaux

La cellule de Hele-Shaw

Au moins en ce qui concerne la réalisation expérimentale de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, on voudra assurer une bonne circulation du fluide à l'intérieur de notre cellule de Hele-Shaw. On n'oubliera pas qu'avant de devoir se rabattre sur des ambitions plus modestes, l'objectif de cette expérience était à l'origine de recréer les conditions de circulation de l'atmosphère, à savoir un empilement de couches de densités diverses, en rotation.

C'est pourquoi on a opté pour une cellule "biface". On disposera en fait deux cellules de Hele-Shaw en parallèle et on les reliera à leurs extrémités par deux demi-tubes, comme indiqué sur la figure 2.2.

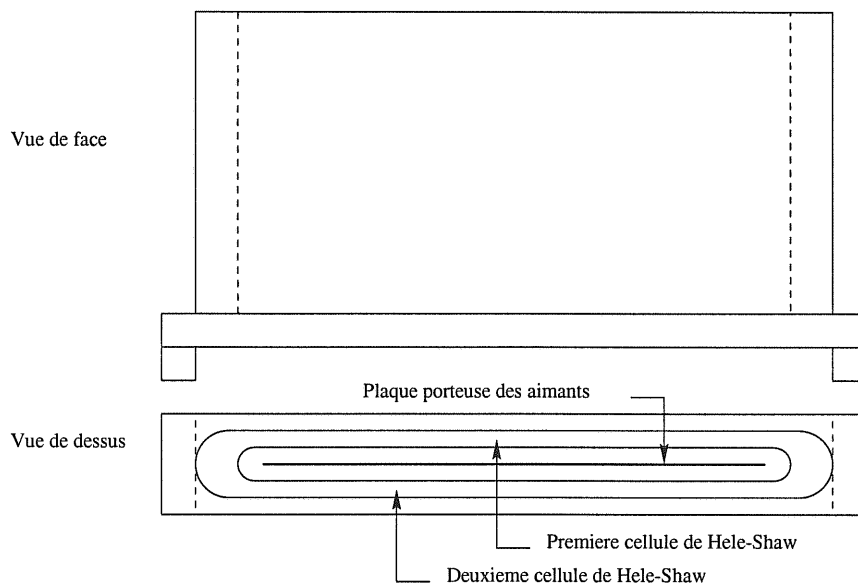


FIG. 2.2 – *Cellule expérimentale*

Les fluides et leur mise en mouvement

Les fluides utilisés tout au long des expériences réalisées au cours de ce stage sont de banales solutions de chlorure de sodium à des concentrations diverses et donc de densités différentes.

Afin d'avoir une interface bien nette, on injecte ces fluides par le bas, le plus lentement possible, en commençant par les plus légers. Lorsque la

cellule est remplie, on électrolyse alors les solutions, en les soumettant simultanément à un champ magnétique perpendiculaire au plan de la cellule. La mise en mouvement se fait alors tout simplement par l'intermédiaire de la force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ agissant sur les ions de la solution.

2.1.2 Réalisation pratique de la cellule

On s'est procuré quatre plaques en Altuglas de 1,5 x 320 x 150 qu'on a collées à l'aide de CAF sur un socle, également en Altuglas. Celui-ci est percé pour accueillir les électrodes réalisées en torsades métalliques. On a fermé les cellules par deux demi-tubes en plastique - genre tuyau d'arrosage - percés chacun d'un trou pour injecter les solutions. Entre les deux cellules, on a placé une plaque métallique portant les aimants. À plusieurs reprises, on a dû refaire au CAF l'étanchéité de l'ensemble, laquelle était menacée par l'usure de l'électrolyse ou encore la pression des solutions contre les parois.

2.2 Instabilité de Kelvin-Helmholtz

2.2.1 Des problèmes de traceurs...

Bien évidemment, il était nécessaire de visualiser, à l'aide de colorants, l'interface entre les différentes solutions salines utilisées dans une même expérience.

Dans cette optique, on a également choisi de peindre les faces internes de notre cellule. Ainsi, le meilleur contraste possible est réalisé avant même de régler celui de la caméra CCD. On a donc fait en parallèle le choix des traceurs et des couleurs des parois :

L'une d'entre elles a été peinte en noir, de façon à pouvoir repérer l'interface grâce à quelques gouttes de fluoresceïne en lumière noire. Cette option s'est révélée très décevante à notre grande surprise. En effet, à deux reprises au moins, la fluoresceïne a perturbé la densité de la solution dans laquelle elle avait été injectée au point de la faire remonter *par dessus* la première couche, pourtant censée être plus légère... La molécule de fluoresceïne étant assez lourde, on comprend mal cet effet. Lorsque ce genre de mésaventure ne se produisait pas, l'expérience ne donnait pas pour autant les résultats escomptés : amplitude de déformation très faible, amortissement rapide des ondes produites par une excitation mécanique...

Pour l'autre face, on a opté pour la couleur blanche, en combinaison avec des traceurs sombres.

On a commencé par utiliser des encres (noire, rouge et bleue). Ce sont les

deux dernières, et en particulier la bleue, qui ont donné les meilleurs résultats dans l'observation de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. La chose curieuse, c'est qu'il a semblé nécessaire de recourir à des doses importantes d'encre pour parvenir à nos fins. Une des explications possibles repose sur le fait que ces traceurs contiennent des ions qui viennent amplifier le phénomène quand ils sont présents en grandes quantités.

