

CINQUIÈME PARTIE

Transfert radiatif dans les milieux complexes

Sir Bedevere : ...and that, my liege, is how we know the Earth to be banana shaped.

King Arthur : This new learning amazes me, Sir Bedevere. Explain again how sheep's bladders may be employed to prevent earthquakes.

"Monty Python and the Holy Grail" (The Monty Python)

CHAPITRE XVIII

Éléments de transfert radiatif

XVIII.1 Introduction

Jusqu'à présent, nous avons passé sous silence une partie essentielle du problème général auquel est consacré ce travail. En effet, la détermination des caractéristiques des structures du milieu interstellaire à partir des données observationnelles n'a été pour le moment étudiée que de deux points de vue, celui de la projection le long de la ligne de visée et celui du filtrage par un interféromètre. Pour préciser les choses, remarquons d'une part que le traitement du filtrage instrumental suppose connu le cube de données dans l'espace position-position-vitesse, et d'autre part que l'on a obtenu celui-ci au chapitre IX en faisant l'hypothèse d'une transition optiquement mince.

C'est justement cette hypothèse qui a permis d'éviter de se pencher sur le problème qui va nous intéresser dans cette dernière partie, à savoir le transfert radiatif dans des milieux présentant des structures complexes aussi bien en densité qu'en vitesse. Rappelons qu'une transition optiquement mince correspond physiquement au fait qu'un photon émis en n'importe quel endroit du nuage s'en échappe et peut donc être détecté. Pourtant, ce cas de figure ne représente certainement pas le cas général. En effet, supposons qu'un atome émette un photon d'énergie $h\nu_0$. Il existe une probabilité non nulle que ce photon rencontre, lors de sa propagation, un autre atome de la même espèce, non excité et donc susceptible de l'absorber. Pour qu'il y ait effectivement absorption, il faut que la vitesse relative des deux atomes soit assez faible, sans quoi l'effet Doppler décale la fréquence du photon vers une valeur ν'_0 en dehors de la bande d'absorption de l'atome, comme le schématise la figure XVIII.1.

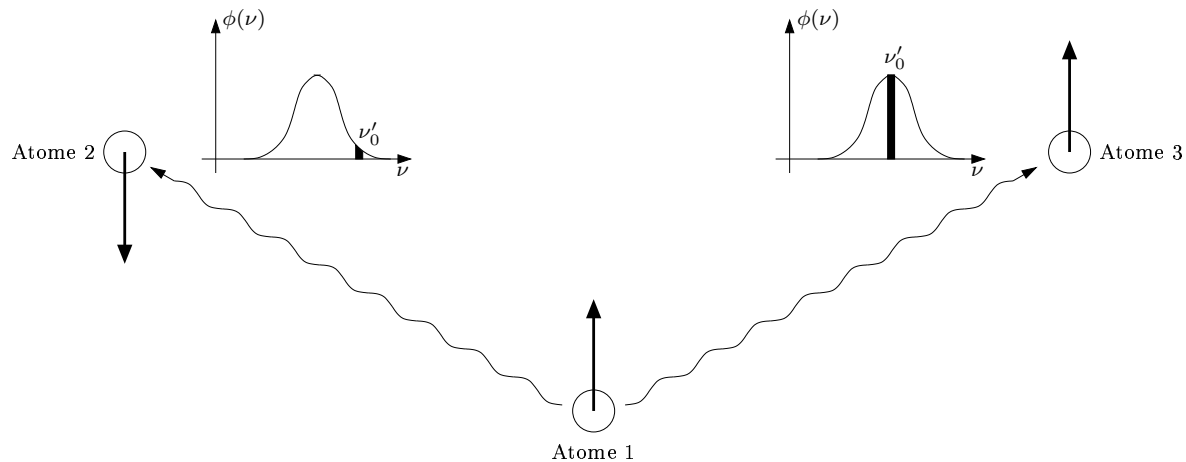


FIG. XVIII.1 – Influence de la vitesse sur le transfert radiatif. L'atome 1 émet deux photons de fréquence ν_0 , rencontrant respectivement les atomes 2 et 3. La fréquence ν'_0 vue par l'atome absorbeur est représentée sur chacun des deux schémas du profil d'absorption par une bande noire.

Ce phénomène qu'on vient de présenter très grossièrement n'est que le processus de base du problème du transfert radiatif. Il existe en effet de multiples complications dont il est plus ou moins nécessaire de tenir compte. Tout d'abord, le peuplement des niveaux d'énergie des espèces du milieu interstellaire, préalable à toute émission de photons, se fait par transitions radiatives, mais également par les collisions, ce qui donne une importance nouvelle à la densité¹, ainsi qu'aux mouvements turbulents au sein du milieu, en

¹C'est-à-dire que celle-ci n'intervient pas comme un simple facteur de proportionnalité comme dans le cas très simplifié du chapitre IX.

particulier les chocs. Les transformations chimiques, que peut provoquer l'échauffement du gaz dans ces chocs, modifient quant à elles la composition du milieu interstellaire, ce qui a des répercussions sur le transfert de rayonnement, en altérant les fréquences et les conditions d'absorption et d'émission.

Il existe également d'autres sources de rayonnement, par exemple l'émission thermique des poussières, le fond diffus cosmologique², ou encore le rayonnement synchrotron, qui est un mécanisme d'émission non-thermique par freinage d'électrons relativistes dans un champ magnétique. D'autre part, les photons du milieu interstellaire peuvent être altérés par d'autres phénomènes que l'absorption, à l'instar de la diffusion Compton sur des électrons. Enfin, les espèces présentes dans le milieu peuvent encore être excitées par d'autres voies. On pense en particulier aux collisions avec les rayons cosmiques.

Il n'est bien sûr pas question ici de prendre en compte tous ces aspects du problème du transfert, et le lecteur intéressé pourra se référer à de nombreux ouvrages, notamment ceux de Mihalas [Mihalas, 1978] et Shu [Shu, 1991]. Nous oublierons donc les problèmes de chimie, de sources alternatives de rayonnement et d'absorption, de polarisation ou encore de dépendance en fonction du temps, pour nous concentrer sur le problème apparemment simple suivant : étant donnée une ligne de visée présentant une structure complexe en vitesse aussi bien qu'en densité, dans un milieu composé d'une seule espèce, quelles peuvent être les propriétés des raies spectrales en sortie du nuage ? Cette question est au centre des travaux amorcés par Gail *et al.* [Gail *et al.*, 1974] et poursuivis aujourd'hui [Albrecht & Kegel, 1987, Hegmann & Kegel, 2000]. On présentera dans le chapitre suivant les principales méthodes et les résultats obtenus par ce groupe au cours de leurs recherches, et on proposera, au chapitre **XX**, une généralisation possible de ces travaux en introduisant des corrélations entre les structures de densité et de vitesse le long de la ligne de visée. Mais avant cela, il n'est pas superflu de passer quelques instants à présenter les outils et les équations de base du transfert radiatif, en s'appuyant sur l'introduction donnée par [Shu, 1991].

XVIII.2 Grandeurs photométriques

XVIII.2.a Intensité spécifique

Définition

On considère, sur la figure **XVIII.2**, une petite surface dS autour d'un point P repéré par le vecteur \mathbf{x} , et un petit angle solide $d\Omega$ autour d'une direction \mathbf{u} , qui est *a priori* différente de la normale \mathbf{n} à la surface élémentaire considérée³. Au cours de l'intervalle de temps dt , des photons de fréquence ν à $\nu + d\nu$ traversent la surface dS dans une direction contenue dans l'angle solide $d\Omega$. Ces photons transportent une quantité d'énergie dE_ν , qu'on peut écrire sous la forme

$$dE_\nu = I_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS d\nu d\Omega dt = I_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) \cos \theta dS d\nu d\Omega dt \quad \text{où } \theta \text{ est l'angle entre } \mathbf{u} \text{ et } \mathbf{n}.$$

Cette équation définit l'intensité spécifique I_ν , également appelée brillance, dépendant de la position \mathbf{x} , de la direction \mathbf{u} , de la fréquence ν , et du temps.

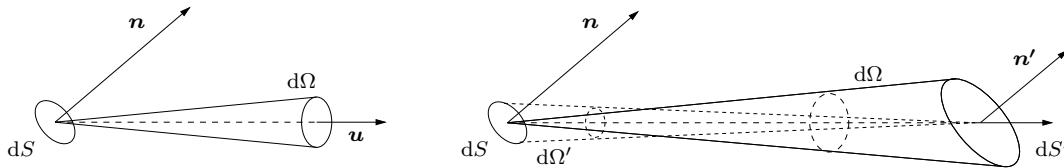


FIG. XVIII.2 – Définition de l'intensité spécifique (à gauche) et propriété de conservation (à droite).

