

ETUDE DE LA REPONSE D'UN INTERFEROMETRE A UN MILIEU FRACTAL

François Levrier

Edith Falgarone
DEMIRM
Ecole Normale Supérieure

François Viallefond
DEMIRM
Observatoire de Paris

DEA Astrophysique et Techniques Spatiales
Universités Paris VII et Paris XI

Avril-Juin 1999

Table des matières

1 Milieu interstellaire et fractals	4
1.1 Le milieu interstellaire	4
1.1.1 Introduction	4
1.1.2 Les moyens d'étude	4
1.1.3 Le "key-project" de l'IRAM	4
1.1.4 Une structure "granulaire"	5
1.1.5 Conclusion : un milieu fractal	6
1.2 Ensembles fractals	6
1.2.1 Essai de définition	6
1.2.2 La dimension fractale	7
1.2.3 Relation périmètre-surface	9
1.2.4 Modèles de nuages fractals	12
2 Réponse d'un interféromètre	14
2.1 L'observation interférométrique	14
2.1.1 La propagation de l'information	14
2.1.2 La fonction de cohérence spatiale	15
2.1.3 Synthèse d'ouverture et transformées de Fourier	15
2.1.4 Les caractéristiques et les limitations d'un interféromètre	17
2.2 Le simulateur interférométrique	17
2.2.1 ALMA, le futur interféromètre millimétrique	17
2.2.2 Le fonctionnement du simulateur	18
2.2.3 Ajout de bruit	20
2.3 Résultats des simulations	21
2.3.1 Mise en place des modèles	21
2.3.2 Cas d'un modèle isolé	23
2.3.3 Etude succincte de l'ensemble des modèles	28
2.4 Conclusion	30

Remerciements

Je tiens à remercier Edith Falgarone et François Viallefond d'avoir dirigé ce stage, conjointement et dans la bonne humeur. Je les remercie également pour les nombreux et précieux conseils qu'ils m'ont prodigués à tous les stades de mon travail. Je voudrais enfin leur exprimer ma gratitude d'avoir su accroître mon envie de continuer dans la recherche en astrophysique. Mes remerciements s'adressent aussi à Françoise Combes, dont nous avons emprunté les modèles fractals, à Alain Coulais, co-auteur du simulateur interférométrique utilisé ici, et plus généralement à tous les chercheurs et étudiants que j'ai eu le plaisir de rencontrer durant mon séjour à l'Observatoire de Paris et au Laboratoire de Radio Astronomie de l'ENS.

Chapitre 1

Milieu interstellaire et fractals

1.1 Le milieu interstellaire

1.1.1 Introduction

L'étude du milieu interstellaire (MIS), et en particulier des nuages d'hydrogène moléculaire, présente un intérêt considérable en astrophysique. Avec les étoiles, le milieu interstellaire est en effet le second grand protagoniste du cycle du gaz dans l'Univers. Précurseur des populations d'étoiles qui se forment en son sein, il subit également les sautes d'humeur de ces dernières et accueille les restes de supernovae. Mieux connaître les processus mis en jeu dans la physique du milieu interstellaire devrait permettre de déterminer de nombreux paramètres astrophysiques, telle la fonction de masse initiale des étoiles (IMF).

1.1.2 Les moyens d'étude

L'hydrogène est l'élément le plus abondant dans l'Univers, et, sous sa forme moléculaire, il est le constituant principal des nuages interstellaires dans lesquels se forment les étoiles. Malheureusement, la molécule H_2 ne possède pas de moment dipolaire permanent. Pour les astronomes, elle est presque invisible, et il faut se fier à l'observation de molécules moins abondantes, telles que le monoxyde de carbone, dont on observe les transitions de moment dipolaire total J . Un exemple est donné dans la figure (1.1), représentant deux observations faites dans le cadre du "key-project" [6] de l'IRAM, dont on parlera plus en détail dans le paragraphe suivant. La région étudiée se situe dans Polaris et la transition en question est $J : 2 \rightarrow 1$.

1.1.3 Le "key-project" de l'IRAM

La formation d'étoiles à partir de nuages moléculaires suppose la dissipation préalable de tout support de la matière face à l'autogravité. Essentiellement non-thermique, ce support est d'origine cinétique (mouvements d'ensemble à l'intérieur des nuages) et magnétique. Ainsi, des phénomènes de turbulence magnétohydrodynamique pourraient expliquer la stabilité de ces nuages. Il n'est donc pas étonnant de constater que les observations de "noyaux" denses protostellaires, dont la taille est de l'ordre du dixième de parsec, révèlent des supports non-thermiques bien plus faibles que pour

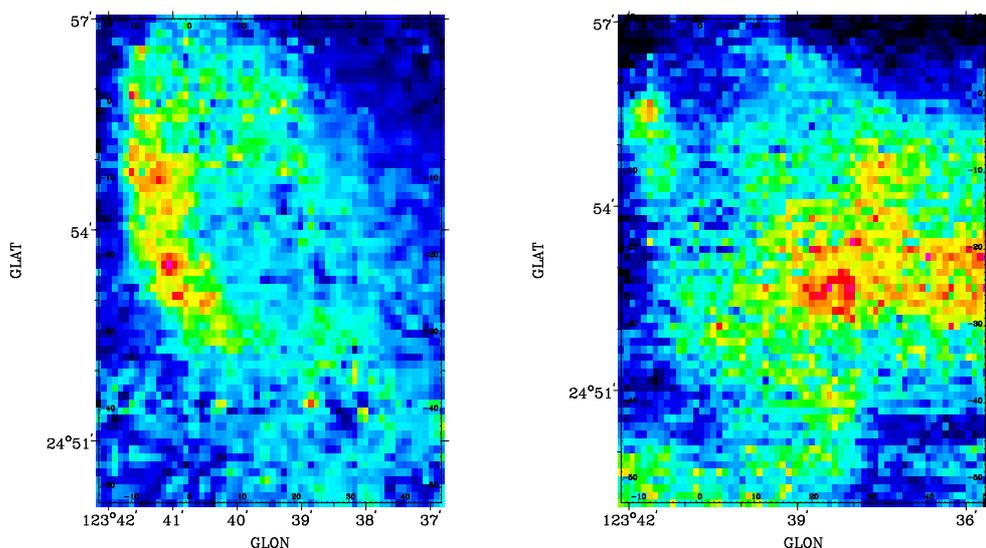


FIG. 1.1: Emission intégrée extraite d’une observation de Polaris, en ^{13}CO (à gauche) et ^{12}CO (à droite), effectuée au titre du “key-project” [6].

les régions plus diluées [14]. Ces noyaux, eux-mêmes composés de structures plus petites, de l’ordre de 0.01 pc, font souvent partie d’ensembles filamentaires étendus. L’objet du “key-project” était de cartographier l’environnement de tels noyaux denses encore dépourvus d’étoile, afin de mieux comprendre les processus mis en jeu dans la dissipation du support non-thermique des nuages moléculaires, au sein des zones de transition entre le milieu ambiant et les noyaux protostellaires.

En ce qui concerne le travail présenté ici, faute d’avoir eu le temps d’approfondir le sujet, l’intérêt du “key-project” se borne à réaffirmer le caractère “fractal”, même à très petite échelle, des nuages moléculaires.

1.1.4 Une structure “granulaire”

Comme nous venons de l’évoquer, les observations ont montré que chaque gain en résolution se traduisait par l’apparition de structures sous-jacentes, et ceci jusqu’aux limites actuellement accessibles, de l’ordre de 0.5 seconde d’arc, atteintes grâce à l’optique adaptative aux alentours de 2 microns de longueur d’onde. On distingue, à chaque échelle, des régions denses de formes variées au sein d’un milieu plus dilué. A l’origine, cette propriété de granularité (“clumpiness”) a été avancée pour expliquer un certain nombre d’observations.

La similarité entre les raies en ^{12}CO et ^{13}CO alors que celles-ci sont intrinsèquement très différentes en terme de profondeur optique suggère des facteurs de remplissage très faibles du milieu.

Par ailleurs, la coexistence dans de grands volumes d’espace de plusieurs régions de photodissociation (PDR) correspondant à une seule source de rayonnement UV ionisant ne semble pouvoir s’expliquer que par une propriété granulaire du milieu dans lequel elles se trouvent, le contraste de densité entre les nuages et les régions internuages devant permettre une pénétration suffisante des photons énergétiques.

Enfin, les dispersions de vitesse observées à faible résolution, fortement suprathermiques, entraîneraient une dissipation rapide de l’énergie par les mouvements internes

dans le cas d'un milieu homogène. A l'opposé, si ces systèmes sont en fait composés de nuages plus petits ayant des dispersions de vitesses intrinsèques faibles mais des mouvements chaotiques à l'intérieur du nuage, il est possible d'expliquer les largeurs de raies observées sans faire appel à des hypothèses supplémentaires (de type champ magnétique) pour assurer la stabilité du système. La gaussianité prononcée de ces raies suggère de plus, dans cette hypothèse, qu'un nuage contient un très grand nombre de sous unités, ce qui est effectivement directement observé sur des nuages relativement proches.

1.1.5 Conclusion : un milieu fractal

L'image qui se dégage des études effectuées sur les nuages moléculaires interstellaires est donc celle d'un milieu fortement hétérogène, dans lequel on observe du signal à chaque échelle de résolution, les structures s'emboîtant les unes dans les autres sur près de sept ordres de grandeurs, de la centaine d'unités astronomiques au kiloparsec. Tout naturellement, il a été proposé d'appliquer des modèles fractals pour décrire le milieu interstellaire, voire pour expliquer le spectre de masse des nuages qui le composent [3]. Dans ce travail, notre objectif sera de voir dans quelle mesure une observation menée avec un instrument interférométrique permet de restituer les caractéristiques d'une telle structure fractale. Avant d'aller plus loin il est donc nécessaire de se familiariser avec quelques concepts liés aux ensembles fractals.

1.2 Ensembles fractals

Depuis son introduction par le mathématicien français Benoît Mandelbrot [10], la notion d'ensemble fractal a connu de nombreux succès dans des domaines très variés, de la longueur des côtes britanniques à la statistique des erreurs dans les messages téléphoniques, en passant par les variations des prix et des salaires. C'est donc presque tout naturellement qu'elle a également trouvé sa place en astrophysique, comme nous allons le voir. Mais pour l'instant, tâchons de définir au mieux ce qu'est un fractal.