Par la suite, et en particulier dans l'observation des ondes de gravité, on a utilisé un colorant très puissant, le permanganate de potassium. Les avantages de ce dernier sont multiples, mais on peut citer par exemple le fait que, contrairement aux encres, sa nature est parfaitement connue. De plus, son pouvoir colorant est tel - quelques cristaux suffisent pour 500 *ml* de solution - que la quantité d'ions K^+ et MnO_4^- ajoutés est négligeable. Son seul inconvénient est de former un dépôt de MnO_2 particulièrement tenace quand on le soumet à un courant électrique important comme le nôtre (2 à 3 Ampères). Après de nombreuses tentatives à l'eau savonneuse, et même à l'acide nitrique dilué, la solution de nettoyage m'a été suggérée par un ami du magistère de Chimie : Pour se débarrasser de MnO_2 , il suffit de l'oxyder, par exemple en utilisant de l'eau oxygénée. Après essai, cette technique s'est révélée extrêmement efficace. Voilà qui devrait inciter à plus de contacts interdisciplinaires...

2.2.2 Observation du phénomène

Après de nombreuses tentatives infructueuses pour cause, nous l'avons vu, de fuites multiples et de traceurs mal adaptés, les conditions du succès ont finalement été réunies au bout d'une dizaine de jours de labeur. On peut voir ci dessous le résultat d'une expérience qui a fonctionné.

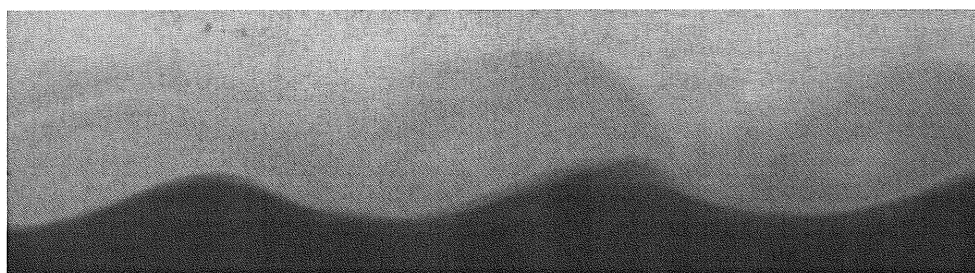


FIG. 2.3 – *Instabilité de Kelvin-Helmholtz*

L'étroitesse du passage entre les deux cellules de Hele-Shaw de notre

dispositif s'est particulièrement manifestée au cours de ces dernières expériences. Les rouleaux de Kelvin-Helmholtz qu'on voit sur cette image se déplacent avec le fluide et, arrivés à la fin d'une des faces, bloqués au "virage", ils s'amortissent alors même qu'à l'autre extrémité, un autre rouleau se forme...

2.3 Ondes de gravité

2.3.1 Modification du dispositif

On a voulu ensuite observer les oscillations de l'interface entre deux fluides après relâchement d'une contrainte sinusoïdale. En pratique, au lieu de provoquer un déplacement horizontal du fluide, on l'a mis en mouvement vertical, alternativement vers le haut et vers le bas.

Pour cela, on a disposé les aimants sur leur plaque en alternant les polarités et les électrodes ont été déplacées sur les tubes qui ferment la cellule. En fait, ceux-ci, à l'origine en matière plastique, étaient un peu petits et bloquaient la circulation. On a donc choisi de les remplacer par des demi-tubes métalliques qui ont par la suite servi d'électrodes.

En revanche, cela pose un autre problème, celui du traitement des déchets de l'électrolyse qui pourraient venir perturber notre expérience. On a résolu cette difficulté en plaçant, après remplissage de la cellule, deux barres en plastique permettant de contenir ces "indésirables"...

En ce qui concerne les solutions, on s'est aperçu que les meilleurs résultats étaient obtenus avec de fortes densités - typiquement 85 et 90 ml de sel complétés à 500 ml par de l'eau. On pense pouvoir expliquer cela par une plus grande inertie des solutions lourdes.

L'ensemble de la manœuvre est commandé par l'ordinateur, qui se charge du déclenchement et de la coupure du courant, ainsi que de l'acquisition vidéo.

2.3.2 Observation du phénomène

Avant d'observer les oscillations libres de l'interface, on peut faire passer un courant sans coupure et remarquer que, suivant la disposition des aimants, on peut obtenir des formes qui diffèrent d'une sinusoïde. On peut voir ici le résultat de ces expériences.



FIG. 2.4 – *Expérience 20*

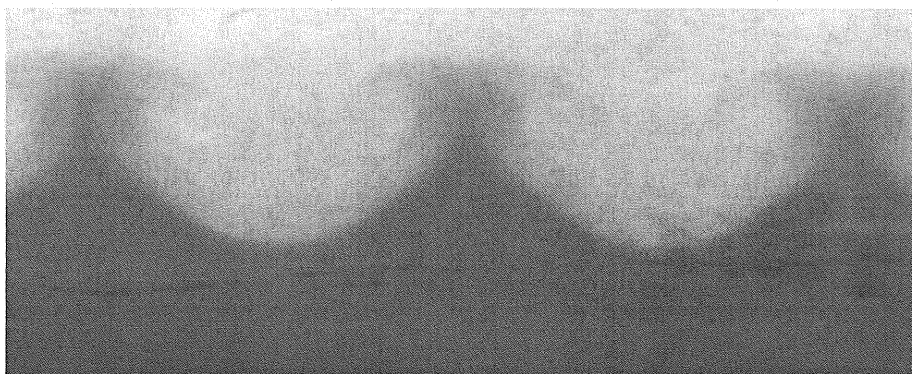


FIG. 2.5 – *Expérience 23*

On remarque en particulier, sur les deux dernières images, les retombées du fluide le plus dense. Celui-ci, après avoir été soulevé par la force électromagnétique, cède à la gravité et s'effondre en panaches rappelant un peu une éruption...