Conservation

La propriété essentielle de l'intensité spécifique est qu'elle se conserve lorsque le rayonnement se propage librement, c'est-à-dire sans interaction avec la matière. Pour le montrer, considérons, sur la figure **XVIII.2**,

²Dont on a dit que le maximum se situait aux alentours d'un millimètre de longueur d'onde.

³Les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{n} sont unitaires.

le passage de l'énergie radiative de l'élément de surface dS autour de la position \mathbf{x} , à un élément de surface dS' autour de \mathbf{x}' . L'énergie reçue par ce second élément de surface se met sous la forme suivante, $dE'_\nu = I_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{x}', t) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}') dS' d\nu d\Omega' dt$. Or, les angles solides $d\Omega$ et $d\Omega'$ sont, par définition,

$$d\Omega = \frac{dS'(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}')}{d^2} \quad \text{et} \quad d\Omega' = \frac{dS(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{d^2} \quad \text{où } d \text{ est la distance entre les points } \mathbf{x} \text{ et } \mathbf{x}'.$$

La conservation de l'énergie lors de la propagation libre du rayonnement implique alors que

$$dE'_\nu = dE_\nu \quad \text{soit, en substituant les expressions de } d\Omega \text{ et } d\Omega', \quad I_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{x}', t) = I_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t).$$

Lorsqu'en revanche il existe des interactions entre la matière et le rayonnement, l'intensité spécifique obéit à une équation intégral-différentielle qu'on écrira plus loin.

Relation avec les distributions des photons dans l'espace des phases

L'intensité spécifique est reliée aux distributions⁴ des photons dans l'espace des phases, comme le démontre [Shu, 1991]. En effet, ces distributions $f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$, définies comme le rapport du nombre de photons contenus dans l'élément de volume $d\mathbf{x}d\mathbf{p}$ centré autour de (\mathbf{x}, \mathbf{p}) à la taille de ce même élément de volume, sont reliées à l'énergie dE_ν par

$$dE_\nu = \sum_\alpha h\nu f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{x}d\mathbf{p} = \sum_\alpha h\nu f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \times c dt (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS \times p^2 dp d\Omega.$$

Or, la quantité de mouvement p d'un photon est proportionnelle à sa fréquence, soit $p = h\nu/c$, et donc

$$dE_\nu = \frac{h^4 \nu^3}{c^2} \sum_\alpha f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) dt (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS d\nu d\Omega \quad \text{d'où} \quad I_\nu = \frac{h^4 \nu^3}{c^2} \sum_\alpha f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{h\nu^3}{c^2} \sum_\alpha \mathcal{N}_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t),$$

en introduisant le nombre moyen d'occupation des états, $\mathcal{N}_\alpha = h^3 f_\alpha$. Ce nombre moyen suit la distribution de Bose-Einstein dans le cas des photons, qui sont des bosons (voir le **XVIII.5.a**).

XVIII.2.b Les moments de l'intensité spécifique

La résolution complète de l'équation de transfert, qui dépend des trois variables de position \mathbf{x} , des deux angles définissant la direction \mathbf{u} , de la fréquence ν et du temps, n'est pas toujours nécessaire, et il peut être suffisant, et en tous les cas utile, de commencer par s'affranchir de la dépendance en \mathbf{u} , en introduisant les trois premiers moments de l'intensité par rapport à la direction de propagation, soit

$$cU_\nu = \int I_\nu d\Omega \quad \mathbf{F}_\nu = \int \mathbf{u} I_\nu d\Omega \quad \text{et} \quad c\mathbf{P}_\nu = \int (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) I_\nu d\Omega,$$

ce qui fait apparaître respectivement la densité d'énergie U_ν du champ de rayonnement, son flux⁵ \mathbf{F}_ν , ainsi que le tenseur de la pression de radiation \mathbf{P}_ν , toutes ces quantités étant définies dans le cadre d'un champ monochromatique. On peut les intégrer sur la fréquence pour obtenir des quantités globales sur tout le spectre.

Dans le cas particulier d'un rayonnement isotrope, le flux est nul, et le tenseur de la pression de radiation est proportionnel au tenseur unité, la constante de proportionnalité étant $U_\nu/3$.

XVIII.3 Équation de transfert

XVIII.3.a Équation portant sur l'intensité spécifique

Lorsqu'un rayon lumineux se propage dans la matière, l'intensité spécifique ne se conserve pas, contrairement au cas libre. Grossièrement, on se convainc facilement que l'émission par les atomes la renforce,

⁴On parle de distributions au pluriel, car il en existe une pour chacun des deux états possibles du spin ($\alpha = \pm 1$).

⁵Il s'agit de la puissance traversant une surface unité, dans un intervalle de fréquence unité, et dans toutes les directions. En radioastronomie, on l'exprime le plus souvent en Janskys, avec $1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1}$.

tandis que l'absorption l'affaiblit. On peut formaliser cette idée en écrivant que l'intensité spécifique varie au cours de sa propagation, du fait d'un terme source Σ_ν et d'un terme puits Π_ν . En repérant la position sur le parcours de la lumière par une abscisse curviligne s , on a

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \Sigma_\nu + \Pi_\nu \quad \text{soit} \quad \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) I_\nu = \Sigma_\nu + \Pi_\nu \quad \text{en se plaçant du point de vue lagrangien.}$$

Les formes respectives des termes Σ_ν et Π_ν doivent être déterminées à partir de la considération des différents phénomènes susceptibles de modifier l'intensité spécifique, à savoir l'émission, l'absorption et la diffusion, comme le montre schématiquement la figure **XVIII.3**.

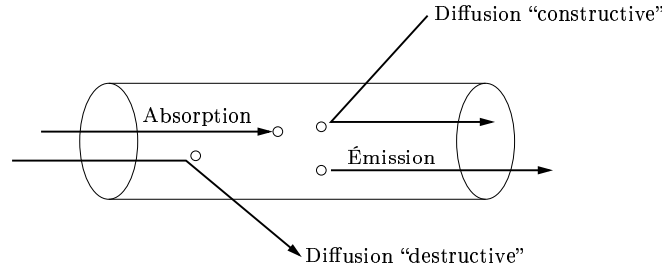


FIG. **XVIII.3** – Illustration des diverses causes de variation de l'intensité spécifique

On prend en compte l'émission de rayonnement, par les espèces présentes au point considéré, sous la forme d'un terme \mathcal{E}'_ν , fonction de la densité massique ρ_m et de l'émissivité par unité de masse j_ν ,

$$\mathcal{E}'_\nu = \frac{1}{4\pi} \rho_m j_\nu \quad \text{le facteur} \quad \frac{1}{4\pi} \quad \text{assurant que la quantité} \quad \mathcal{E}'_\nu \quad \text{est bien définie par unité d'angle solide.}$$

L'absorption se met quant à elle sous une forme assez semblable, à ceci près qu'elle est également proportionnelle à l'intensité spécifique du rayonnement,

$$\mathcal{A}_\nu = -\rho_m \kappa_\nu^a I_\nu \quad \text{l'opacité} \quad \kappa_\nu^a \quad \text{étant égale à la section efficace d'absorption par unité de masse.}$$

En ce qui concerne la diffusion⁶, elle intervient à la fois dans le terme puits, en déviant une partie du rayonnement de la direction de propagation considérée vers d'autres directions, mais aussi dans le terme source, puisque réciproquement, des photons se propageant dans des directions quelconques peuvent être diffusés dans la direction \mathbf{u} . On a donc deux termes,

$$\mathcal{D}_\nu = -\rho_m \kappa_\nu^d I_\nu + \rho_m \kappa_\nu^d \int \phi_d(\mathbf{u}', \mathbf{u}) I_\nu(\mathbf{u}') d\Omega',$$

où κ_ν^d est la section efficace de diffusion par unité de masse, intégrée sur toutes les directions, et $\phi_d(\mathbf{u}', \mathbf{u}) d\Omega'$ représente la probabilité de diffusion de la direction \mathbf{u}' vers la direction \mathbf{u} .

In fine, puisque $\Sigma_\nu + \Pi_\nu = \mathcal{E}'_\nu + \mathcal{A}_\nu + \mathcal{D}_\nu$, nous avons l'équation de transfert régissant l'évolution de l'intensité spécifique sous la forme

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) I_\nu = \frac{1}{4\pi} \rho_m j_\nu - \rho_m \kappa_\nu^a I_\nu - \rho_m \kappa_\nu^d I_\nu + \rho_m \kappa_\nu^d \int \phi_d(\mathbf{u}', \mathbf{u}) I_\nu(\mathbf{u}') d\Omega'. \quad (93)$$

On peut simplifier cette écriture en introduisant $\kappa_\nu = \rho_m (\kappa_\nu^a + \kappa_\nu^d)$, coefficient d'opacité total par unité de volume, ainsi qu'une fonction source S_ν dépendant *a priori* de l'intensité spécifique,

$$S_\nu = \frac{\rho_m}{\kappa_\nu} \left[\frac{j_\nu}{4\pi} + \kappa_\nu^d \int \phi_d(\mathbf{u}', \mathbf{u}) I_\nu(\mathbf{u}') d\Omega' \right] = \frac{\mathcal{E}'_\nu}{\kappa_\nu} \quad \text{ce qui donne} \quad \frac{dI_\nu}{ds} = -\kappa_\nu (I_\nu - S_\nu). \quad (94)$$

Dans cette équation, on a introduit une émissivité \mathcal{E}_ν incluant les effets de la diffusion de \mathbf{u}' vers \mathbf{u} . Notons que le coefficient d'absorption κ_ν^a peut inclure une correction négative pour tenir compte de l'émission stimulée, qui est proportionnelle à I_ν et anisotrope. D'autre part, on utilise souvent la notion d'épaisseur ou de profondeur optique τ_ν , grandeur sans dimension définie par $d\tau_\nu = \kappa_\nu ds$.