1.2.1 Essai de définition

De nombreux ouvrages traitent de géométrie et d'ensembles fractals, et il est frappant de voir que ces notions peuvent être abordées de manières très diverses. Si elles sont généralement illustrées par des exemples bien concrets, il est naturel de commencer par donner une définition rigoureuse, mathématiquement, d'un ensemble fractal. Le fondateur de la discipline, Benoît Mandelbrot, en propose d'ailleurs une dans son célèbre ouvrage *The Fractal Geometry of Nature* [11] :

Un fractal est un ensemble dont la dimension de Hausdorff-Besicovitch est strictement supérieure à la dimension topologique.

Cette définition, pour utile qu'elle soit, présente deux inconvénients. D'une part elle est peu intuitive pour le profane, et d'autre part elle exclut certains cas particuliers d'ensembles "indéniablement" fractals. Pour une définition plus rigoureuse et une étude plus exhaustive mais plus ardue, nous recommandons l'ouvrage de Falconer

[5]. En ce qui nous concerne, nous nous contenterons de la définition précédente ainsi que d'une "simplification" proposée par Mandelbrot lui-même :

Un fractal est un ensemble de points composé de parties qui sont, d'une certaine manière, "similaires" à l'ensemble complet.

On comprend beaucoup mieux pourquoi ces notions semblent s'appliquer au milieu interstellaire : nous venons justement de voir que celui-ci présentait des structures similaires à (presque) toutes les échelles. La façon dont un ensemble fractal est ainsi autosimilaire va alors permettre de le caractériser par un nombre unique¹, la dimension fractale D . Le terme "fractal" découle du fait que D n'est pas nécessairement un entier mais peut être un nombre fractionnaire.

1.2.2 La dimension fractale

La dimension fractale est en fait la valeur commune de deux dimensions que nous allons étudier maintenant : la dimension de Hausdorff-Besicovitch et la dimension de similarité².

La dimension de Hausdorff-Besicovitch

Considérons une courbe plongée dans l'espace euclidien à trois dimensions. Comme il est suggéré sur la figure (1.2), nous pouvons mesurer sa taille en la recouvrant par un nombre $N(\delta)$ de segments de taille δ , de sorte que la longueur de la courbe est donnée par

$$L = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta. \quad (1.1)$$

De même, l'aire d'une surface est vue comme limite d'un recouvrement par des carrés,

$$A = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta^2. \quad (1.2)$$

De façon à introduire simplement la dimension de Hausdorff, il est utile de remarquer que dans les cas précédents, la dimension D (égale à 1 ou 2) de l'ensemble de points considéré constitue un seuil :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > D \\ \infty & \text{si } \alpha < D \end{cases} \quad (1.3)$$

C'est une relation de ce type qui permet de caractériser les ensembles fractals. Recouvrant un tel ensemble \mathcal{S} par $N(\delta)$ "fonctions test" de la forme $h_\alpha(\delta) = \gamma(\alpha)\delta^\alpha$, où $\gamma(\alpha)$ est un facteur géométrique, on a le comportement suivant en fonction de α :

$$M_\alpha = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)h_\alpha(\delta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > D \\ \infty & \text{si } \alpha < D \end{cases} \quad (1.4)$$

¹Il faut cependant remarquer que certains ensembles particuliers possèdent des dimensions fractales différentes suivant la plage d'échelles considérée. De tels ensembles sont dits "multifractals".

²La dimension topologique de la première définition est la dimension classique, toujours entière, égale à 1, 2, ou 3 dans notre espace...

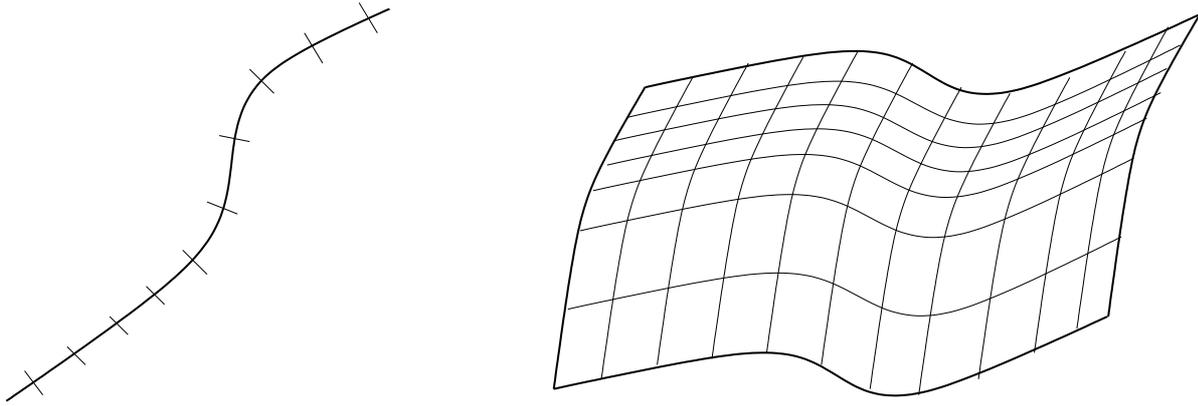


FIG. 1.2: Illustration, à une et deux dimensions, de la méthode de recouvrement à la base de la définition de la dimension de Hausdorff-Besicovitch

Ce qui définit D , dimension de Hausdorff de l'ensemble \mathcal{S} , comme dimension critique de la mesure M_α .

La dimension de similarité

Si la dimension de Hausdorff est peut-être la plus “correcte” des dimensions fractales, il est toutefois bon de s'arrêter un instant sur une dimension plus parlante eu égard à la deuxième définition que nous avons donnée des ensembles fractals, à savoir la dimension de similarité.

Considérons donc une droite \mathcal{S} plongée dans l'espace à trois dimensions. Il est clair que cet ensemble de points est invariant sous l'action d'une translation le long de \mathcal{S} ou d'un changement d'échelle. On dit que \mathcal{S} est autosimilaire. Bien entendu, il en va de même si \mathcal{S} désigne un plan ou l'espace entier.

Ces propriétés de symétrie, très fortes, ne peuvent subsister si \mathcal{S} est borné. Prenons cependant l'exemple d'un segment. Le résultat d'une contraction par un facteur $r < 1$ est un segment $r(\mathcal{S})$ plus petit. On note alors N le nombre de segments $r(\mathcal{S})$ nécessaires pour recouvrir \mathcal{S} . Bien entendu, nous avons, dans ce cas particulier, $r(N) = 1/N$.

Pour un fractal, une relation semblable fait intervenir la dimension de similarité, D :

$$r(N) = \left(\frac{1}{N}\right)^{1/D} \quad (1.5)$$

Cette relation, comme (1.4), peut être vue comme une définition³ de D . Pour les ensembles fractals “habituels”, les dimensions de Hausdorff-Besicovitch et de similarité sont égales, et l'on parle simplement de “dimension fractale”, sans préciser.

³On vérifie que $D = 2$ dans le cas d'une partie rectangulaire d'un plan, et $D = 3$ dans le cas d'un pavé rectangulaire.

1.2.3 Relation périmètre-surface

Le principe de la méthode

Dans notre travail, nous voudrions caractériser la dégradation des images une fois le filtre interférométrique appliqué. Pour cela, il est clair que nous devons trouver une méthode simple de calcul de la dimension fractale d'un nuage moléculaire. Nous avons choisi une des méthodes les plus courantes, basée sur une relation entre le périmètre et l'aire des nuages.

Plus précisément, pour toutes les figures géométriques "régulières" à deux dimensions, le rapport ρ entre le périmètre et la racine carrée de l'aire intérieure est constant au sein d'une même classe de similitude :

$$\rho = \frac{P}{A^{1/2}}. \quad (1.6)$$

Par exemple, $\rho = 2\sqrt{\pi}$ pour les cercles. Quand on passe à des objets moins simples, c'est-à-dire lorsque l'on considère des "îles fractales" similaires mais de tailles différentes, une relation semblable fait intervenir la dimension fractale D :

$$\rho_D = \frac{P^{1/D}}{A^{1/2}} = \text{cte.} \quad (1.7)$$

Pour illustrer cette idée, on peut imaginer un "archipel" d'îles toutes similaires mais de tailles diverses. La compilation des différents périmètres et surfaces des îles permet de déterminer la dimension fractale des côtes (voir figure (1.3)).

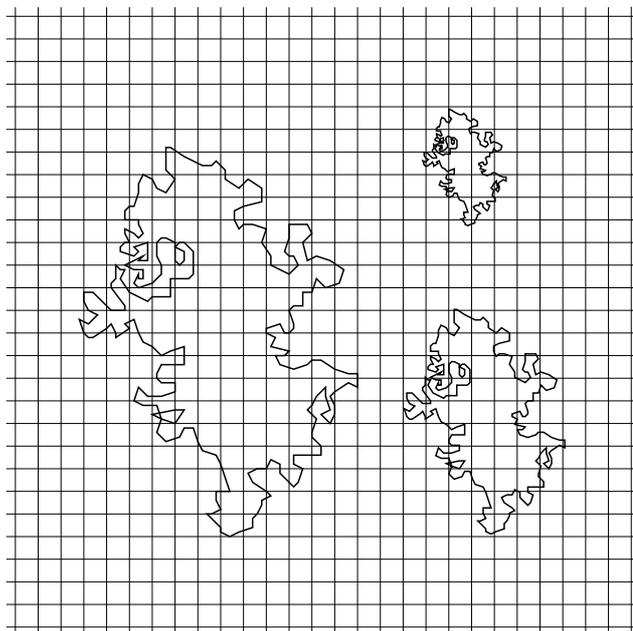


FIG. 1.3: Une petite partie d'un "archipel fractal"

La dérivation de cette relation est donnée dans [8]. Succinctement, si nous prenons deux îles similaires, mais de tailles différentes, dont nous mesurons les aires et

périmètres à l'aide de règles dépendant de l'aire de l'île (laquelle est mesurée avec une règle fixe δ) :

$$\delta^* = \lambda \sqrt{A(\delta)}, \quad (1.8)$$

λ étant un nombre petit arbitraire, on peut approcher le périmètre de l'île par celui d'un polygone à N_λ côtés, $L(\delta^*) = N_\lambda \delta^*$. Le point central du raisonnement est que si les îles sont similaires, alors les polygones le sont également et le nombre de côtés, N_λ , est indépendant de la taille de l'île. Or d'après l'équation (1.4), on a

$$L(\delta) = N(\delta)\delta = L(\delta^*) \left(\frac{\delta}{\delta^*} \right)^{1-D}, \quad (1.9)$$

donc, en remplaçant δ^* par son expression (1.8), on obtient une relation entre le périmètre et l'aire,

$$L(\delta) = N_\lambda \lambda^D \delta^{1-D} \sqrt{A(\delta)}^D, \quad (1.10)$$

ce qui peut s'écrire comme annoncé plus haut :

$$\rho_D(\delta) = \frac{L(\delta)^{1/D}}{A(\delta)^{1/2}} = \text{cte}(\delta). \quad (1.11)$$

On note que ρ_D dépend de la règle δ choisie au départ. Il conviendra donc de faire en sorte que celle-ci puisse mesurer correctement toutes les îles, y compris les plus petites. Dans notre cas, il s'agira de la taille d'un pixel et nous sommes donc à l'abri.