2.3.3 Relation de dispersion

Pour obtenir la relation de dispersion, on a fait varier la période spatiale Λ du réseau d'aimants et, à partir du relevé sur bande vidéo des coordonnées d'une crête et d'un creux successifs, on a tiré une interpolation des points expérimentaux par une courbe de la forme :

$$y = A \cos(\omega t) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

et mesuré la période temporelle des oscillations de l'interface.

Les résultats obtenus sont présentés ci-dessous. À partir de ces courbes de meilleure approximation, on peut déduire les pulsations des oscillations pour les différents nombres d'ondes utilisés. On s'attend à avoir une relation de dispersion s'écrivant :

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} g k}$$

et on trace par conséquent ω^2 en fonction de k , qui doit être linéaire.

On a par ailleurs pesé les solutions utilisées afin d'accéder à leurs densités. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous.

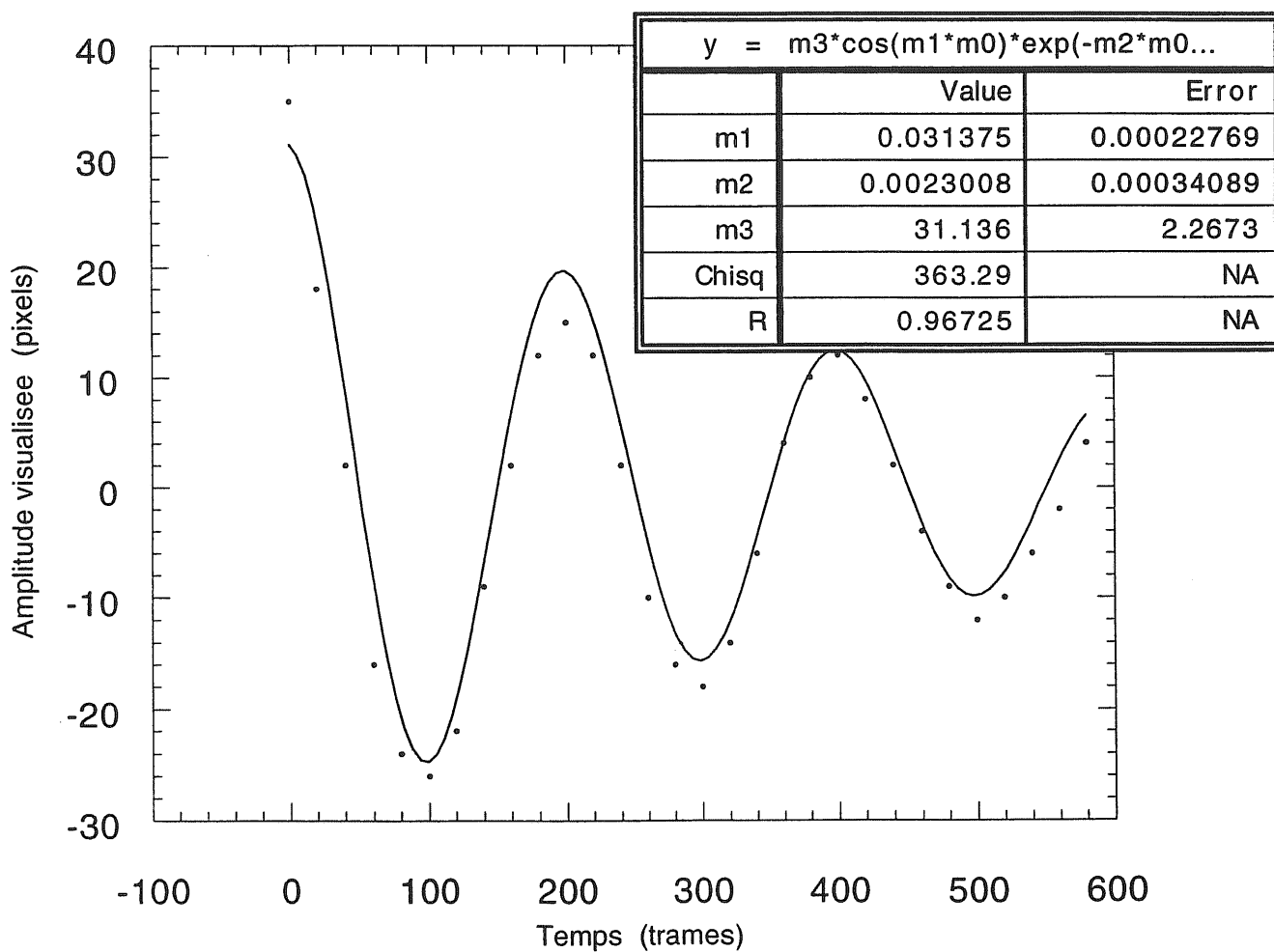
Volume de sel en <i>ml</i>	Masse de la solution en <i>g</i>	Densité en <i>g.cm</i> ⁻³
85	559,87	1,11974
90	561,57	1,12314

La pente de la droite attendue se calcule alors très simplement, et on obtient :