⁶On ne parlera ici que de la diffusion cohérente, c'est-à-dire qu'on considérera que la fréquence du photon diffusé n'est pas modifiée, ce qui n'est pas vrai en général.

XVIII.3.b Équations portant sur les moments de l'intensité spécifique

En intégrant l'équation (93) sur la direction de propagation \mathbf{u} , on obtient l'équation d'évolution de la densité d'énergie, en remarquant que les contributions de la diffusion s'annulent,

$$\frac{\partial U_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_\nu = \rho_m (j_\nu - c\kappa_\nu^a U_\nu).$$

Cette équation traduit en fait la conservation de l'énergie. Sa résolution nécessite néanmoins de connaître le flux \mathbf{F}_ν , même si l'émissivité et le coefficient d'absorption sont connus. Pour trouver une équation donnant l'évolution du flux, on intègre cette fois l'équation (93) après l'avoir multipliée par \mathbf{u} , ce qui donne, d'après la démonstration de [Shu, 1991],

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{F}_\nu}{\partial t} + c \nabla \cdot \mathbf{P}_\nu = -\kappa_\nu \mathbf{F}_\nu.$$

Cette équation représente la conservation de la quantité de mouvement des photons. Elle comporte cependant une inconnue supplémentaire, le tenseur de la pression de radiation \mathbf{P}_ν , ce qui montre qu'on ne dispose pas d'un système d'équations fermé. En fait, quel que soit le moment dont on cherche l'équation d'évolution, celle-ci fait toujours apparaître une inconnue supplémentaire, dont le nombre de degrés de liberté va croissant. Il faudrait considérer l'infinité des moments de l'intensité spécifique pour représenter l'ensemble des propriétés de l'équation de transfert de départ. On est confronté à un problème semblable au fait que la connaissance de la distribution de probabilité d'une variable aléatoire est équivalente à celle de l'ensemble de ses moments. Or on sait qu'il suffit bien souvent de connaître les premiers moments pour avoir une bonne idée de la fonction de distribution. On serait donc satisfait de n'avoir à utiliser que les équations de conservation déjà écrites, et donc que les trois premiers moments U_ν , \mathbf{F}_ν et \mathbf{P}_ν . Mais pour cela il faut introduire une relation entre eux, de façon à fermer le système d'équations.

XVIII.4 Résolution de l'équation de transfert

XVIII.4.a L'approximation d'Eddington

Dans le cas où l'épaisseur optique est grande, c'est-à-dire si le libre parcours moyen des photons est petit devant les échelles macroscopiques du problème, les occurrences multiples de la diffusion, de l'absorption, et de l'émission font que le champ de rayonnement est quasi isotrope. C'est le cas dans les régions suffisamment profondes des étoiles, où l'épaisseur optique est si grande⁷ que le milieu réalise *de facto* un corps noir, dont l'intensité spécifique est donnée par la fonction de Planck [Diu *et al.*, 2000],

$$I_\nu \simeq B_\nu(T) = \frac{2\nu^2}{c^2} \frac{\epsilon}{\exp(\beta\epsilon) - 1} \quad \text{avec } \epsilon = h\nu \text{ et } \beta = \frac{1}{kT} \text{ à ne pas confondre avec l'indice spectral.}$$

On en déduit que la densité d'énergie et le tenseur de la pression de radiation sont liés,

$$\mathbf{P}_\nu \simeq \frac{4\pi B_\nu(T)}{3c} \mathbf{1} \simeq \frac{U_\nu}{3} \mathbf{1} \quad \text{où } \mathbf{1} \text{ désigne le tenseur unité.}$$

L'approximation d'Eddington, également appelée approximation de conduction de la radiation, consiste justement à prendre comme relation de fermeture cette dernière équation entre U_ν et \mathbf{P}_ν . Elle est en fait largement utilisée, pour la qualité des résultats qu'elle fournit, bien qu'elle ne soit formellement valide que dans le cas des grandes épaisseurs optiques.

XVIII.4.b Solution formelle

Quand l'épaisseur optique devient trop faible, on ne peut cependant plus utiliser l'approximation d'Eddington. Il faut revenir à l'équation de transfert (94), dont on peut chercher une solution sous une forme exponentielle, en considérant l'équation homogène associée,

$$\frac{dI_\nu}{ds} + \kappa_\nu I_\nu = 0 \quad \text{d'où } I_\nu(s) = I_\nu(0)e^{-\kappa_\nu s} \quad \text{soit aussi } I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu},$$

⁷Elle est de l'ordre de 10^{11} .

en introduisant la profondeur optique τ_ν , qu'on choisit nulle à l'abscisse $s = 0$ correspondant à la face arrière du milieu étudié. La méthode de variation de la constante fournit alors la solution formelle

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu)e^{-t_\nu} dt_\nu.$$

Le problème avec cette écriture, comme le souligne Shu [Shu, 1991], est que la fonction source dépend en fait directement de la position, et sa dépendance en l'épaisseur optique t_ν sera différente selon la fréquence ν et la direction d'incidence \mathbf{u} . Il est donc plus judicieux, en pratique, de travailler dans l'espace réel⁸,

$$I_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = I_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{x}_0) \exp[-\tau_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{x}_0)] + \int_{s_0}^s S_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{x}') \exp[-\tau_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{x}')] \kappa_\nu(\mathbf{x}') ds'$$

où \mathbf{x}_0 est le point d'entrée du rayonnement dans le milieu considéré.

XVIII.4.c Exemple d'une couche plan-parallèle homogène et finie

Il s'agit en fait du même modèle que celui étudié analytiquement dans la troisième partie, à savoir une couche plan-parallèle homogène, finie dans la direction z mais infinie dans les directions x et y . La face arrière du nuage correspond à $s = 0$ et $\tau_\nu = 0$. Sa face avant, la plus proche de l'observateur, à $s = H$ et $\tau_\nu = \tau_\nu^H$. L'intensité spécifique du rayonnement entrant par la face arrière, perpendiculairement à celle-ci, est notée I_0 , et on suppose qu'il n'existe pas de rayonnement entrant par la face avant. En sortie du nuage, on a alors, toujours dans la direction perpendiculaire au nuage⁹,

$$I_\nu(\tau_\nu^H) = I_0 e^{-\tau_\nu^H} + S_\nu (1 - e^{-\tau_\nu^H}), \quad (95)$$

la fonction source étant constante car le milieu est homogène. Si la couche est non émissive, seul le premier terme doit être pris en compte. On a alors une atténuation exponentielle du rayonnement incident. C'est le cas par exemple lorsqu'une source intense est observée à travers un nuage froid. Si la couche est émissive mais optiquement mince, on a, en plus de cette émission atténuée provenant de l'arrière du nuage, une émission égale à l'intégrale de l'émissivité sur la profondeur de la couche,

$$I_\nu(\tau_\nu^H) \simeq I_0 e^{-\tau_\nu^H} + S_\nu \tau_\nu^H = I_0 e^{-\tau_\nu^H} + \mathcal{E}_\nu H.$$

Enfin dans le cas optiquement épais, le rayonnement incident est complètement retiré du faisceau émergent, et le terme intrinsèque se réduit à la fonction source, soit $I_\nu(\tau_\nu^H) \simeq S_\nu$.

On peut résumer les résultats de cet exemple en disant que dans le cas mince on voit toute l'émissivité et la puissance du rayonnement en sortie est proportionnelle au volume, tandis que dans le cas épais, on voit la fonction source à la surface du nuage. Cet effet, combiné avec la prise en compte de l'inclinaison des rayons, permet d'expliquer l'assombrissement centre-bord du Soleil [Shu, 1991].