Algorithme

L'utilisation de la relation périmètre-surface pour déterminer une dimension fractale sur des images de nuages moléculaires interstellaires peut prêter à caution. En effet, comme nous l'avons vu, cette relation se base sur la similarité parfaite des "îles". Or ce n'est pas un cas aussi idéal qu'on rencontre dans le milieu interstellaire, car les nuages présentent les formes les plus variées, des filaments aux granules presque parfaitement sphériques. Ceci étant, cette méthode est couramment utilisée, et nous allons voir qu'elle donne de bons résultats. L'algorithme précis que nous avons implémenté est décrit dans [20] et nous y renvoyons le lecteur pour plus de détails.

L'idée, toute simple, est de seuiller une image, d'isoler les composantes connexes résultant de ce seuillage et de mesurer leurs périmètres et surfaces. Il est important de remarquer qu'on ne considère comme connexes que des pixels ayant un côté entier en commun, et non simplement un sommet.

Les raffinements sont multiples : Tout d'abord, l'algorithme élimine les régions comportant moins d'un certain nombre⁴ de pixels, car les erreurs d'estimation des contours sont d'autant plus grandes que l'aire incluse est petite. Deuxièmement, les régions coupant le bord de l'image sont écartées, car leur comportement extérieur est inconnu. Enfin, les périmètres et surfaces sont corrigés de facteurs géométriques illustrés sur la figure (1.4).

⁴Pour une plus grande flexibilité, ce nombre est entré par l'utilisateur.

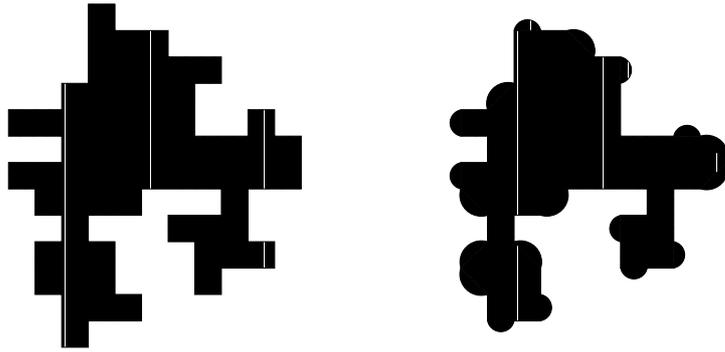


FIG. 1.4: Exemple de correction de “smoothness”

Pour obtenir un nombre suffisant de couples (P, A) , nous avons combiné les résultats issus de tous les seuillages, en laissant à l'utilisateur le choix d'imposer un nombre d'itérations ou bien de laisser le programme s'en charger. Pour déterminer la dimension fractale D , on effectue alors un ajustement des données par une loi puissance de la forme $P = \rho A^{D/2}$.

Un exemple : Le tapis de Sierpinski

Pour tester notre programme sur un exemple de dimension fractale connue, nous avons utilisé un tapis de Sierpinski. Cet ensemble fractal, dont la construction est donnée sur la figure (1.5), possède clairement une dimension de similarité D_0 égale à

$$D_0 = \frac{\ln 8}{\ln 3} \simeq 1.89279. \quad (1.12)$$

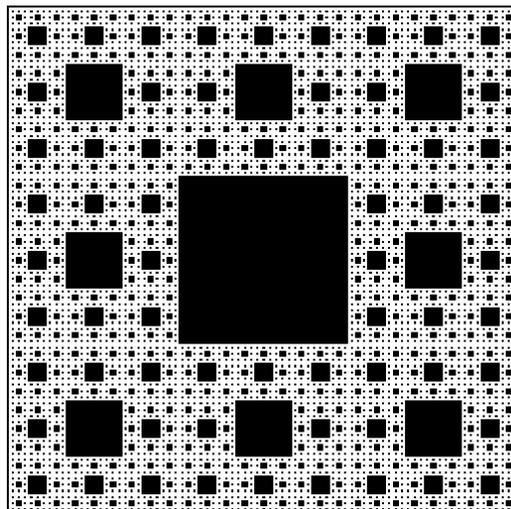


FIG. 1.5: Le “Tapis de Sierpinski”

Notre programme donne $D \simeq 1.84983$. On voit que le résultat obtenu est très proche de la valeur théorique :

$$\frac{|D - D_0|}{D_0} \simeq 2.27 \% \quad (1.13)$$

Nous pouvons donc affirmer que notre programme fonctionne de manière excellente et l'utiliser sans crainte par la suite. Toutes les erreurs ou imprécisions seront dues au caractère non idéal des images traitées, comme cela a déjà été dit précédemment.

1.2.4 Modèles de nuages fractals

Notre idée première, dans ce travail en collaboration avec Edith Falgarone, était de prendre les images du “key-project” (telles celles de la figure (1.1)) comme modèles de nuages. Malheureusement, la dynamique de ces images est trop faible pour les rendre véritablement utiles en tant que modèles de départ. Nous avons donc fait appel à Françoise Combes, dont les modèles de nuages fractals, présentés dans [13], nous ont permis d'obtenir des images “réalistes” ayant une grande dynamique.

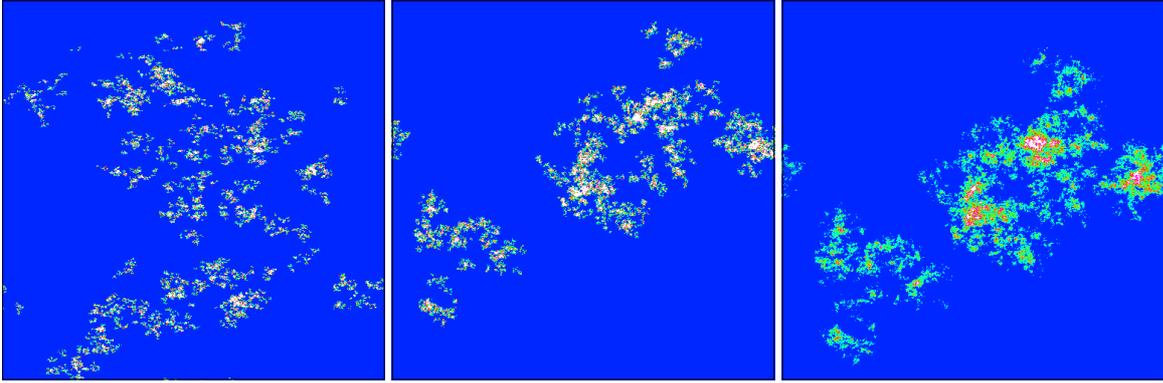


FIG. 1.6: Modèles fractals. De gauche à droite, nuage 1 ($D=1.6$), nuage 2 ($D=1.8$), et nuage 3 ($D=2.2$)

Le principe de la construction de ces modèles est très simple. Un nuage fractal est construit en trois dimensions, de manière hiérarchique, sur plusieurs niveaux, chaque nuage de niveau L contenant un nombre donné de nuages de niveau $L-1$. Les nuages de plus bas niveau étant les “granules” du complexe moléculaire.

Les paramètres libres sont le nombre total de granules, N_T , le nombre de niveaux, L , et le nombre de sous-niveaux par niveau, N , de sorte que $N_T = N^{L-1}$. Les masses contenues dans les niveaux successifs sont alors liées par $M_i = N M_{i-1}$. Or la dimension fractale relie la masse et le rayon des nuages par $M \propto r^D$, donc le rapport de taille entre les nuages de niveaux successifs est constant et vaut

$$\alpha = \frac{r_{i-1}}{r_i} = N^{-1/D}, \quad (1.14)$$

ce qui permet de construire les modèles pratiquement. Les images sont alors obtenues en effectuant une projection sur un plan, ce qui revient à négliger les effets d'épaisseur optique. Elles sont présentées sur la figure (1.6), la dimension fractale donnée en légende, D , étant celle de la formule (1.14)

Les résultats de l'application de notre algorithme de périmètre-surface donnent une idée des effets de projection sur la dimension fractale, au sujet desquels on pourra consulter [5]. La table (1.1) présente ces résultats, incluant la dimension fractale de départ D , et le résultat de la mesure, à savoir la dimension fractale de la projection, D_p . On voit en particulier qu'il n'y a pas de relation simple entre D et D_p .

Modèle	D	D_p
Simul 1	1.6	1.673 ± 0.012
Simul 2	1.8	1.729 ± 0.008
Simul 3	2.2	1.576 ± 0.010

TAB. 1.1: Résultats de l'algorithme "périmètre-surface" sur les modèles de nuages fractals de la figure (1.6).

Chapitre 2

Réponse d'un interféromètre

2.1 L'observation interférométrique

Ces rappels sont fondés essentiellement sur les "Proceedings of the third NRAO Synthesis Imaging Summer School, June 1988" [1, 2, 9, 16, 17, 19].