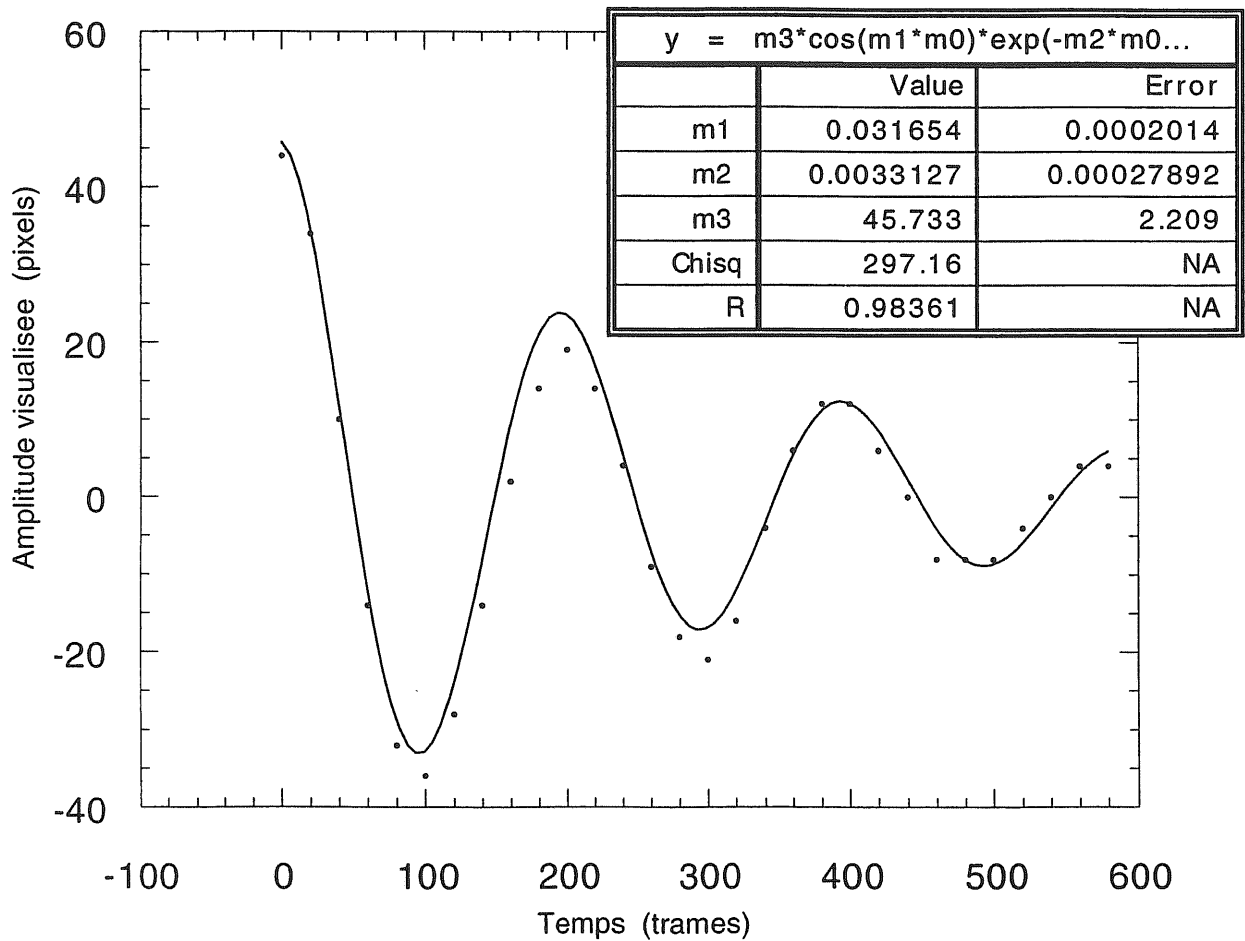
$$R = 9,34 \text{ rad}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{cm}$$

soit, *grosso modo*, la moitié de la valeur expérimentale. Cet écart important pourrait être très ennuyeux si on ne calculait pas les masses des solutions qui conviendraient pour obtenir une valeur de R comparable à l'expérience. Quand on fait ce calcul, on constate qu'il suffit d'un écart de moins de 2 *g* sur l'ensemble des deux solutions de 500 *ml* pour rétablir une valeur raisonnable de R . Étant donné qu'on a pesé des solutions préparées dans ce seul but, et non celles effectivement utilisées dans les expériences, un écart minime dans les différentes préparations suffirait à justifier un tel désaccord.