XVIII.5 Équilibre radiatif et équilibre thermodynamique local

XVIII.5.a Introduction et distributions classiques

On a déjà évoqué plus haut, lorsqu'on a introduit l'approximation d'Eddington, que le cas d'une grande épaisseur optique correspondait au fait que les photons, avant de pouvoir s'échapper du milieu, interagissent un grand nombre de fois avec la matière. La notion d'équilibre thermodynamique formalise cette idée, de façon très générale. Elle désigne l'état dans lequel se trouve un ensemble de particules et de photons, soumis à leurs interactions mutuelles, dans une enceinte fermée¹⁰. Dans cet état, tout processus est compensé par un processus inverse de même probabilité, de sorte qu'en particulier il existe, par seconde, autant d'atomes subissant une transition radiative d'un état A vers un état B que d'atomes subissant la transition radiative

⁸On oublie désormais la dépendance en temps, en supposant que le milieu est dans un régime stationnaire.

⁹Le cas des rayons inclinés d'un angle θ par rapport à la couche se traite exactement de la même façon, à ceci près que la profondeur optique doit être corrigée d'un facteur $(\cos \theta)^{-1}$.

¹⁰Ce qui revient à supposer une épaisseur optique infinie à toutes les longueurs d'onde

opposée, et de même pour les transitions collisionnelles entre ces deux états. On parle de microréversibilité des états.

Dans le cas de l'équilibre thermodynamique, les distributions des états quantiques, c'est-à-dire la probabilité qu'une particule d'un type donné soit dans un état donné, sont donc stationnaires, et suivant la famille à laquelle appartient cette particule, la distribution des états prend une forme bien spécifique. Si l'on a affaire à des fermions, tels que les électrons, définis comme étant les particules de spin demi-entier, le nombre moyen \mathcal{N}_α de particules de cette espèce se trouvant dans un état d'énergie ϵ est donné par la statistique de Fermi-Dirac,

$$\mathcal{N}_\alpha = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \quad \text{où } \mu \text{ est le potentiel chimique.}$$

Le paramètre α fait référence aux autres grandeurs relatives à la particule, notamment son état de spin. Quand les particules considérées sont des bosons, c'est-à-dire que leur spin est entier, la distribution des états est celle de Bose-Einstein,

$$\mathcal{N}_\alpha = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}.$$

On ne reviendra pas sur les conséquences que l'on tire de ces formes, à savoir le principe d'exclusion de Pauli concernant les fermions, et la possibilité d'une condensation de Bose des photons dans un seul état. On remarquera juste que la loi de Planck écrite plus haut n'est rien d'autre qu'une distribution de Bose-Einstein. Dans la limite classique, le nombre moyen de particules par état devient très petit devant un¹¹, et les deux distributions quantiques précédentes tendent vers la distribution de Maxwell-Boltzmann, soit $\mathcal{N}_\alpha = e^{-\beta(\epsilon-\mu)}$. Cette distribution est celle qui s'applique dans le cas de la distribution des vitesses des particules, mais également dans celui des populations des niveaux d'énergie quantifiés.

XVIII.5.b La loi de Planck et ses dérivées

Dans le cas de l'équilibre thermodynamique, l'intensité spécifique est donnée par la fonction de Planck, dont l'intégrale sur les fréquences fournit la loi de Stefan-Boltzmann,

$$I_\nu = B_\nu(T) = \frac{2\nu^2}{c^2} \frac{\epsilon}{\exp(\beta\epsilon) - 1} \quad \Longrightarrow \quad I = \int I_\nu d\nu = \frac{\sigma T^4}{\pi}.$$

La figure **XVIII.4** représente les courbes $B_\nu(T)$ pour différentes températures. On peut également définir une fonction de Planck par intervalle de longueur d'onde B_λ à partir de la relation $B_\lambda d\lambda = B_\nu d\nu$. Le maximum de B_λ se situe à une longueur d'onde λ_m inversement proportionnelle à la température, avec $\lambda_m \cdot T \simeq 2900 \mu\text{m}\cdot\text{K}$. Cette formule constitue la loi du déplacement de Wien¹². La loi de Planck admet deux expressions limites suivant la valeur du rapport $h\nu/kT$. Respectivement,

$$\text{la loi de Rayleigh-Jeans} \quad B_\nu \simeq \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{kT}{h\nu} = \frac{2kT}{\lambda^2} \quad \text{valable pour } h\nu \ll kT,$$

$$\text{et la loi de Wien} \quad B_\nu \simeq \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \quad \text{valable pour } h\nu \gg kT.$$

XVIII.5.c Différentes définitions de la température

C'est la loi de Rayleigh-Jeans qu'on utilise en radioastronomie, même à basse température, du fait des grandes longueurs d'onde qui sont en jeu¹³. L'intensité spécifique est alors proportionnelle à la température T . Dans le cas général, même en dehors de l'équilibre thermodynamique, on pourra définir une température dite température de brillance T_b telle que l'intensité spécifique à une fréquence ν donnée soit égale à celle,

¹¹On peut le voir en disant que les systèmes classiques sont issus de l'interaction d'un grand nombre de systèmes quantiques, chaque interaction provoquant une multiplication des états possibles.

¹²Le maximum d'émission du corps noir cosmologique à 3 K se situe ainsi à environ 1 mm de longueur d'onde.

¹³Inversement, la loi de Wien est utilisée en astronomie X.

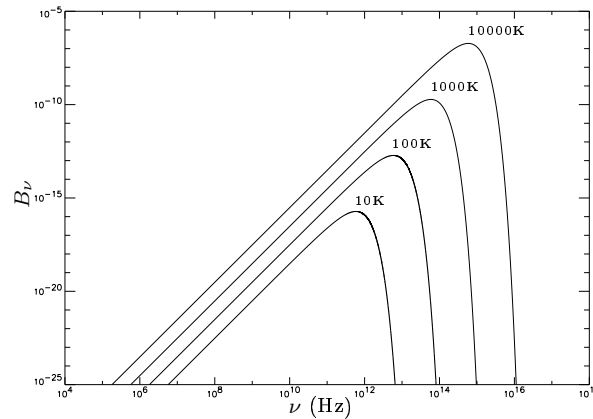


FIG. XVIII.4 – Loi de Planck $B_\nu(T)$ représentée en fonction de la fréquence, pour quatre températures comprises entre 10 K et 10000 K.

à cette même fréquence, d'un corps noir de température T_b , soit $I_\nu = B_\nu(T_b)$. Dans le cas général, cette température dépend donc de la fréquence. De même, on définit la température d'excitation T_{ex} comme la température d'un corps noir dont la fonction de Planck serait égale à la fonction source du milieu considéré $S_\nu = B_\nu(T_{\text{ex}})$, de sorte qu'on peut écrire la solution de l'équation de transfert comme

$$T_b = T_b(0)e^{-\tau_\nu^H} + T_{\text{ex}} \left(1 - e^{-\tau_\nu^H}\right).$$

La température d'excitation est en fait celle caractérisant les rapports entre les populations des différents niveaux d'énergie de l'espèce étudiée. On définit encore la température de couleur T_c comme la température du corps noir présentant les mêmes variations avec la fréquence que l'intensité spécifique, et enfin la température effective T_{eff} comme celle du corps noir dont le flux total serait égal à celui de la source, soit respectivement,

$$\frac{dI_\nu}{d\nu} = \frac{dB_\nu(T_c)}{d\nu} \quad \text{et} \quad F = \int |\mathbf{F}_\nu| d\nu = \pi B(T_{\text{eff}}) = \sigma T_{\text{eff}}^4.$$

Ces différentes définitions sont équivalentes lorsqu'on se place à l'équilibre thermodynamique. On écrira alors simplement T pour désigner toutes ces températures.

XVIII.5.d Loi de Kirchoff et équilibre thermodynamique local

On a dit que l'équilibre thermodynamique correspondait au fait que l'épaisseur optique devenait infinie à toutes les fréquences. D'après l'équation (95), cela revient à évaluer l'intensité spécifique et la fonction source¹⁴. Par conséquent, cette dernière est égale à la fonction de Planck, et l'émissivité est alors donnée par $\mathcal{E}_\nu = \kappa_\nu B_\nu(T)$, relation qui constitue la loi de Kirchoff.

Comme il est dit dans la note 14, l'intensité spécifique est constante dans le cas de l'équilibre thermodynamique, ce qui ne présente pas un grand intérêt. En revanche, si l'on suppose que les conditions d'un tel équilibre sont réalisées mais uniquement localement, avec des températures différentes suivant la position dans la source, il est possible d'avoir effectivement un transfert de rayonnement d'un point à un autre. C'est l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local (ETL).

Remarquons que cette hypothèse n'est valable le plus souvent que dans les couches profondes des étoiles et que les nuages interstellaires sont eux, loin de l'ETL¹⁵. Il faut alors traiter le problème de façon plus complexe, en étudiant les différents processus de transition entre les états.

¹⁴D'où aussi le fait que l'intensité spécifique ne varie pas le long du rayon lumineux.

¹⁵Sauf dans les régions les plus internes où les photons millimétriques ne s'échappent pas.