2.1.1 La propagation de l'information

L'information sur un phénomène astrophysique se produisant en \mathbf{R} est obtenue en mesurant le champ électromagnétique résultant en \mathbf{r} . Pour simplifier les équations, nous ne tiendrons compte que du champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t)$, étant donné que le champ magnétique peut s'en déduire à partir de la théorie de Maxwell. De plus, nous ne considérerons qu'une composante du champ. En raison de la linéarité des équations de l'électromagnétisme, nous pouvons également nous épargner les difficultés d'un champ variant dans le temps $E(\mathbf{r}, t)$ en ne considérant que ses composantes quasi-monochromatiques complexes $\hat{E}_\nu(\mathbf{r})$

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{E}_\nu(\mathbf{r}) e^{2i\pi\nu t} d\nu. \quad (2.1)$$

Par ailleurs, cette même linéarité permet d'appliquer un théorème de superposition

$$\hat{E}_\nu(\mathbf{r}) = \iiint \mathcal{P}_\nu(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \hat{E}_\nu(\mathbf{R}) d^3\mathbf{R}, \quad (2.2)$$

où $\mathcal{P}_\nu(\mathbf{R}, \mathbf{r})$ est la fonction de propagation. Vu les distances des sources astronomiques, nous ne pouvons espérer décrire leur structure dans la troisième dimension. Plus précisément, nous ne pouvons mesurer que leur distribution de brillance superficielle

$$\mathcal{E}_\nu(\mathbf{n}) = \int \hat{E}_\nu(\mathbf{R}) d|\mathbf{R}|, \quad (2.3)$$

où l'intégration est effectuée le long de la ligne de visée de vecteur unitaire $\mathbf{n} = \mathbf{R}/|\mathbf{R}|$. Il n'est pas inutile de se représenter une source comme projetée sur une "sphère céleste" de rayon $|\mathbf{R}|$. Si nous supposons qu'il n'y a pas d'autre source d'émission dans le volume que cette sphère délimite, le principe d'Huyghens-Fresnel donne une forme simple pour la fonction de propagation, et (2.2) devient

$$\hat{E}_\nu(\mathbf{r}) = \iint \mathcal{E}_\nu(\mathbf{n}) \mathcal{A}_\nu(\mathbf{n}) \frac{e^{2i\pi\nu|\mathbf{R}-\mathbf{r}|/c}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} dS. \quad (2.4)$$

Dans cette équation, $\mathcal{A}_\nu(\mathbf{n})$, appelé lobe principal ou lobe primaire, prend en compte le fait que les antennes ne sont pas des sondes ponctuelles, mais qu'elles ont une sensibilité dépendant de la direction. Il s'agit donc d'une fonction valant un au voisinage immédiat d'une certaine direction principale et tombant rapidement à zéro ailleurs. Nous supposons que toutes les antennes d'un même réseau ont le même lobe primaire. Il faut noter qu'il existe des lobes secondaires, dont les effets seront discutés dans la suite.

2.1.2 La fonction de cohérence spatiale

Le but d'un interféromètre est de mesurer la corrélation entre les champs en deux points distincts, disons \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 , au travers de la fonction de cohérence spatiale ou fonction de visibilité

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \hat{E}_\nu(\mathbf{r}_1) \hat{E}_\nu^*(\mathbf{r}_2) \rangle. \quad (2.5)$$

Ici, $\langle . \rangle$ est une espérance statistique et $*$ indique la conjugaison complexe. D'après (2.4), et en supposant que les différents points de la source sont incohérents,

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \iint \langle |\mathcal{E}_\nu(\mathbf{n})|^2 \rangle |\mathbf{R}|^2 \mathcal{A}_\nu^2(\mathbf{n}) \frac{e^{2i\pi\nu|\mathbf{R}-\mathbf{r}_1|/c}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}_1|} \frac{e^{-2i\pi\nu|\mathbf{R}-\mathbf{r}_2|/c}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}_2|} dS. \quad (2.6)$$

Enfin, puisque $|\mathbf{r}| \ll |\mathbf{R}|$, nous obtenons une expression très simple de $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, qui fait apparaître l'intensité observée $I(\mathbf{n}) = \langle |\mathcal{E}_\nu(\mathbf{n})|^2 \rangle |\mathbf{R}|^2$

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int I(\mathbf{n}) \mathcal{A}_\nu^2(\mathbf{n}) e^{-2i\pi\nu\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/c} d\Omega. \quad (2.7)$$

Le point important à noter ici est que $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ ne dépend pas de \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 indépendamment, mais uniquement de la ligne de base $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. De plus, puisque la correction du lobe primaire est une simple division qui peut s'effectuer à la fin du processus de réduction des données, nous allons simplifier nos notations en supposant que

$$I(\mathbf{n}) = I(\mathbf{n}) \mathcal{A}_\nu^2(\mathbf{n}). \quad (2.8)$$

2.1.3 Synthèse d'ouverture et transformées de Fourier

Bien entendu, ce qui va nous intéresser maintenant, c'est l'inversion de l'équation (2.7) en vue d'obtenir l'intensité observée $I(\mathbf{n})$. Ceci peut être fait dans un cas particulier, dans lequel nous nous placerons dorénavant. Supposons que la source que nous souhaitons observer soit limitée à une petite portion du ciel autour de \mathbf{n}_0 . Alors, $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 + \delta\mathbf{n}$ avec $|\delta\mathbf{n}| \ll 1 = |\mathbf{n}_0|$, et il est évident que $\delta\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_0 = 0$. Dans un système de coordonnées approprié, on a $\mathbf{n}_0 = (0, 0, 1)$, $\mathbf{n} = (l, m, 0)$ et $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = (\lambda u, \lambda v, \lambda w)$ (λ étant la longueur d'onde). L'équation (2.7) devient

$$V'(u, v, w) = e^{-2i\pi w} \iint I(l, m) e^{-2i\pi(u l + v m)} dl dm. \quad (2.9)$$

l et m sont alors les coordonnées célestes vers lesquelles pointe \mathbf{n} . Il est habituel d'intégrer le facteur exponentiel dans la fonction de visibilité, de façon à pouvoir considérer une fonction de deux variables seulement (opération de blocage des franges)

$$V(u, v) = e^{2i\pi w} V'(u, v, w) = \iint I(l, m) e^{-2i\pi(ul+vm)} dl dm. \quad (2.10)$$

Il s'agit là d'une simple relation de transformée de Fourier, et nous avons

$$I(l, m) = \iint V(u, v) e^{2i\pi(ul+vm)} dudv. \quad (2.11)$$

Malheureusement, la fonction de cohérence spatiale n'est jamais connue partout dans le plan $u-v$, mais uniquement en certains points, puisque nous ne disposons que d'un nombre fini d'antennes et d'un temps d'observation limité. Nous pouvons modéliser cet effet en introduisant une fonction de transfert optique ou fonction d'ouverture $P(u, v)$ qui est non-nulle uniquement aux points où une mesure a été effectuée.

$$P(u, v) = \sum_k D_k \delta(u - u_k, v - v_k). \quad (2.12)$$

Par ailleurs, les mesures n'étant jamais parfaites, il nous faut considérer qu'elles sont entachées d'un bruit $N(u, v)$. Si maintenant nous inversons l'équation comme précédemment, nous n'obtenons pas la vraie intensité $I(l, m)$, mais ce que les radioastronomes appellent l'image sale :

$$O(l, m) = \iint (V(u, v) + N(u, v)) P(u, v) e^{2i\pi(ul+vm)} dudv. \quad (2.13)$$

Introduisant le lobe sale, ou fonction d'étalement de point (PSF, pour "point-spread function" en anglais)

$$B(l, m) = \iint P(u, v) e^{2i\pi(ul+vm)} dudv, \quad (2.14)$$

il est clair que nous avons une relation de convolution :

$$O = (I + \hat{N}) * B. \quad (2.15)$$

où \hat{N} est la transformée de Fourier de N . Cette reconstruction O par transformée de Fourier présente de nombreux artefacts liés à la forme de B , qui peuvent rendre l'image totalement illisible et conduire à des effets non physiques (par exemple des intensités négatives). Les méthodes de déconvolution usuelles introduisent des hypothèses qui permettent de donner des valeurs à O là où P est nulle. La simple transformée de Fourier met à zéro $O(l, m)$ là où aucune mesure n'a été faite, et c'est ce qui provoque les artefacts sur les images. Nous allons d'ailleurs maintenant résumer les effets d'un interféromètre sur une distribution de brillance.

2.1.4 Les caractéristiques et les limitations d'un interféromètre

Comme nous venons de le suggérer, les caractéristiques principales d'un interféromètre peuvent être abordées simplement en considérant la couverture $u - v$ qu'un instrument permet, pour une source et un temps d'observation donnés. En fait, celle-ci est formée d'un réseau de portions d'ellipses, résultats de la variation des lignes de bases avec la rotation de la Terre. Ces portions d'ellipses se groupent dans un "anneau" centré en $(0,0)$, de sorte que les deux caractéristiques principales de cette couverture $u - v$ sont les rayons intérieur et extérieur de l'anneau.

La résolution

Le rayon extérieur, correspondant aux plus grandes lignes de bases atteintes par l'instrument au cours d'une observation, représente clairement la résolution. Plus ce rayon est grand, plus celle-ci l'est également, et plus petites seront les structures identifiables par l'interféromètre. Cette limitation vers les petites échelles est commune à tous les types d'instruments.

Le problème de l'espace zéro

En revanche, le rayon intérieur est spécifique à l'interférométrie. Il caractérise la ligne de base la plus courte atteinte par l'instrument. En l'absence d'autocorrélation, cette distance est de l'ordre du diamètre des antennes, et il existe donc un "trou" au milieu du plan $u - v$. Les conséquences de ce manque d'information sont très importantes pour les images "sales" dont il vient d'être question au paragraphe précédent. En effet, les grandes structures, qui devraient être vues avec les espacements manquants, sont complètement ignorées. Pire, elles sont remplacées par une cuvette négative sur laquelle viennent se poser les structures plus petites. En ce qui concerne notre méthode de calcul de la dimension fractale, le seuillage étant effectué sur des niveaux positifs, nous ne mesurons que les parties "émergées". Si cela ne devrait pas affecter sensiblement les mesures de D , il faudra se souvenir que celles-ci seront déduites d'un plus petit nombre de couples (périmètre, surface) que dans le cas des images propres, pour lequel le problème des intensités négatives ne se pose pas.

2.2 Le simulateur interférométrique

2.2.1 ALMA, le futur interféromètre millimétrique

Au cours des dernières années, la communauté des astrophysiciens a exprimé le désir de voir se construire un grand interféromètre travaillant dans le domaine des ondes millimétriques. Les bases scientifiques en faveur de cet instrument sont en effet nombreuses, de l'étude de la formation des galaxies et des quasars à celle des nuages moléculaires et de la naissance des étoiles, en passant par les sciences planétaires. Avec 10000 mètres carrés de surface collectrice et plus d'un millier de lignes de base, l'interféromètre ALMA (Atacama Large Millimeter Array) devrait atteindre des résolutions inégalées, de l'ordre du dixième de seconde d'arc à la longueur d'onde de 3 mm. Le site choisi pour la construction de cet instrument se trouve au Chili, sur

le plateau désertique de l'Atacama. Le choix d'un site élevé est mû par le besoin de minimiser le contenu de l'air en vapeur d'eau, la nécessité de construire de grandes lignes de bases requérant par ailleurs que l'endroit soit plat. La présence dans le ciel austral du centre galactique ainsi que de nombreuses sources radio est également un facteur déterminant dans le choix du site. Le travail est mené en commun par l'Europe et les USA, qui ont fusionné leurs projets respectifs, LSA (Large Southern Array) et MMA (MilliMeter Array).