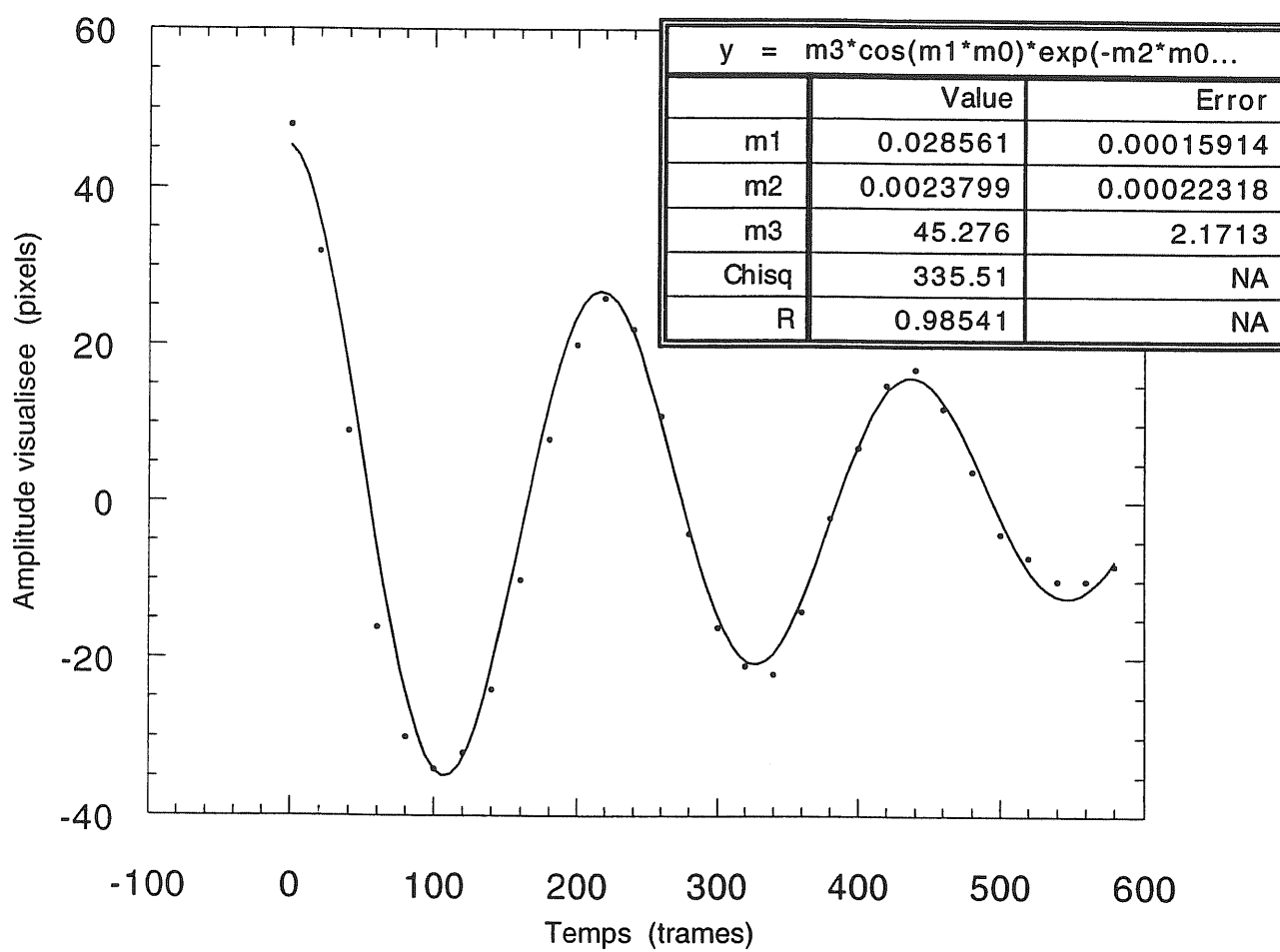
Oscillations de l'interface pour $\lambda = 6 \text{ cm}$



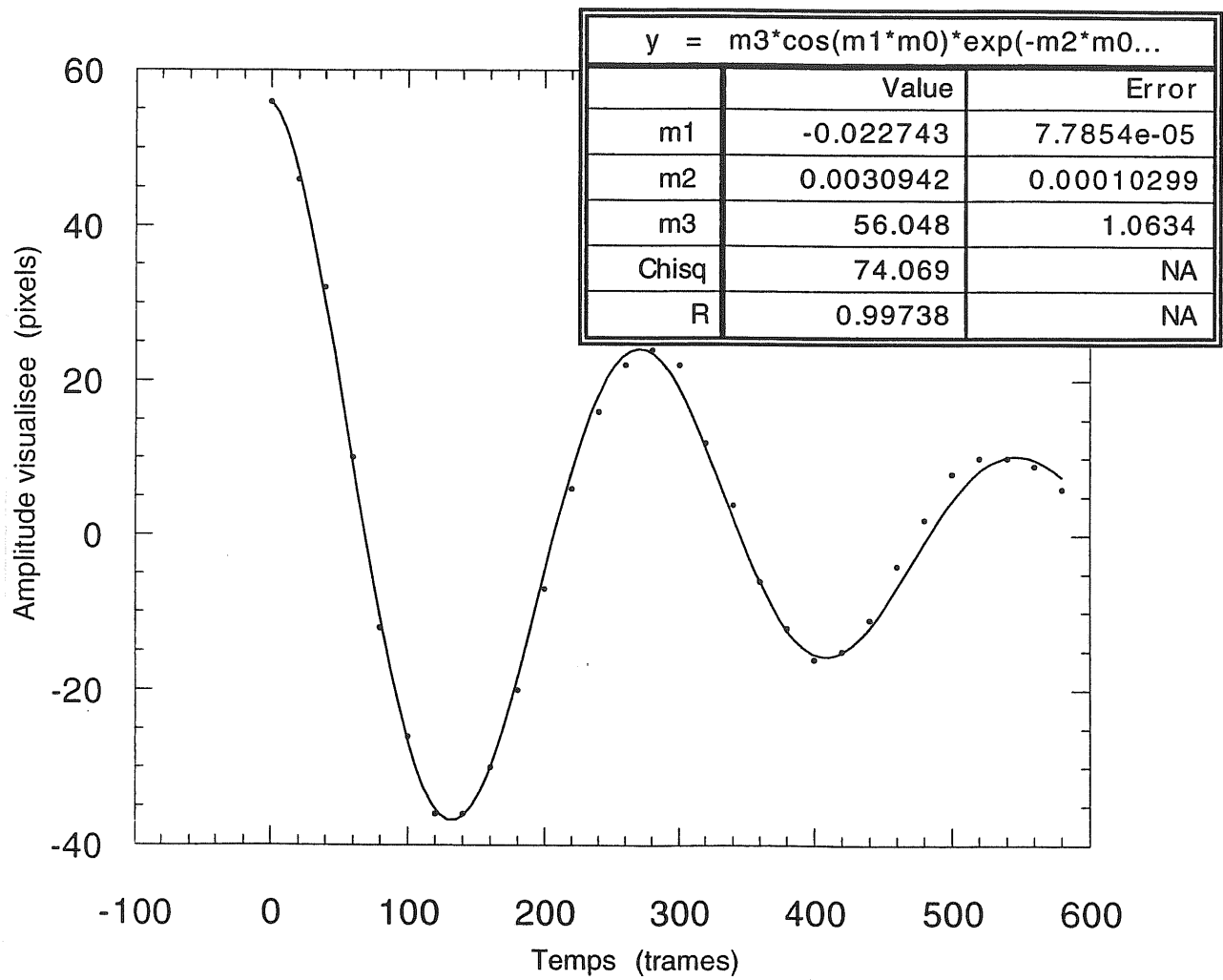
Oscillations de l'interface pour $\lambda = 6.5 \text{ cm}$