XVIII.6 Les raies spectrales

XVIII.6.a Processus de transition et probabilités d'Einstein

Les raies spectrales, qu'on peut observer en émission ou en absorption sur un fond continu, correspondent aux transitions radiatives entre les niveaux quantifiés des espèces présentes dans le milieu. Le rayonnement continu, quant à lui, est relié aux transitions impliquant au moins un état libre, et éventuellement les deux comme dans le cas du *Bremsstrahlung*.

Les processus radiatifs de transition entre deux états quantifiés n et m , d'énergies respectives U_n et U_m avec $U_m > U_n$, sont de trois types, l'émission spontanée, l'absorption, et l'émission induite, dite aussi émission stimulée. On les caractérise par des probabilités de transition dites probabilités d'Einstein, notées A_{mn} , B_{nm} et B_{mn} et définies de la façon suivante,

▷ Le nombre de transitions radiatives spontanées de m vers n par unité de volume et par seconde est $N_m A_{mn}$, où N_m est la densité volumique des particules dans l'état m .

▷ Le nombre d'absorptions de photons d'énergie $U_m - U_n$ impliquant une transition de n vers m , par unité de volume et par seconde, est $N_n J_{nm} B_{nm}$, où N_n est la densité volumique des particules dans l'état n et J_{nm} l'intensité moyenne du rayonnement à la fréquence $\nu = (U_m - U_n)/h$.

▷ Le nombre de transitions radiatives de m vers n , induite par un photon d'énergie $U_m - U_n$, par unité de volume et par seconde est $N_m J_{nm} B_{mn}$. Le photon émis est de même énergie que celui induisant la transition. Ce phénomène est l'une des bases de l'effet LASER.

Contrairement à ce que l'on croit souvent, le phénomène éminemment quantique parmi ces trois processus n'est pas l'émission induite, qui, bien qu'étant la plus récemment découverte, n'est autre que la face cachée de l'absorption, comme on peut s'en rendre compte en regardant la similitude des relations définissant B_{nm} et B_{mn} . C'est bien l'émission spontanée, qu'on peut rapprocher de la désintégration d'un noyau radioactif, qui est en fait fondamentalement quantique.

Les relations entre les différentes probabilités sont calculées à l'équilibre thermodynamique, sachant qu'on peut ensuite les utiliser dans le cas général. On ne fera pas ici ce calcul, renvoyant le lecteur aux ouvrages pertinents [Diu *et al.*, 2000]. Notons cependant que, dans le cas où les profils d'absorption et d'émission¹⁶ sont identiques, on peut montrer que le coefficient d'absorption κ_ν^a est proportionnel à la différence $N_n B_{nm} - N_m B_{mn}$, ce qu'on a déjà mentionné plus haut en disant que le coefficient d'absorption était corrigé par l'émission induite¹⁷.

XVIII.6.b Profils des raies et causes d'élargissement

Comme on l'a déjà implicitement évoqué au début de ce chapitre, les atomes ou les molécules qui constituent le milieu ont des vitesses différentes, à la fois en direction et en norme. La distribution des vitesses suit d'ailleurs une distribution gaussienne, comme on peut le déduire des résultats du **XVIII.5.a**. Considérons une raie en émission. Pour l'observateur, du fait de l'effet Doppler, les fréquences des photons émis sont également distribuées autour d'une valeur moyenne, correspondant à la vitesse moyenne des particules. Comme le décalage en fréquence est proportionnel à la vitesse¹⁸, on en conclut que la raie observée doit avoir un profil gaussien,

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_D} \exp\left[-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{2\sigma_D^2}\right] \quad \text{avec} \quad \sigma_D = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{kT}{m}},$$

m étant la masse des particules émettrices. En fait, la raie est encore élargie par les mouvements turbulents dans le gaz, ce qui augmente, parfois considérablement¹⁹, la largeur Doppler σ_D .

¹⁶Voir la sous-section suivante.

¹⁷Cette "correction" peut devenir prédominante dans le domaine radio lorsque la température d'excitation est élevée.

¹⁸On se place dans le cas non relativiste.

¹⁹On a déjà fait remarquer que les largeurs de raie dans les nuages moléculaires étaient fortement suprathermiques. Il faut aussi noter que le fait que les mouvements soient turbulents n'est aucunement nécessaire, on voit très bien l'élargissement des raies en observant des galaxies en rotation...

Imaginons cependant qu'on supprime à la fois la turbulence et l'élargissement thermique, en fixant les atomes à des positions données. La raie spectrale n'en sera pas pour autant infiniment minces. Il existe toujours une largeur intrinsèque, d'origine quantique. En effet, le principe d'incertitude de Heisenberg affirme que l'énergie d'un niveau n'est pas connue avec une précision infinie, et que l'incertitude δU sur cette valeur est inversement proportionnelle à la durée de vie t_v du niveau, soit $\delta U \cdot t_v \sim \hbar$. Par conséquent, le photon émis lors de la transition entre deux niveaux discrets possède une énergie, et donc une fréquence, entachée d'une certaine incertitude, d'où un élargissement des raies. On peut calculer que le profil résultant est du type lorentzien,

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\pi} \frac{\delta}{\delta^2 + (\nu - \nu_0)^2} \quad \text{où} \quad \delta = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{t_m} + \frac{1}{t_n} \right),$$

t_m et t_n étant respectivement les durées de vie des niveaux m et n impliqués dans la transition.

Enfin, l'existence de collisions entre les particules, qui modifient la durée de vie des niveaux en entraînant des transitions entre états, peut à son tour provoquer un élargissement des raies, qui sera lui aussi de forme lorentzienne, où la constante δ de l'équation précédente est remplacée par une quantité dépendant inversement de la durée moyenne entre collisions. La mesure de cet élargissement permet donc en théorie de remonter aux conditions de température, de densité ou encore d'ionisation.

En définitive, le profil des raies spectrales, qu'il s'agisse de raies en absorption ou en émission, est issu de la combinaison de ces divers effets d'élargissement. Il faut donc, pour calculer la forme de ce profil, procéder à la convolution successive de deux lorentziennes et de deux gaussiennes. Or, la convolution de deux lorentziennes est encore une lorentzienne, et de même la convolution de deux gaussiennes est aussi une gaussienne. Il s'agit donc de convoluer une lorentzienne de coefficient d'amortissement δ par une gaussienne de variance σ , ce qui donne un profil dit profil de Voigt,

$$H(a, u) = \frac{a}{\pi} \int \frac{e^{-y^2}}{a^2 + (u - y)^2} dy \quad \text{avec} \quad a = \frac{\delta}{\sqrt{2}\sigma} \quad \text{et} \quad u = \frac{\nu - \nu_0}{\sqrt{2}\sigma},$$

l'intégrale étant prise sur l'ensemble de la droite réelle. Les valeurs de ce profil sont tabulées en fonction des paramètres a et u , ce qui permet de retrouver les profils sous-jacents à partir des observations. Remarquons cependant qu'étant donné que la lorentzienne décroît plus vite que la gaussienne au centre de la raie, et qu'inversement elle a des ailes plus développées, il n'est pas étonnant qu'on observe que le profil gaussien domine au centre de la raie et que le profil lorentzien domine dans les ailes. En fait, ceci est vrai pour les transitions permises, mais pour les transitions interdites, étant donnée la petitesse du coefficient d'amortissement, liée à la grande durée de vie des niveaux, le profil gaussien domine dans la pratique sur l'ensemble de la raie.

XVIII.6.c Courbes de croissance

On vient de voir quelles sont les causes d'élargissement des raies spectrales et quels profils d'émission on est en droit d'attendre. Cependant, ces profils ne sont *a priori* valables que localement, et le transfert de rayonnement est susceptible de les modifier. En retour, au niveau de l'observateur, l'étude de l'intensité et du profil d'une raie spectrale doit en principe permettre de déterminer les conditions physiques régnant dans le milieu où elle s'est formée. Pour cela, on introduit la notion de largeur équivalente W , définie comme le rapport entre l'intégrale du profil de la raie et l'intensité du continuum sous-jacent au centre de la raie [Spitzer, 1978]. Dans le cas d'une raie en absorption, on écrira donc

$$W = \int \frac{I_c - I_\nu}{I_c} d\lambda \quad \text{où} \quad I_c \text{ représente l'intensité spécifique du continuum.}$$

On peut montrer [Mihalas, 1978], en prenant par exemple le cas très simple d'une source de rayonnement continu située derrière un nuage homogène, purement absorbant dans la raie spectrale mais non absorbant dans le continu, que le rapport entre la largeur équivalente et la largeur Doppler σ_D a la forme

$$\frac{W}{\sigma_D} = \frac{\sqrt{2}\lambda_0^2}{c} \int \{1 - \exp[-\tau_0 H(a, u)]\} du \quad \text{où} \quad \lambda_0 \text{ est la longueur d'onde centrale de la raie.}$$