2.2.2 Le fonctionnement du simulateur

Malgré une apparente complexité essentiellement due à l'abondance des options possibles, le simulateur conçu par François Viallefond et Alain Coulais ne présente pas de difficultés conceptuelles majeures. Après une nécessaire période d'adaptation, son utilisation ne pose pas véritablement de problème. Dans les paragraphes qui suivent, nous allons décrire brièvement les points importants de son fonctionnement.

La couverture $u - v$

Parmi les nombreux paramètres entrés par l'utilisateur, les diamètres des deux types d'antennes¹, la surface collectrice totale et la fraction de celle ci couverte par les antennes du premier type permettent de calculer les nombres d'antennes.

La configuration choisie par l'utilisateur - parmi six possibles - détermine la position spatiale des antennes au sol. Il est intéressant de noter que certaines configurations laissent une place au hasard en disposant les antennes relativement aléatoirement autour d'une figure géométrique donnée. En ce qui nous concerne, nous avons opté pour cette version "random" d'une configuration optimale, dite en triangle de Reuleaux, laquelle est reproduite sur la figure (2.1). Les antennes de petit diamètre ayant un plus grand champ et pouvant être plus nombreuses sur une surface donnée, elles constituent le sous-réseau intérieur, noté 1 et destiné à mesurer les basses fréquences spatiales. Les grandes antennes, quant à elles, forment le réseau 2, à l'extérieur. Les rayons R_1 et R_2 de ces réseaux, déterminés par une méthode décrite dans la suite, sont de l'ordre de 150 et 300 mètres.

Donnant enfin la position de la source dans le ciel et la position géographique précise du réseau - dans notre cas, à quelques 27 degrés de latitude sud - le simulateur en déduit, à partir de la position des antennes et d'une plage horaire d'observation, la couverture du plan $u - v$.

Les différents lobes

Comme il l'a été dit précédemment (équation (2.14)), le lobe sale se déduit de la couverture $u - v$ par une simple transformation de Fourier, effectuée classiquement par un algorithme de type FFT.

¹Il est possible de choisir des réseaux comportant 1, 2 ou 3 types d'antennes, mais le cas intermédiaire étant une des possibilités envisagées pour ALMA, c'est celui-ci que nous avons retenu dans toutes nos simulations.

En vue d'obtenir une image "propre", le lobe sale est ajusté par une gaussienne elliptique de mêmes largeurs à mi-hauteur et de même angle de position qu'on appellera dans la suite "lobe propre".

Le lobe primaire, quant à lui, se déduit de la taille des antennes. Plus celles-ci sont grandes et plus le lobe est étroit et donc le champ petit. Cette remarque n'est pas négligeable, car certaines de nos images ont peu de signal, et il faudra donc vérifier que le centre des régions observées ne se trouve pas au milieu d'un grand vide...

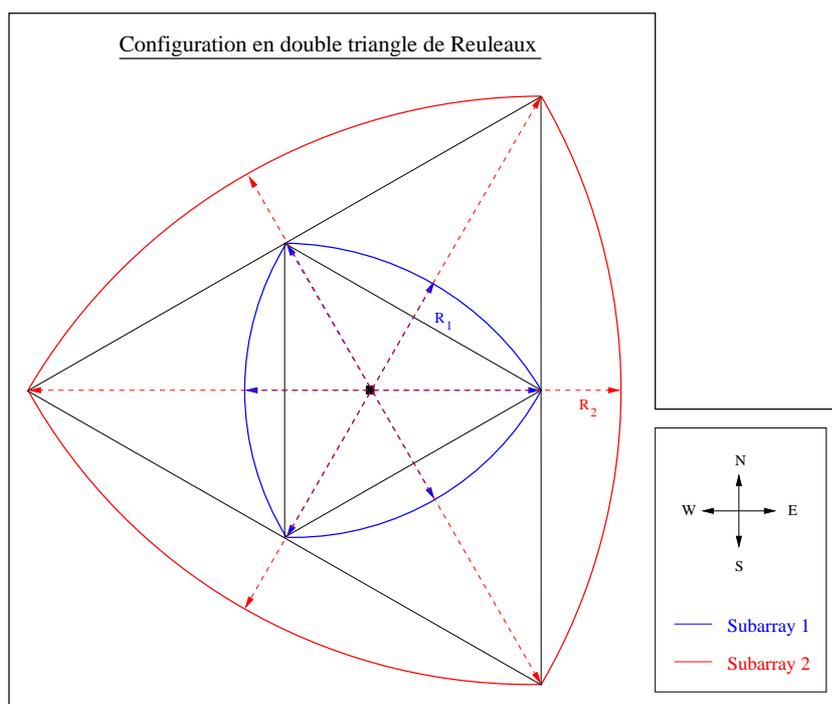


FIG. 2.1: Configuration en double triangle de Reuleaux. Dans la version aléatoire, les antennes de chaque sous-réseau se répartissent "au hasard" autour des arcs de cercle bleus et rouges.

Les images en sortie du simulateur

Elles sont de deux types. Il y a tout d'abord, bien entendu, l'image sale, résultat de la convolution du modèle d'entrée - au préalable atténué par le lobe primaire - par le lobe sale. D'autre part, dans l'optique des problèmes de déconvolution évoqués succinctement plus haut, le simulateur fournit également la "meilleure image possible" étant donné l'instrument. En réalité, l'image propre, produit de convolution du modèle par le lobe propre est indéniablement celle vers laquelle devraient tendre tous les algorithmes de déconvolution dignes de ce nom. Elle n'a en effet ni artefacts liés aux trous dans la couverture $u - v$, ni les problèmes inhérents à l'absence d'espace-ment nul dans les observations interférométriques classiques. Une remarque s'impose ici : les lobes secondaires que nous avons sont d'un niveau très faible - typiquement moins d'un pour cent - et ceci en raison de l'excellente couverture fournie par toutes

les lignes de base disponibles. Par conséquent, les images sales seront en fait très proches des images propres, et le problème de la déconvolution ne devrait pas être critique. En fait, nous ne l'avons pas du tout abordé.

Remarques et limitations actuelles

L'utilisation de deux types d'antennes différents permet de considérer trois corrélations : celle des petites antennes entre elles, celles des grandes antennes entre elles, et celle des petites antennes avec les grandes. Chacune de ces corrélations donne ses propres lobes, primaire, sale et propre. Les sorties du simulateur seront donc composées de trois images différentes selon la corrélation considérée. La figure (2.2) montre les trois lobes sales correspondants.

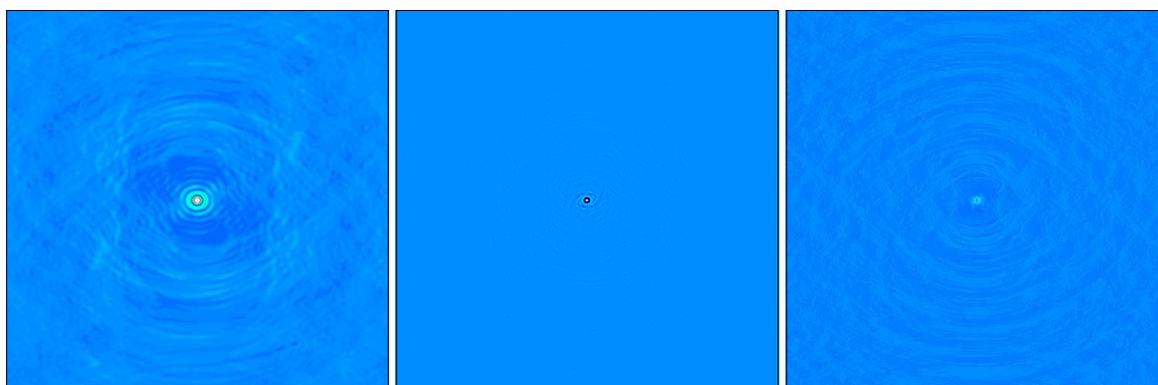


FIG. 2.2: Lobes sales pour l'un de nos modèles. De gauche à droite, les corrélations 1-1, 1-2, et 2-2, sachant que le sous-réseau 1 est celui constitué par les petites antennes.

Par ailleurs, il faut noter que dans son état actuel de développement, le simulateur comporte quelques limitations. D'une part, il ne fonctionne correctement que pour des configurations compactes. Les configurations étendues - du type de celles attendues pour ALMA - sont pour l'instant inaccessibles en raison de la dynamique des images qui en résultent.

Cette restriction aux configurations compactes fait apparaître un autre problème non encore complètement résolu, celui du "shadowing", c'est-à-dire le fait qu'une antenne bloque le champ de vision d'une autre. Dans un réseau compact, pour des sources basses sur l'horizon, cette difficulté peut être majeure.

Enfin, le simulateur ne prend pas encore en compte le bruit des récepteurs. Afin de remédier à ce défaut, nous avons décidé d'implémenter un algorithme simple donnant un bruit corrélé.

2.2.3 Ajout de bruit

A priori, le bruit ajouté sur une image devrait être calculé comme étant la corrélation de signaux aléatoires déduits des bruits de récepteurs, lesquels se devraient de

reproduire fidèlement la réalité. Devant le peu de temps que nous avons pour notre travail, il nous a paru plus judicieux de recourir à une méthode moins précise, mais donnant une bonne idée de la forme du bruit.

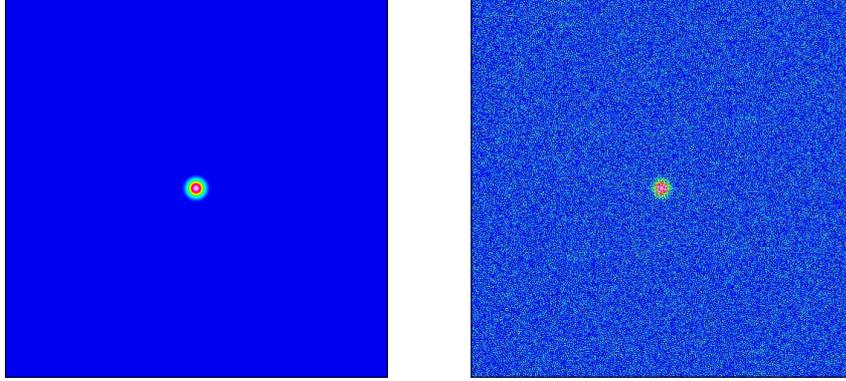


FIG. 2.3: Effet d'un bruit corrélé sur une source ponctuelle.