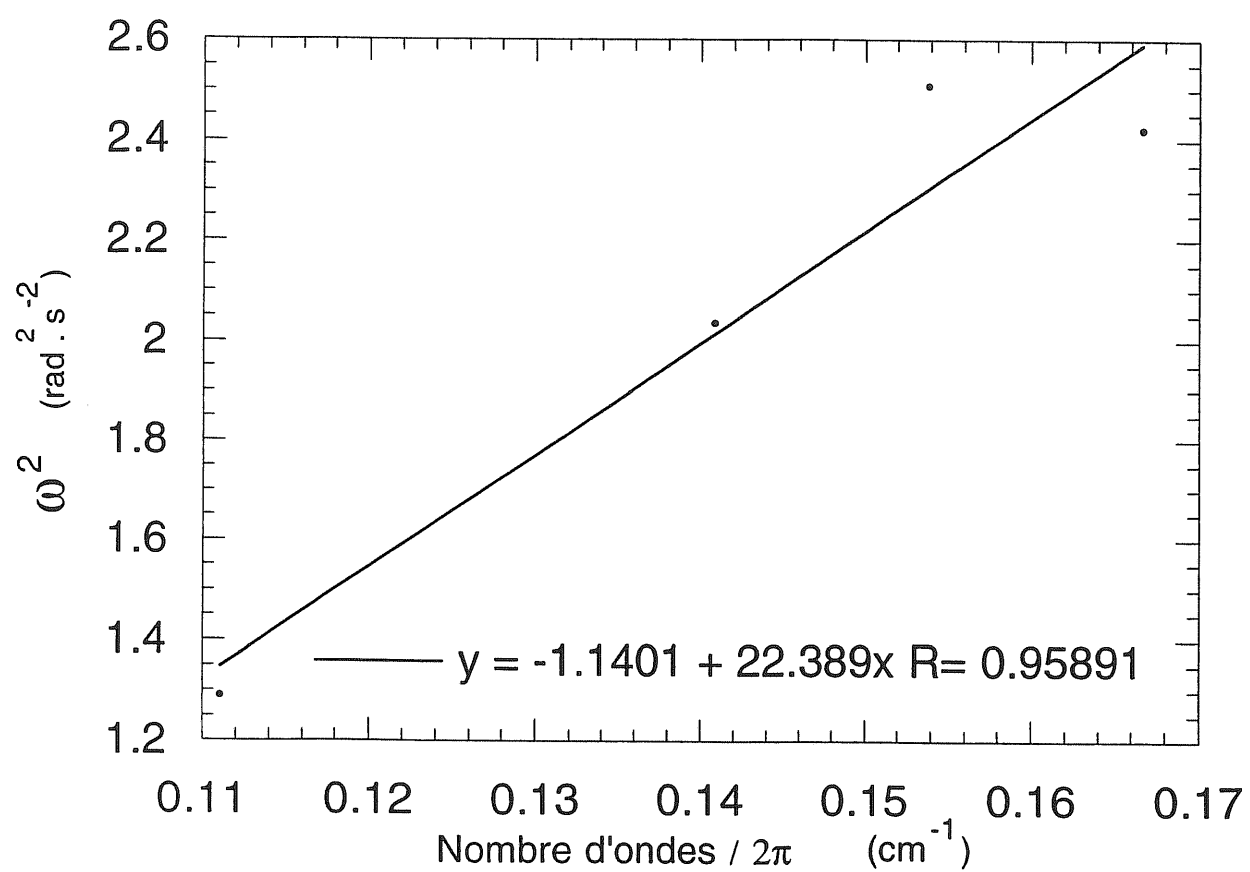
Oscillations de l'interface pour $\lambda = 7.1$ cm



Oscillations de l'interface pour lambda = 9 cm



Relation de dispersion



Conclusion

Malgré un certain nombre de déboires expérimentaux (mais que serait un stage expérimental sans ce genre d'aléas?), on a pu observer deux phénomènes particulièrement intéressants et, pour l'un d'eux, vérifier une relation théorique avec une erreur certes importante, mais indéniablement imputable à une très faible imprécision dans la régularité de préparation des solutions utilisées.

La conclusion qu'on pourrait tirer de ce stage, c'est qu'il n'est pas encore nécessaire, à ce niveau d'études, d'obtenir à tout prix un résultat, inédit ou pas, mais plutôt de comprendre les différents aspects de la physique expérimentale (conception, réalisation, modifications...), et je pense les avoir compris, grâce à ce stage.