Le coefficient τ_0 est l'épaisseur optique au centre de la raie, qui est proportionnelle à la densité de colonne le long de la ligne de visée. La valeur de cette épaisseur optique détermine le comportement du profil de la raie. Si par exemple elle est très petite devant un, le cœur Doppler domine et le rapport W/σ_D devient simplement proportionnel à la densité de colonne. En revanche, lorsque le nombre de particules sur la ligne de visée devient grand, et que l'épaisseur optique τ_0 devient grande devant $1/a$, la raie est saturée jusqu'aux ailes lorentziennes, et on peut montrer que la largeur équivalente varie alors comme la racine carrée de la densité de colonne. Le passage d'un régime asymptotique à l'autre dépend de la valeur de la largeur Doppler. On peut donc construire théoriquement ce qu'on appelle une courbe de croissance pour chaque raie spectrale, montrant l'évolution de la largeur équivalente, rapportée à la largeur Doppler, en fonction de la densité de colonne, dont le comportement est schématisé par la figure XVIII.5. En pratique, en

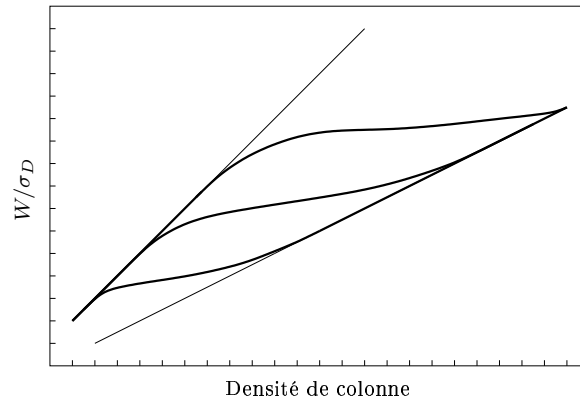


FIG. XVIII.5 – Allure des courbes de croissance en coordonnées log – log (traits gras) pour trois valeurs de la largeur Doppler. Les traits fins représentent les comportements asymptotiques à petite et grande densité de colonne.

comparant les différentes raies d'un même spectre, on peut construire des courbes de croissance empiriques, permettant de déterminer par exemple la vitesse turbulente caractéristique et la température du gaz. En supposant l'ETL réalisé, on peut également en déduire les populations des différents degrés d'ionisation d'un même élément. Il faut cependant bien voir que le calcul est compliqué par le fait que le milieu n'est pas en général purement absorbant, et que d'autre part il n'est pas nécessairement homogène.

XVIII.6.d Les milieux hors ETL

Le cas de l'équilibre thermodynamique local simplifie considérablement le problème du transfert radiatif, puisqu'alors la fonction source est donnée par la fonction de Planck. Pourtant, dans le cas des raies interstellaires, les densités sont beaucoup trop faibles pour qu'on puisse considérer que le milieu est à l'ETL²⁰. Dans ce cas de figure, on ne peut plus supposer la microréversibilité des états, et il faut considérer l'ensemble des processus de transition, qu'ils soient collisionnels ou radiatifs, et calculer simultanément, de façon cohérente, les populations des niveaux, la fonction source et l'intensité du rayonnement, sachant que toutes ces variables sont interdépendantes. Pour cela, on fait néanmoins l'hypothèse de stationnarité, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de phénomène faisant varier trop rapidement²¹ les conditions physiques dans lesquelles se forment les raies. Le calcul est en général très complexe et doit le plus souvent être fait numériquement, à l'aide de simulations Monte-Carlo. On va en reparler dans le chapitre suivant.

□

²⁰Du fait du transfert d'énergie des photons aux particules dans des collisions inélastiques, on peut également être proche de l'ETL si l'épaisseur optique est grande, même si la densité de particules ne l'est pas.

²¹C'est-à-dire plus vite que le temps moyen entre deux processus radiatifs ou collisionnels.

CHAPITRE XIX

Transfert radiatif stochastique

XIX.1 Introduction

On a brièvement parlé, dans le chapitre précédent, de la prise en compte des mouvements du gaz, en particulier de ses mouvements turbulents, dans le problème du transfert radiatif. On avait alors simplement dit que la turbulence du gaz émetteur provoquait un élargissement qu'on calculait comme une convolution du profil de la raie par une gaussienne de largeur σ_v représentant la vitesse turbulente moyenne, à savoir $\sigma_v^2 = E\{v^2\}$, où v est le champ de vitesse turbulent¹.

Cette approche est en fait bien trop grossière, car la vitesse turbulente σ_v ne peut constituer à elle seule une caractérisation complète du champ de vitesse. Imaginons en effet les deux cas particuliers suivants, pour lesquels on choisira la même valeur de σ_v . Considérons pour commencer le cas d'un champ de vitesse dont les fluctuations se font à très petite échelle. Les mouvements turbulents peuvent alors parfaitement être assimilés à une agitation thermique supplémentaire et traités comme tels. Le profil d'absorption et d'émission local est donc élargi, du fait de sa convolution par une gaussienne de largeur σ_v . En revanche, imaginons maintenant que le champ de vitesse présente des fluctuations de même amplitude, mais sur des échelles spatiales beaucoup plus grandes. Localement, la vitesse turbulente est quasiment la même partout, de sorte que le profil d'émission est inchangé. On observe donc la superposition des rayonnement issus de différentes régions du nuage, et c'est le profil émergent qui est cette fois convolué par la distribution des vitesses, laissant les largeurs équivalentes inchangées [Gail *et al.*, 1974].

Ces deux cas de figure extrêmes, bien que décrits par la même vitesse turbulente σ_v , ne donneront pas les mêmes raies observées. On parle respectivement de modèle microturbulent et de modèle macroturbulent. Quantitativement, on est dans le premier régime si l'échelle caractéristique du champ de vitesse, qu'on notera l_v , est petite devant le libre parcours moyen des photons, et on sera dans le second régime lorsque la condition réciproque sera remplie. Ces deux modèles ne sont cependant que des approximations, et il est nécessaire, pour pouvoir traiter le transfert radiatif dans le cas de nuages interstellaires turbulents réalistes, de comprendre les mécanismes du transfert lorsque l'échelle l_v de corrélation du champ de vitesse a une valeur finie. Les tentatives dans ce sens remontent aux années 1960, quand Traving [Traving, 1964] a proposé un modèle dans lequel le champ de vitesse était découpé en cellules de taille l_v , au sein desquelles la vitesse prenait une valeur uniforme v , et qui se déplaçaient indépendamment les unes des autres. Cependant, ce modèle est assez grossier, et bien qu'il redonne les régimes microturbulent et macroturbulent, dans les limites $l_v \rightarrow 0$ et $l_v \rightarrow \infty$ respectivement, on ne peut s'en satisfaire, ne serait-ce que parce que le champ de vitesse qui y est décrit est discontinu.

La principale difficulté, lorsqu'on souhaite incorporer un champ de vitesse turbulent dans le problème du transfert radiatif, provient essentiellement de la difficulté qu'il y a à inclure les fluctuations stochastiques de la vitesse, ainsi que ses corrélations, dans les représentations intégrales des intensités spécifiques. En effet, le coefficient d'absorption, qui dépend du champ de vitesse, y intervient à la fois dans l'émissivité² et dans le facteur exponentiel d'atténuation.

¹Comme on en a l'habitude, on notera v la composante longitudinale du champ de vitesse. C'est elle qui interviendra dans la suite, les rayons considérés étant dirigés vers l'observateur. La dispersion σ_v sera d'ailleurs celle de cette seule composante, soit $\sigma_v^2 = E\{v^2\} = (1/3)E\{v^2\}$ dans l'hypothèse isotrope.

²Qu'on se rappelle la loi de Kirchhoff.

XIX.2 Le modèle de Gail *et al*

XIX.2.a La méthode probabiliste

Le fait que le champ de vitesse turbulent soit par nature stochastique incite à traiter le problème de manière probabiliste. Cela n'est évidemment pas pour nous surprendre, étant donné que c'est cette approche qui a déjà été utilisée lorsque nous avons abordé le problème des centroïdes de vitesse dans la troisième partie. C'est également l'approche qui a été choisie au milieu des années 1970 par un groupe allemand, dont l'un des articles fondateurs présente la méthode de la façon suivante [Gail *et al.*, 1974].