L'idée à la base de notre algorithme est que le bruit σ en un point du plan $u - v$ est fonction de la densité de la couverture C en ce point :

$$\sigma \propto \frac{1}{\sqrt{C}} \quad (2.16)$$

C'est-à-dire que le niveau de bruit est d'autant plus faible que la couverture, et donc la sensibilité, est plus grande. Notons qu'il existe également une dépendance sur l'élévation qui change en fonction de l'angle horaire. Par ailleurs, il est clair que les points du plan $u - v$ où la couverture est nulle correspondent à des lignes de bases inexistantes. Comme il n'y a pas de mesure en ces points, le bruit se doit d'y être nul. On voit donc que la formule (2.16) ne peut s'appliquer partout, et que des précautions numériques sont nécessaires. La figure (2.3) montre le résultat de notre algorithme sur une simple source "ponctuelle" gaussienne.

2.3 Résultats des simulations

2.3.1 Mise en place des modèles

Degrés de liberté et contraintes

Etant donné que nous avons choisi de nous restreindre aux configurations compactes du type de celle de la figure (2.1), les degrés de liberté qui nous restent sont les diamètres des antennes, la surface collectrice totale et la fraction de celle-ci couverte par les petites antennes (sous-réseau 1). Nous noterons ces différents paramètres respectivement d_1 , d_2 , S , et f .

Il existe également quelques contraintes dont nous allons devoir tenir compte dans l'automatisation de nos modélisations. Tout d'abord, les rayons R_1 et R_2 des deux

sous-réseaux se doivent d'être suffisamment grands pour permettre la présence simultanée de toutes les antennes sans chevauchement. D'autre part, une des contraintes internes au simulateur est que le nombre total d'antennes est limité à 128, pour des raisons de mémoire. Voyons comment tout ceci peut se mettre en place.

Contrainte sur le nombre d'antennes

Si N_1 et N_2 sont les nombres d'antennes dans chaque sous-réseau, nous devons avoir, outre la contrainte $N_1 + N_2 \leq 128$, la relation suivante :

$$N_1 \pi \left(\frac{d_1}{2} \right)^2 + N_2 \pi \left(\frac{d_2}{2} \right)^2 = fS + (1 - f)S = S. \quad (2.17)$$

On en déduit sans difficulté que la contrainte sur le nombre total d'antennes se traduit par une inégalité sur la fraction f :

$$f \leq f_{max} = \left(\frac{32\pi}{S} - \frac{1}{d_2^2} \right) \frac{d_1^2 d_2^2}{d_2^2 - d_1^2}. \quad (2.18)$$

Nous avons également limité f à 30 % de la surface totale, par mesure de sécurité. Les petites antennes devant mesurer les basses fréquences spatiales, il serait en effet inutile qu'elles forment la majeure partie de la surface collectrice.

Contrainte sur les rayons

En ce qui concerne les rayons des triangles de Reuleaux, il ne fait aucun doute qu'ils doivent au minimum permettre de placer les antennes bord à bord. Ceci se traduit tout naturellement par la condition - écrite ici pour le sous-réseau 1 -

$$\pi R_1 \geq N_1 d_1, \quad (2.19)$$

soit, en remplaçant N_1 par son expression tirée de (2.17) :

$$R_1 \geq R_1^{min} = \frac{4fS}{\pi^2 d_1}. \quad (2.20)$$

De la même manière on calcule le rayon minimal pour le sous-réseau 2 :

$$R_2^{min} = \frac{4(1-f)S}{\pi^2 d_2}. \quad (2.21)$$

Afin de nous prémunir contre les mauvaises surprises, nous avons choisi de fixer les rayons des sous-réseaux à 1.3 fois leurs valeurs minimales. Enfin, concernant R_2 , il convient de remarquer qu'il ne suffit pas que les grandes antennes ne se gênent pas, il faut également qu'elles laissent de la place au centre du réseau pour les petites. Pour nous assurer que tel était le cas, nous avons finalement pris pour R_2 le plus grand rayon parmi 1.3 R_2 et 2 R_1 . L'expérience a montré que nous ne nous sommes pas trompés en faisant un tel choix.

Conclusion

En définitive, nous avons construit cinquante instruments différents, repérés par des indices entiers, i_1 , i_2 , i_3 , et i_4 , de sorte qu'on ait, d_1 et d_2 étant donnés en mètres et S en mètres carrés :

$$d_1 = 4 + 2i_1 \text{ avec } i_1 \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, \quad (2.22)$$

$$d_2 = 10 + 3i_2 \text{ avec } i_2 \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, \quad (2.23)$$

$$S = 6000 + 2i_3 \text{ avec } i_3 \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, \quad (2.24)$$

$$f = 0.1i_4 \text{ avec } i_4 \in \llbracket 1, i_{max} \rrbracket, \quad (2.25)$$

où i_{max} est simplement déduit de la contrainte (2.18) sur la fraction f .

2.3.2 Cas d'un modèle isolé

La multiplicité des modèles qui viennent d'être présentés s'ajoutant à celle des nuages fractals utilisés et au fait que chaque configuration représente en réalité trois corrélations différentes, il serait malaisé de vouloir directement embrasser l'ensemble des mesures de dimensions fractales sur les images obtenues en sortie du simulateur. Plus simplement, nous allons d'abord nous concentrer sur un seul modèle d'instrument, à savoir un interféromètre comportant des antennes de 6 et 13 mètres, ayant une surface collectrice totale de 8000 mètres carrés, dont 10 % se répartissent sur les antennes de petit diamètre.

Les images en sortie du simulateur

Comme nous l'avons dit plus haut, elles sont de deux types. Les images "propres", tout d'abord, sont représentatives de la résolution instrumentale, puisque le problème de l'espacement zéro n'y existe pas. Les images "sales", ensuite, qui sont également passées par notre algorithme de bruit. Les résultats finaux, obtenus en corrigeant ces images de l'atténuation du lobe primaire, sont présentés sur la figure (2.4), en fonction de la corrélation considérée (voir la légende de la figure (2.2))

L'image sale au centre, montrant l'intercorrélation entre les petites et les grandes antennes, ne doit pas nous surprendre par son aspect. Il ne faut pas perdre de vue que la plus petite distance entre deux antennes de types différents est très grande devant les plus petites lignes de base des deux corrélations homogènes. Par conséquent le trou central dans le plan $u - v$ est beaucoup plus grand, et les seules structures qui peuvent subsister dans l'image sont celles aux plus petites échelles.

Remarquons par ailleurs que si les images propres montrées sur la figure (2.4) sont effectivement corrigées des effets du lobe primaire, nous n'avons pas utilisé ces versions "correctes" des images pour nos calculs de périmètre-surface. La raison à cela est simple. D'un côté, les petites structures voient leur niveau globalement rehaussé, mais la géométrie de leurs contours n'est pas modifiée et l'algorithme de périmètre-surface n'en est pas affecté. De l'autre, il en va évidemment différemment pour les grandes structures qui ne sont pas corrigées uniformément, mais en revanche ces structures sont nécessairement sous-représentées par rapport aux petites échelles spatiales, et

leur rôle est donc négligeable dans la détermination de D , qui est, nous l'avons dit, issue d'une simple régression linéaire à poids uniformes.

Les relations périmètre-surface : Dynamique

Maintenant que nous avons les images finales, nous pouvons mesurer leurs dimensions fractales en utilisant notre algorithme. Les résultats, pour les trois modèles de nuages fractals et les deux corrélations homogènes (petites antennes entre elles et grandes antennes entre elles), sont présentés sur la figure (2.5).

Remarquons tout d'abord que nous avons une bonne dynamique d'échelle dans l'ensemble, puisque nous avons environ un facteur 1000 de dynamique sur les surfaces mesurées. Il fait peu de doute que ce n'aurait pas été le cas avec les images du "key-project", qui n'ont pas elles-mêmes cette dynamique.

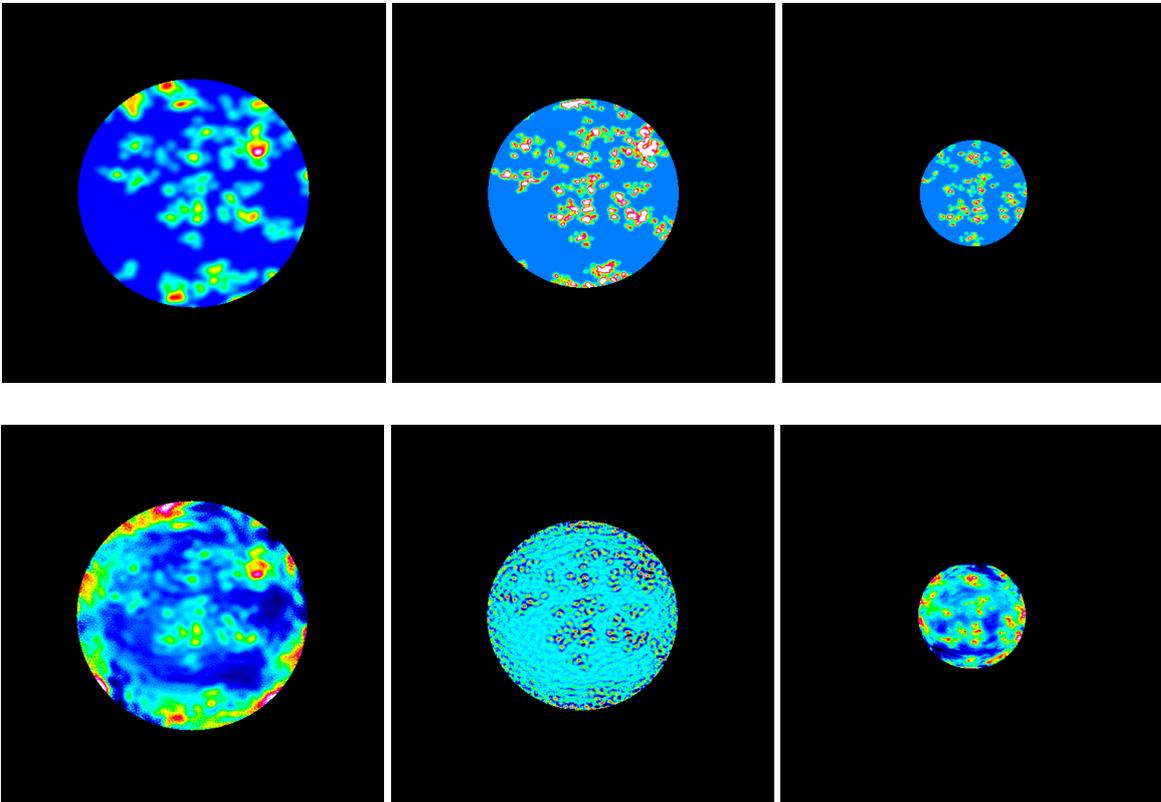


FIG. 2.4: Images propres (en haut) et sales (en bas), pour le premier fractal de la figure (1.6) et pour le modèle d'instrument choisi dans le texte. De gauche à droite, corrélations 1-1, 1-2, et 2-2.