Annexe A

Instabilité de Kelvin-Helmholtz

A.1 Hypothèses

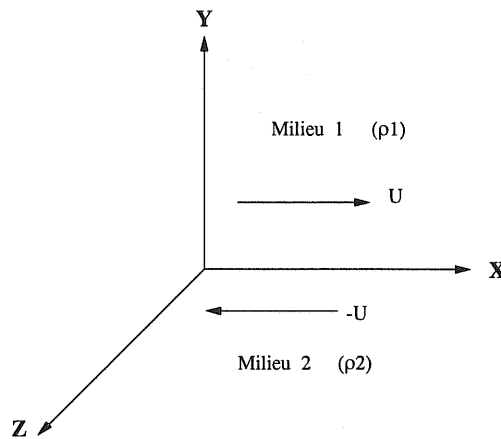


FIG. A.1 – Réalisation de l'instabilité

Soient deux fluides, de densités respectives ρ_1 et ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$), se déplaçant aux vitesses $\vec{v}_1 = \vec{u} = u\vec{e}_x$ et $\vec{v}_2 = -\vec{u}$. (On peut toujours se ramener à cette situation par un changement de référentiel galiléen.)

On suppose l'écoulement bidimensionnel et les viscosités des fluides négligeables. En revanche, on fera intervenir la gravité et la tension interfacielle.

L'équation de l'interface entre les deux fluides est notée $y = \xi(x, t)$ et on

supposera que celle-ci ne se déforme pas trop:

$$|\frac{\partial \xi}{\partial t}| \ll 1$$

Par rapport à l'équilibre, il existe des fluctuations des vitesses et des pressions:

$$\vec{v}_1 = \vec{u} + \vec{w}_1$$

$$\vec{v}_2 = -\vec{u} + \vec{w}_2$$

$$p_1 = P_0 - \rho_1 g y + \pi_1$$

$$p_2 = P_0 - \rho_2 g y + \pi_2$$

où P_0 est la pression à l'interface. Dans le fluide 1, on a l'équation du mouvement

$$\frac{\partial \vec{w}_1}{\partial t} + (\vec{w}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_1 = -\frac{\vec{\nabla} \pi_1}{\rho_1}$$

et celle de l'incompressibilité

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{w}_1 = 0$$

A.2 Linéarisation des équations; obtention de la relation de dispersion

L'invariance du problème en x et en t incite à décomposer π_1 sur les ondes planes du type:

$$\pi_1(x, y, t) = e^{i(kx - \omega t)} f(y)$$

L'équation d'incompressibilité implique alors que

$$-k^2 f(y) + f''(y) = 0$$

et, d'après les conditions aux limites,

$$f(y) = \pi_1 e^{-ky}$$

En reportant dans l'équation du mouvement:

$$w_{1y} = \frac{k \pi_1}{i \rho_1 (k u - \omega)}$$

On a la même équation dans le fluide 2, en changeant u en $-u$ et y en $-y$:

$$w_{2y} = \frac{k\pi_2}{i\rho_2(ku + \omega)}$$

Par ailleurs, on a une condition de raccord à l'interface:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{n} = \vec{v}_2 \cdot \vec{n} = \vec{v}_I \cdot \vec{n}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur normal à l'interface dirigé de 2 vers 1 et $\vec{v}_I$ est la vitesse de l'interface:

$$\vec{n} \simeq -\frac{\partial \xi}{\partial x} \vec{e}_x + \vec{e}_y = -ik\xi \vec{e}_x + \vec{e}_y$$

$$\vec{v}_I = \frac{\partial \xi}{\partial t} \vec{e}_y = -i\omega \xi \vec{e}_y$$

D'où

$$\pi_1 = -\frac{\rho_1}{k}(ku - \omega)^2 \xi$$

$$\pi_2 = \frac{\rho_2}{k}(ku + \omega)^2 \xi$$

Or, d'après la loi de Laplace:

$$p_2 - p_1 = \frac{\gamma}{R} \simeq -\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Donc, finalement, on obtient l'équation de dispersion:

$$\rho_2(ku + \omega)^2 + \rho_1(ku - \omega)^2 = \gamma k^3 + (\rho_2 - \rho_1)gk$$

A.3 Discussion de la relation de dispersion

On peut réécrire cette équation sous la forme:

$$\omega^2 + 2\omega kU \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} + (k^2 U^2 - k \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} g - k^3 \frac{\gamma}{\rho_2 + \rho_1}) = 0$$

qui admet des racines réelles tant que

$$\Delta(k) = \gamma k^2 - 4 \frac{\rho_2 \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} k U^2 + (\rho_2 - \rho_1)g > 0$$

Donc pour

$$U > U_0 = \sqrt{\frac{\rho_2 + \rho_1}{2(\rho_2 \rho_1)}} \sqrt{(\rho_2 - \rho_1)g\gamma}$$

il existe une bande de nombre d'ondes interdite.