On part de l'équation de transfert écrite sous la forme (94), qu'on redonne ici,

$$\frac{dI_\nu}{dz} = -\kappa_\nu [I_\nu(z) - S_\nu(z)],$$

la coordonnée z repérant la position le long d'un rayon lumineux. On suppose que les profils d'émission et d'absorption sont identiques. Ils dépendent de la vitesse locale, bien que cette dépendance ne soit pas explicitée dans l'équation ci-dessus. Comme le champ de vitesse est stochastique, le coefficient d'absorption au point z est aléatoire. À chaque fréquence, l'intensité spécifique en sortie du nuage est donc également aléatoire, et dépendante de la réalisation particulière du processus stochastique modélisant le champ de vitesse. Cependant, en admettant que ce processus est stationnaire et ergodique, et étant donné qu'il existe un grand nombre de lignes de visée dans un lobe instrumental, on peut supposer que les profils émergents sont donnés par l'espérance $E\{I_\nu(D)\}$ au point D marquant la sortie du nuage. C'est le but de la méthode de [Gail *et al.*, 1974] que de déterminer et de résoudre une équation portant sur cette espérance, en passant par la densité de probabilité de l'intensité spécifique. On rappelle en effet qu'à partir de cette distribution, l'espérance de l'intensité ainsi que tous les autres moments de cette dernière sont en théorie directement accessibles, comme on l'a montré au chapitre **IV**.

XIX.2.b Modélisation du champ de vitesse

L'hypothèse de base consiste à supposer que les variations de la vitesse, ainsi que celles de l'intensité spécifique, sont gouvernées par un processus markovien, c'est-à-dire que la probabilité de passer d'un état (v, I_ν) au point z à un état (v', I'_ν) au point z' ne dépend que de ces deux états, et non des conditions régnant entre les deux points z et z' . Il ne s'agit là que d'une approximation, car en vérité les probabilités de transition d'une vitesse à l'autre sont clairement dépendantes des conditions intermédiaires, du fait des contraintes imposées par l'hydrodynamique. Ce modèle a cependant l'avantage de permettre la considération de champs de vitesse continus, contrairement aux tentatives précédentes. Il suffit en fait de supposer le caractère markovien du processus décrivant le champ de vitesse, celui décrivant l'intensité spécifique étant alors également markovien du fait de l'équation de transfert. On suppose qu'en revanche le champ de radiation n'influe pas sur le champ de vitesse, en excluant donc le cas d'une turbulence alimentée par la pression de radiation.

En pratique, le champ de vitesse est modélisé par une équation de Langevin, dont on a parlé au chapitre **VIII**, caractérisée par un écart-type σ_v et une longueur de corrélation l_v ,

$$\frac{dv}{dz} = -\frac{v}{l_v} + \frac{\sigma_v}{\sqrt{l_v}} \Gamma_v(z) \quad \text{avec} \quad E\{\Gamma_v(z)\} = 0 \quad \text{et} \quad E\{\Gamma_v(z)\Gamma_v(z')\} = 2\delta(z - z'). \quad (96)$$

Γ_v représente la force de Langevin. Cette forme, d'après [Risken, 1989] et comme on l'a vu au chapitre **VIII**, implique que la distribution des vitesses $W_v(v)$ est une gaussienne de variance σ_v^2 et que la fonction d'autocorrélation des vitesses A_v prend une forme exponentielle,

$$W_v(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right) \quad \text{et} \quad A_v(r) = A_v(0) \exp\left(-\frac{r}{l_v}\right) = \sigma_v^2 \exp\left(-\frac{r}{l_v}\right)$$

La figure **XIX.1** montre deux exemples de champs de vitesse obtenus à partir de ce modèle. On remarque notamment que la taille caractéristique des structures en vitesse est reliée à la valeur de la longueur de corrélation l_v . Le lecteur trouvera plus de détails sur la construction de ces champs simulés au **XX.6**.

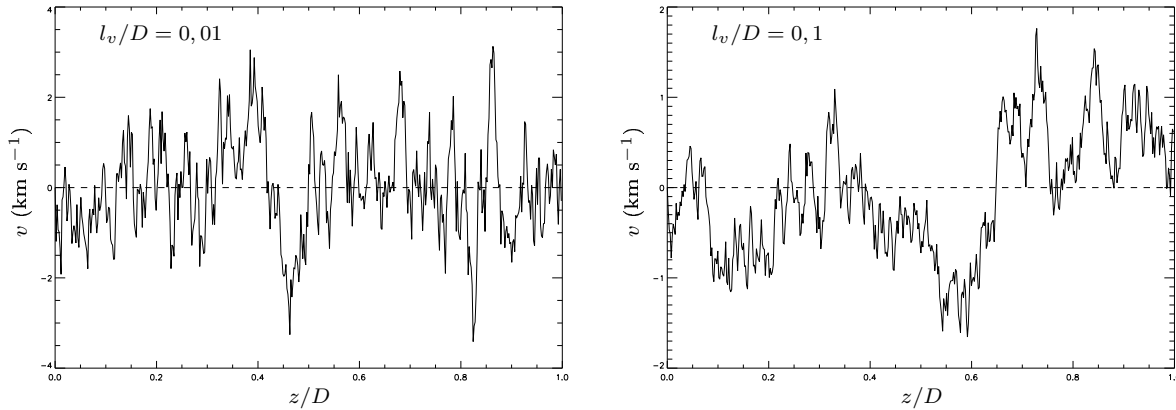


FIG. XIX.1 – Deux exemples de champs de vitesse construits à partir de l'équation de Langevin (96). Dans les deux cas, la dispersion des vitesses est prise égale à $\sigma_v = 1 \text{ km s}^{-1}$. Les longueurs de corrélation l_v sont indiquées sur chacune des deux figures. D est la longueur de la ligne de visée.

Cette description de la turbulence semble appropriée aux séparations r assez grandes, mais dans le domaine inertiel, la théorie de Kolmogorov indique que $A_v(0) - A_v(r) \propto r^{2/3}$, comme le montre l'équation (3), ce qui indique que le modèle n'est alors plus adéquat. Autrement dit, lorsque la séparation $z - z'$ devient petite mais non nulle, les forces de Langevin $\Gamma_v(z)$ et $\Gamma_v(z')$ ne sont pas décorrelées, contrairement à ce que suppose le modèle de l'équation (96). De toutes les manières, le point essentiel du modèle est de disposer d'un champ de vitesse continu, bien que peu réaliste physiquement.

XIX.2.c Équation de transfert généralisée

On notera $P(v, I_\nu; z)dv dI_\nu$ la probabilité qu'au point z la vitesse et l'intensité aient respectivement pour valeurs v et I_ν à dv et dI_ν près. L'espérance de l'intensité sera alors donnée par l'intégrale double

$$E\{I_\nu(z)\} = \iint I_\nu P(v, I_\nu; z) dv dI_\nu \quad (97)$$

Étant donné que la vitesse est modélisée par un processus de Ornstein-Uhlenbeck, comme le montre l'équation (96), et que l'équation de transfert peut également être vue comme une équation de Langevin de la forme (32) avec un terme stochastique nul,

$$\frac{dI_\nu}{dz} = -\kappa_\nu [I_\nu(z) - S_\nu(z)] + 0 \cdot \Gamma_{I_\nu}(z)$$

on peut appliquer les méthodes décrites au chapitre VIII, en posant $\mathbf{X} = (I_\nu, v)$ et en remarquant que le paramètre temps est ici remplacé par la position z . La densité de probabilité P suit alors une équation de Fokker-Planck, dont les coefficients de dérive et de diffusion sont donnés par

$$D_v = -\frac{v}{l_v} \quad D_{vv} = \frac{\sigma_v^2}{l_v} \quad D_{I_\nu} = -\kappa_\nu [I_\nu(z) - S_\nu(z)] \quad D_{I_\nu, I_\nu} = D_{v, I_\nu} = D_{I_\nu, v} = 0,$$

ce qu'il est aisé de retrouver à partir des formules établies au chapitre VIII, en prenant garde toutefois aux facteurs de normalisation, comme on l'avait déjà fait remarquer alors. L'équation de Fokker-Planck associée au processus bidimensionnel \mathbf{X} ainsi construit, décrivant l'évolution de la densité de probabilité P le long de la ligne de visée, est donc

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{l_v} \frac{\partial(vP)}{\partial v} + \frac{\sigma_v^2}{l_v} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} + \frac{\partial}{\partial I_\nu} [\kappa_0 \phi(I_\nu - S_\nu)P] \quad \text{en posant} \quad \kappa_\nu = \kappa_0 \phi. \quad (98)$$

Dans cette équation, κ_0 est le coefficient d'absorption au centre de la raie et ϕ est le profil d'absorption, supposé identique au profil d'émission. En introduisant l'épaisseur optique $\tau = \kappa_0 z$ ainsi que la vitesse

réduite $u = v/\sigma_v$, on peut écrire cette équation sous la forme

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{1}{\tau_v} \left[\frac{\partial(uP)}{\partial u} + \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \right] + \frac{\partial}{\partial I_\nu} [\phi(I_\nu - S_\nu)P] \quad \text{avec} \quad \tau_v = \kappa_0 l_v.$$

Comme on s'intéresse uniquement à l'espérance de l'intensité (97), il est légitime d'introduire le premier moment de la distribution de probabilité P par rapport à l'intensité,

$$Q_\nu(u; \tau) = \int_0^\infty P \left(\sigma_v u, I_\nu; \frac{\tau}{\kappa_0} \right) I_\nu dI_\nu \quad \text{qui est reliée à l'espérance par} \quad E \{I_\nu(z)\} = \int \sigma_v Q_\nu(u; \kappa_0 z) du.$$