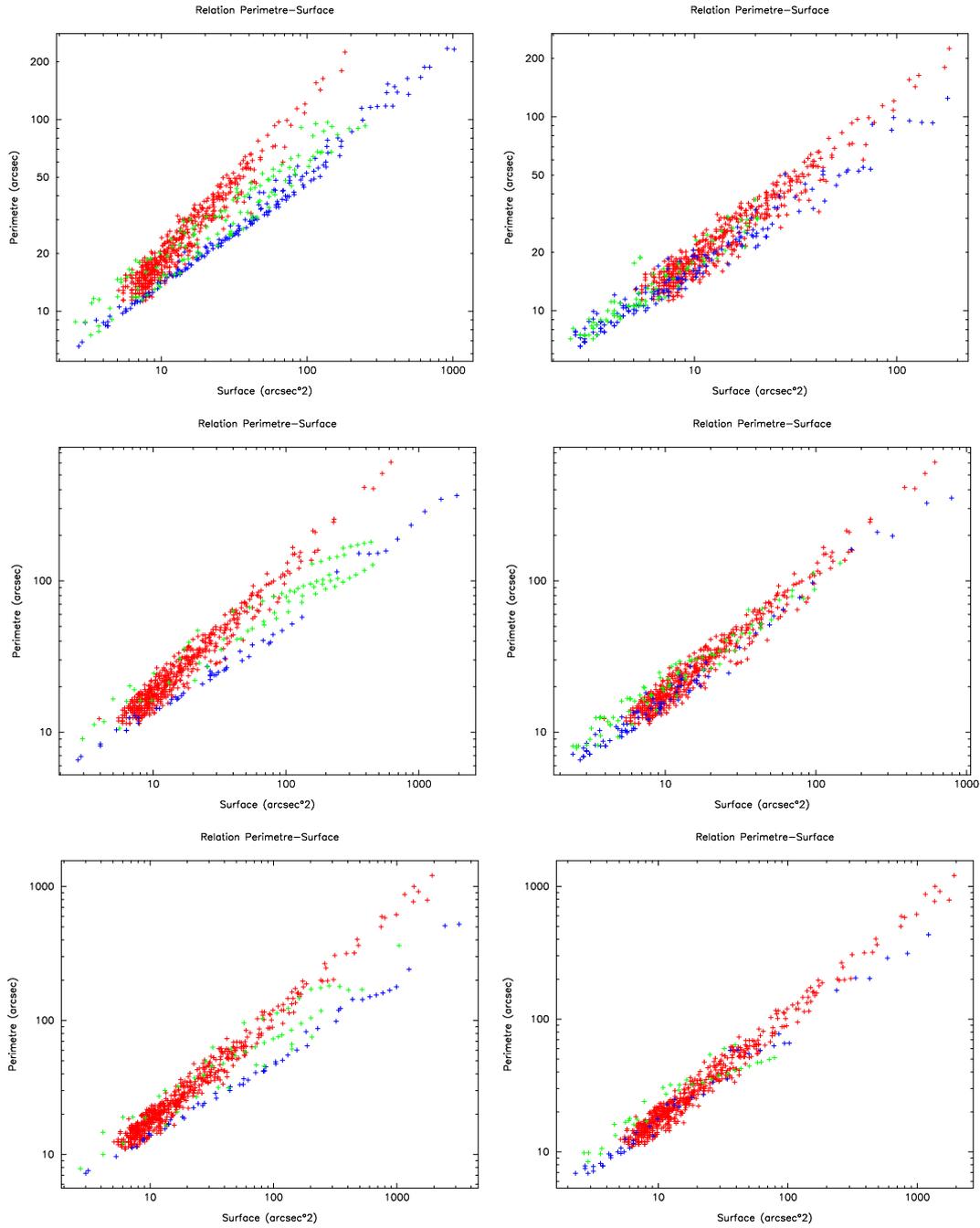


FIG. 2.5: Relations périmètre-surface pour un instrument donné. Sont représentés les trois fractals (la ligne i correspondant au nuage i de la figure (1.6)) et les deux corrélations homogènes (petites antennes à gauche et grandes antennes à droite). Les points rouges correspondent au fractal originel, les bleus aux images propres et les verts aux images sales.

Les effets de la résolution : lissage et fusions

Si nous nous intéressons pour l'instant uniquement aux effets de résolution, la comparaison des images propres avec les fractals originels semble la plus utile. Sur ces tracés, en particulier sur ceux de la corrélation des petites antennes entre elles, nous voyons une rupture de pente dans la disposition des points bleus, correspondants aux images propres.

Aux petites échelles, la convolution avec un lobe de taille finie fait disparaître beaucoup de structures en lissant les contours. Le résultat de cette convolution étant une diminution du périmètre des structures accompagné d'une diminution relativement plus faible de leur surface, la dimension fractale D s'en trouve également diminuée. De plus, les petites structures auront tendance à fusionner, déplaçant la courbe vers la droite et vers le haut. Pour pouvoir quantifier cet effet, il pourrait être intéressant de tracer la distribution des distances moyennes entre structures de même taille en fonction de l'échelle.

Aux grandes échelles, les effets précédents deviennent négligeables. En particulier, le rapport entre le périmètre et l'aire est moins affecté par le lissage. Pour ces structures beaucoup plus grandes que le lobe propre, on semble retrouver approximativement la pente d'origine, ce qu'il est aisé d'interpréter en termes d'invariance d'échelle. Néanmoins, pour être certains de cet effet, il serait nécessaire d'avoir une dynamique encore plus grande du côté des grandes échelles.

Cette rupture de pente fait craindre que notre méthode de régression linéaire brutale pour la détermination de la pente ne conduise à des dimensions systématiquement inférieures aux dimensions d'origine. De plus, cette détermination est violemment biaisée par les petites échelles, où les structures sont plus nombreuses.

Les effets des lobes secondaires

La dispersion des points verts, correspondants aux images sales, donne une idée de l'effet des lobes secondaires. L'apparition d'artefacts a deux effets visibles sur la figure (2.5). D'une part, dans les régions "vides" de l'image, des structures "fantômes" sont isolées par l'algorithme comme de véritables sources de signal et on les voit apparaître, sur les graphes, à des échelles inférieures à la résolution. D'autre part, en "compliquant" les frontières des structures plus grandes, ces structures contribuent à une remontée artificielle de D . C'est effectivement ce que nous observons. Remarquons au passage que ce sont les comportements de ces structures qui devraient caractériser les performances des algorithmes de déconvolution.

L'effet de l'espacement nul

Celui-ci est mieux illustré par l'intercorrélacion, dont on a dit précédemment qu'elle était plus affectée par ce problème. Les figures de dispersion correspondant à ce réseau pour les trois nuages fractals considérés sont présentés en (2.6). On y voit clairement que les grandes structures ont disparu, et que seules les plus petites ont "survécu". En effet, les points verts se concentrent aux petites échelles et il n'y en a aucun au delà de 10 à 20 secondes d'arc carrées.

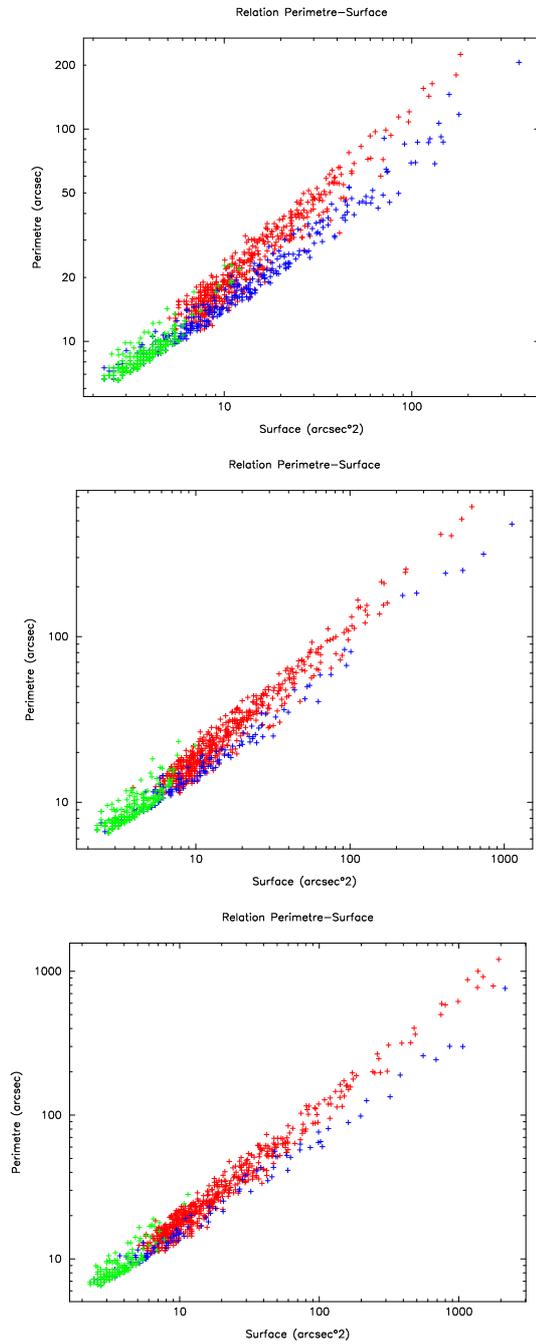


FIG. 2.6: Relations périmètre-surface pour un instrument donné. Sont représentés les trois fractals (la ligne i correspondant au nuage i de la figure (1.6)) pour la corrélation hétérogène. Les points rouges correspondent au fractal original, les bleus aux images propres et les verts aux images sales.