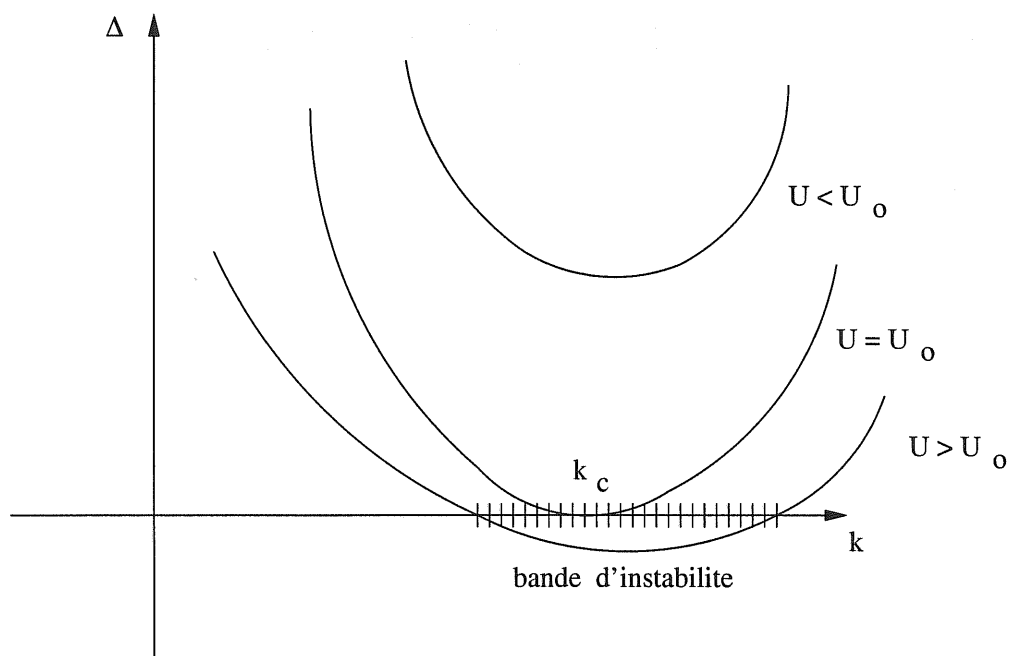


FIG. A.2 – *Bande interdite*

Annexe B

Ondes de gravité

B.1 Équations de départ

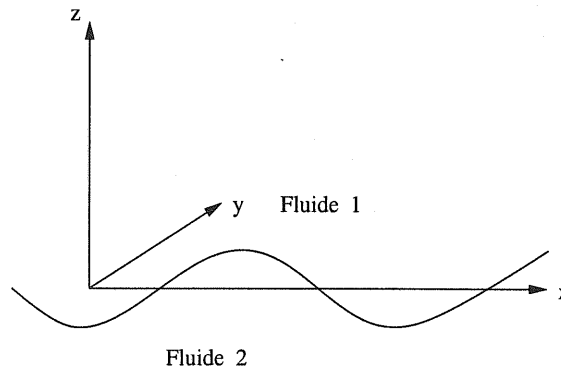


FIG. B.1 – *Ondes de gravité*

On se place à l'interface de deux fluides 1 et 2, avec $\rho_1 < \rho_2$, immiscibles et supposés sans viscosité. On note $z = \xi(x, t)$ l'équation de cette interface. Écrivons d'abord les équations de Navier-Stokes dans chaque fluide:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_1 &= -\frac{1}{\rho_1} \vec{\nabla} p_1 + \vec{g} \\ \frac{\partial \vec{v}_2}{\partial t} + (\vec{v}_2 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_2 &= -\frac{1}{\rho_2} \vec{\nabla} p_2 + \vec{g}\end{aligned}$$

Puis les équations d'incompressibilité:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_2 = 0$$

B.2 Linéarisation des équations; obtention de la relation de dispersion

En décomposant $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, p_1 et p_2 sur les ondes planes:

$$\vec{v}_1 = \vec{w}_1(z)e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{w}_2(z)e^{i(kx-\omega t)}$$

$$p_1 = P_0 - \rho_1 g z + \pi_1(z)e^{i(kx-\omega t)}$$

$$p_2 = P_0 - \rho_2 g z + \pi_2(z)e^{i(kx-\omega t)}$$

Et en linéarisant les équations de départ:

$$i\omega w_{1x} = \frac{ik\pi_1}{\rho_1}$$

$$i\omega w_{2x} = \frac{ik\pi_2}{\rho_2}$$

$$i\omega w_{1z} = \frac{\pi'_1}{\rho_1}$$

$$i\omega w_{2z} = \frac{\pi'_2}{\rho_2}$$

$$ikw_{1x} + w'_{1z} = 0$$

$$ikw_{2x} + w'_{2z} = 0$$

On déduit que toutes ces grandeurs vérifient l'équation suivante:

$$y'' - k^2 y = 0$$

En particulier:

$$w_{1z} = Ae^{-kz}$$

$$w_{2z} = Be^{+kz}$$

Où l'on a pris en compte les conditions aux limites en $z = \pm\infty$

En écrivant que les particules de l'interface la suivent:

$$v_{1z}(\xi) = v_{2z}(\xi) \simeq \frac{\partial \xi}{\partial t} = -i\omega \xi$$

on a

$$Ae^{-k\xi}e^{i(kx-\omega t)} = Be^{+k\xi}e^{i(kx-\omega t)} = -i\omega\xi$$

D'autre part, on néglige la tension superficielle et on a donc à l'interface:

$$-\rho_1 g\xi + \pi_1(\xi)e^{i(kx-\omega t)} = -\rho_2 g\xi + \pi_2(\xi)e^{i(kx-\omega t)}$$

Or

$$\pi_1(z) = \frac{\rho_1 \omega}{ik} A e^{-kz}$$

$$\pi_2(z) = -\frac{\rho_2 \omega}{ik} B e^{kz}$$

donc la continuité des pressions s'écrit:

$$(\rho_1 - \rho_2)g\xi = e^{i(kx-\omega t)} \frac{\omega}{ik} (\rho_1 A e^{-k\xi} + \rho_2 B e^{k\xi})$$

D'où, en comparant avec la continuité des vitesses:

$$\omega^2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} gk$$