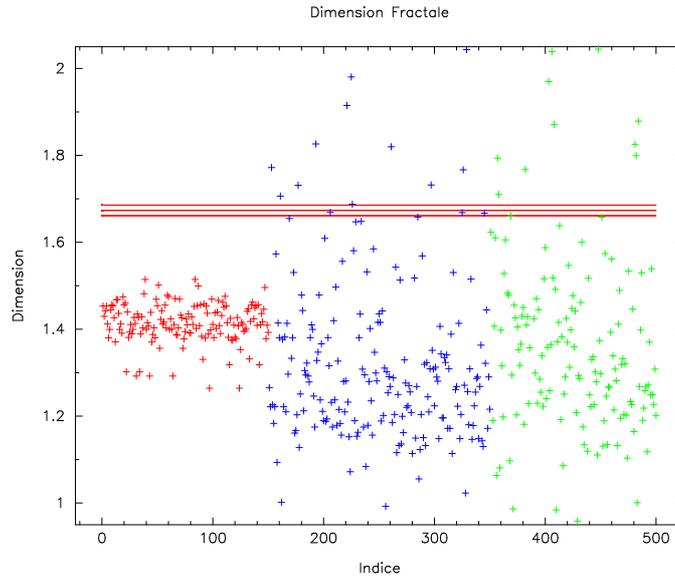


FIG. 2.7: Dispersion des valeurs de la dimension fractale sur les images dégradées du nuage 1. En rouge les images propres, en bleu les images sales sans bruit, et en vert les images sales et bruitées. Les traits horizontaux représentent la valeur théorique et l'incertitude qui l'entâche.

Comparaison des corrélations homogènes

Revenant à la figure (2.5), nous pouvons essayer de comparer les deux corrélations homogènes. On s'aperçoit que le réseau des grandes antennes semble reproduire beaucoup mieux la relation périmètre-surface observée pour les fractals d'origine. La meilleure explication à ce fait est à notre avis que les grandes antennes étant placées à l'extérieur, les lignes de bases atteintes sont plus grandes que pour le réseau des petites antennes. Le champ est moindre, comme on le voit sur les images de la figure (2.4), mais il semble bien que ce soit la résolution, bien plus importante dans le cas des grandes antennes, qui détermine la qualité de la restitution de D .

2.3.3 Etude succincte de l'ensemble des modèles

Maintenant que nous avons vu un peu plus en détail les différents effets de l'instrument sur les distributions de brillance fractales, il est temps de considérer l'ensemble de nos modèles, pour se faire une idée plus générale.

Diminution de la dimension fractale

On peut par exemple tracer des diagrammes de dispersion donnant les différentes valeurs de D mesurées pour un type de carte et un fractal donnés. Ceci est représenté sur la figure (2.7).

On remarque que la moyenne des valeurs est systématiquement inférieure à la dimension théorique, phénomène que nous avons déjà vu sur le modèle isolé. Il ne faudrait

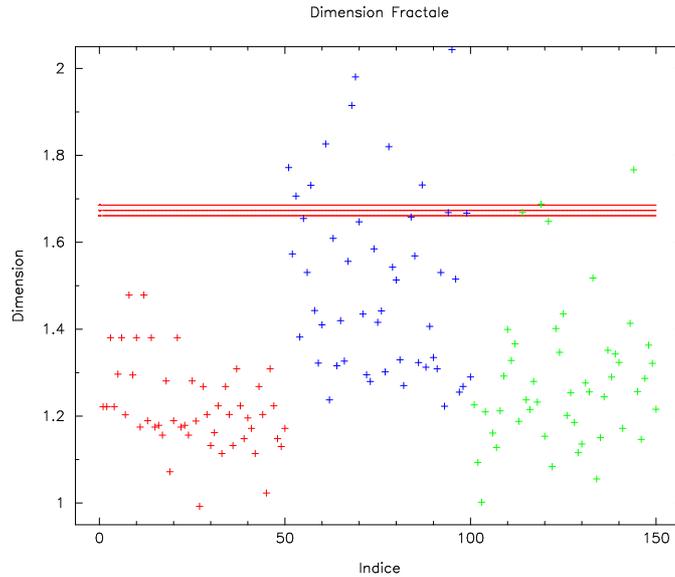


FIG. 2.8: Dispersion des valeurs de la dimension fractale sur les images sales non bruitées du nuage 1. En rouge la corrélation 1-1, en bleu la corrélation 1-2, et en vert la corrélation 2-2.

cependant pas oublier que la régression linéaire que nous avons utilisée pourrait être à l'origine d'une bonne partie de cet effet de diminution de la dimension fractale (voir (2.3.2)). La présence de valeurs supérieures à la dimension d'origine pourrait quant à elle s'expliquer par des artefacts dûs aux lobes secondaires, ou par la disparition des structures à grande échelle. En effet, si l'on prend le nuage de points bleus sur la figure (2.7), et qu'on l'éclate en trois parties correspondant aux trois corrélations, on obtient la figure (2.8), sur laquelle on voit que l'intercorrélation petites antennes - grandes antennes est la plus affectée par ce "déplacement" vers les grandes valeurs de la dimension fractale D .

Comparaison des corrélations homogènes

Jusqu'ici, la généralisation de nos résultats s'est faite sans difficulté. Pourtant, la comparaison des nuages rouge (corrélation 1) et vert (corrélation 2) de la figure (2.8) ne conforte pas vraiment notre idée selon laquelle la dimension mesurée par la corrélation des grandes antennes serait plus proche de la valeur réelle que celle mesurée par la corrélation des petites antennes. On ne voit en effet pas de tendance nette, les deux nuages se situant approximativement au même niveau, avec des dispersions comparables. C'est un problème dont on sent qu'il aurait pu nous mener à des choses intéressantes si le temps ne nous avait pas été compté.

2.4 Conclusion

Nous nous sommes attachés à étudier le problème de la réponse d'un instrument interférométrique à une distribution de brillance de type fractal, en ayant à l'esprit les structures complexes observées dans le milieu interstellaire, et en particulier les nuages moléculaires. Nous avons choisi de caractériser nos modèles de nuages par un nombre unique, la dimension fractale, et fait appel à un algorithme classique de mesure de cette dernière, fondé sur la relation entre le périmètre et l'aire des structures présentes dans le milieu.

Nous avons mis à jour plusieurs effets instrumentaux dans la restitution d'images aussi complexes : la présence d'un seuil sur la taille des structures, au-delà duquel on retrouve la dimension fractale d'origine, conformément à l'idée d'invariance d'échelle associée à la notion de fractal, l'influence des lobes secondaires, ayant pour effet de compliquer les structures existantes et d'en ajouter d'autres, augmentant ainsi la valeur de D , ou encore l'importance certaine de la résolution sur la restitution de la dimension fractale, bien que notre étude générale (2.3.3) semble devoir nous inciter à modérer notre enthousiasme.

Si ces effets sont sans doute réels, nous n'en pensons pas moins que notre étude est d'une portée très limitée. Il est en particulier très probable que la seule dimension fractale ne soit pas suffisante pour caractériser de telles structures. Comparant les images de nos nuages (figure (1.6)) avec leurs dimensions fractales (table 1.1), on voit que la "séquence évolutive" suggérée par les images ne se traduit pas par une variation monotone de D_p . De telles constatations simples semblent indiquer que d'autres nombres, comme le facteur de remplissage, lié à la variation de la distance moyenne entre deux structures de taille donnée avec l'échelle, le degré d'emboîtement, et le spectre de puissance des images, seraient de bons candidats à une caractérisation complémentaire des nuages fractals en vue d'une extension de ce travail.

Bibliographie

- [1] B. G. CLARK, *Coherence in radio astronomy*, in Synthesis Imaging In Radio Astronomy, 1988.
- [2] T. CORNWELL AND R. BRAUN, *Deconvolution*, in Synthesis Imaging In Radio Astronomy, 1988.
- [3] B. G. ELMEGREEN AND E. FALGARONE, *A fractal origin for the mass spectrum of interstellar clouds*, The Astrophysical Journal, 471 (1996), pp. 816–821.
- [4] K. FALCONER, *The Geometry of Fractal Sets*, no. 85 in Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 1985.
- [5] K. FALCONER, *Fractal Geometry ; Mathematical Foundations and Applications*, Wiley, 1990.
- [6] E. FALGARONE, J.-F. PANIS, A. HEITHAUSEN, M. PÉRAULT, J. STUTZKI, J.-L. PUGET, AND F. BENSCH, *The iram key-project : small-scale structure of pre-star forming regions. i. observational results*, Astronomy & Astrophysics, 331 (1998), p. 669.
- [7] E. FALGARONE AND T. G. PHILLIPS, *Small-scale density and velocity structure of a molecular cloud edge*, The Astrophysical Journal, 472 (1996), p. 191.
- [8] J. FEDER, *Fractals*, Plenum, 1988.
- [9] E. B. FOMALONT AND R. A. PERLEY, *Calibration and editing*, in Synthesis Imaging In Radio Astronomy, 1988.
- [10] B. MANDELBROT, *Statistical self-similarity and fractal dimension*, Science, 155 (1967), p. 636.
- [11] ———, *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman, 1982.
- [12] ———, *Self-affine fractal sets*, in Fractals In Physics, North-Holland, 1986, p. 3.
- [13] D. PFENNIGER AND F. COMBES, *Is dark matter in spiral galaxies cold gas ? - ii. fractal models and star non-formation*, Astronomy & Astrophysics, (1993).
- [14] R. L. PHELPS AND E. A. LADA, *Spatial distribution of embedded clusters in the rosette molecular cloud : Implications for cluster formation*, The Astrophysical Journal, 477 (1997), p. 176.
- [15] D. H. PORTER, A. POUQUET, AND P. R. WOODWARD, *Kolmogorov-like spectra in decaying three-dimensional supersonic flows*, Physics of Fluids, 6 (1994), p. 2133.
- [16] ROELF, *Spectral line imaging : I. introduction*, in Synthesis Imaging In Radio Astronomy, 1988.

- [17] R. A. SRAMEK AND F. R. SCHWAB, *Imaging*, in Synthesis Imaging In Radio Astronomy, 1988.
- [18] J. STUTZKI, F. BENSCH, A. HEITHAUSEN, V. OSSENKOPF, AND M. ZIELINSKY, *On the fractal structure of molecular clouds*, Astronomy & Astrophysics, 336 (1998), p. 697.
- [19] A. R. THOMPSON, *The interferometer in practice*, in Synthesis Imaging In Radio Astronomy, 1988.
- [20] M. VOGELAAR AND B. WAKKER, *Measuring the fractal structure of interstellar clouds*, Astronomy & Astrophysics, 291 (1994), p. 557.