L'équation d'évolution de ce moment est obtenue par intégration de l'équation sur P . Le membre de gauche ainsi que les dérivées par rapport à la vitesse réduite sont immédiats à calculer, et seul le terme dérivé par rapport à l'intensité spécifique requiert une intégration par parties,

$$\int_0^\infty I_\nu \frac{\partial}{\partial I_\nu} [\phi(I_\nu - S_\nu)P] dI_\nu = [I_\nu \phi(I_\nu - S_\nu)P]_0^\infty - \int_0^\infty \phi(I_\nu - S_\nu)P dI_\nu = -\phi(Q_\nu - W_v S_\nu),$$

puisque l'intégrale de P sur l'intensité spécifique redonne la distribution des vitesses W_v . Finalement, on a l'équation aux dérivées partielles régissant le moment Q_ν ,

$$\frac{\partial Q_\nu}{\partial \tau} = \frac{1}{\tau_v} \frac{\partial}{\partial u} \left(u Q_\nu + \frac{\partial Q_\nu}{\partial u} \right) - \phi(Q_\nu - W_v S_\nu),$$

qui constitue une équation de transfert généralisée, puisqu'elle décrit le comportement de l'intensité moyenne le long de l'axe des profondeurs optiques. Il s'agit alors de la résoudre en se donnant des conditions initiales, pour $\tau = 0$, caractérisant le champ de rayonnement à l'entrée du milieu, ainsi que des conditions aux limites en marge de la raie, soit pour $|u| \rightarrow \infty$.

XIX.2.d Remarques sur les méthodes de résolution

La résolution de l'équation de transfert généralisée fournit en principe toutes les informations qu'on pourrait souhaiter, puisqu'en définitive, le profil de raie émergent est justement donné, en fonction de ν , par l'intégrale de $Q_\nu(u; \tau_d)$ sur la vitesse, où $\tau_d = \kappa_0 D$ désigne la profondeur optique au niveau du point de sortie du rayonnement.

Solution formelle en termes matriciels

L'article de Gail *et al* [Gail *et al.*, 1974] donne plusieurs méthodes analytiques de résolution de cette équation. En premier lieu, il est suggéré de développer la fonction Q_ν sur une base de fonctions orthogonales dépendant de la seule coordonnée de vitesse, les coefficients du développement étant alors des fonctions de la profondeur optique τ uniquement,

$$Q_\nu(u; \tau) = \sum_{n \geq 0} T_n(\tau) \varphi_n(u) \quad \text{avec} \quad \varphi_n(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n!}} \frac{\partial^n}{\partial u^n} \left(e^{-u^2/2} \right), \quad \text{en particulier} \quad \varphi_0(u) = \sigma_v W_v(\sigma_v u).$$

L'insertion de cette forme dans l'équation de transfert fournit un système d'équations linéaires portant sur les fonctions T_n , ce qui permet de calculer celles-ci formellement, et de les mettre sous la forme

$$\mathbf{T}(\tau) = e^{-\tau \mathbf{A}} \mathbf{T}(0) \quad \text{où les éléments de la matrice } \mathbf{A} \text{ sont} \quad A_{mn} = \frac{m}{\tau_v} \delta_{mn} + \int \frac{\varphi_m(u) \phi(u) \varphi_n(u)}{\varphi_0(u)} du$$

On montre alors [Gail *et al.*, 1974] qu'on retrouve les conclusions des cas microturbulent et macroturbulent quand on passe aux limites respectives $\tau_v \rightarrow 0$ et $\tau_v \rightarrow \infty$. On peut d'ailleurs généraliser le résultat obtenu dans la limite microturbulente au cas d'une longueur de corrélation petite mais finie, ce qui permet de voir que le coefficient d'absorption a alors une valeur plus faible que dans le cas microturbulent, et les profils de raie sont alors plus aplatis.

Approche “quantique”

En fait, cette approche en termes de développement sur un ensemble de fonctions orthogonales ressemble à la résolution d'un problème quantique. D'ailleurs, l'intégrale écrite juste au dessus dans l'expression de A_{mn} est semblable à l'expression d'un élément de matrice $\langle m|\phi|n\rangle$ d'un opérateur quantique ϕ entre deux états m et n . Dans cette optique, [Gail *et al.*, 1974] propose une transformation de l'équation de transfert généralisée³ permettant de la mettre sous une forme identique à celle de l'équation de Schrödinger. Plus précisément, il s'agit d'introduire la fonction

$$R_\nu(u; \tau) = \exp\left(\frac{u^2}{4}\right) \frac{Q_\nu(u; \tau)}{S_\nu(\tau)} \quad \text{et de faire l'hypothèse que} \quad R_\nu(u; \tau) = X_\nu(\tau)U_\nu(u).$$

L'équation de transfert généralisée se traduit alors par l'égalité de deux membres dépendant chacun d'une seule des deux variables τ et u , et qui sont donc égaux à la même constante $-\epsilon$. On en tire une forme intégrale pour X_ν et on peut alors établir que U_ν suit une équation de Schrödinger, dont le potentiel dépend du profil ϕ ,

$$\frac{d^2 U_\nu}{du^2} + (\epsilon - V) U_\nu = 0 \quad \text{avec} \quad V(u) = \frac{u^2}{4} + \tau_v \phi(u) - \frac{1}{2}.$$

L'ensemble des solutions est discret, et celles-ci peuvent être reliées aux fonctions φ_n dans la limite $\tau_v \rightarrow 0$. Par rapport à la méthode matricielle, cette approche a l'avantage d'être valide pour les valeurs quelconques de τ_v , car on peut intégrer numériquement l'équation de Schrödinger. La fonction Q_ν est alors une superposition de solutions particulières de la forme $X_\nu U_\nu$, qu'on peut théoriquement calculer en fonction des conditions initiales et des conditions aux limites.

Dans le cas où $\tau_v \ll 1$, il est possible de faire un calcul analytique en appliquant les méthodes perturbatives bien connues en mécanique quantique, puisque $\tau_v \phi$ apparaît comme une petite perturbation du potentiel parabolique. On retrouve alors le comportement asymptotique aux faibles longueurs de corrélation obtenu par l'approche matricielle.

XIX.3 Simulations numériques

XIX.3.a Introduction

Dans un article suivant [Gail & Sedlmayr, 1974], Gail et Sedlmayr ont appliqué cette méthode au cas de raies du fer et de l'oxygène atomiques (FeI et OI) formées dans la photosphère solaire. L'intégration numérique directe de l'équation de transfert généralisée donnant le profil des raies, et donc les largeurs équivalentes et les courbes de croissance théoriques, il est possible de comparer les résultats obtenus aux observations disponibles dans le cas du Soleil. Remarquons tout d'abord que pour des raisons de stabilité numérique, ils introduisent la fonction q_ν , définie par

$$Q_\nu(u; \tau) = W_\nu(\sigma_\nu u) q_\nu(u; \tau) \quad \text{dont l'équation d'évolution est} \quad \frac{\partial q_\nu}{\partial \tau} = \frac{1}{\tau_v} \left(-u \frac{\partial q_\nu}{\partial u} + \frac{\partial^2 q_\nu}{\partial u^2} \right) - \phi(q_\nu - S_\nu),$$

et c'est cette équation aux dérivées partielles qui est résolue, étant données les conditions initiales et les conditions aux limites. Celles-ci sont spécifiées, pour les premières, en posant qu'à l'entrée du nuage, soit pour $\tau = 0$, l'intensité conditionnelle q_ν est donnée par la fonction de Planck B_ν , pour une certaine température T_0 , et pour les secondes, en se donnant une intensité du continu, notée I_ν^c , et en posant que q_ν tend vers I_ν^c pour $|u| \rightarrow \infty$. D'un point de vue pratique, les paramètres de l'équation de transfert (coefficient d'absorption au centre de la raie et fonction source en particulier) sont donnés par un modèle d'atmosphère [Holweger, 1967].

³Correspondant en fait à considérer que l'on peut séparer les variables τ et u , ce qui est d'ailleurs déjà fait implicitement quand on a écrit $Q_\nu(u; \tau)$ en fonction des $T_n(\tau)$ et des $\varphi_n(u)$.

XIX.3.b Profils de raie

La figure **XIX.2** montre les profils des raies d'absorption de l'oxygène à 7771 Å et du fer à 5576 Å ainsi calculés⁴, pour différentes valeurs de l_v et de σ_v . On voit que les profils d'absorption sont d'autant plus profonds et larges que la longueur de corrélation de la vitesse est plus petite. Ceci reste vrai tant qu'on n'a pas atteint l'une des deux limites, macroturbulente ou microturbulente, pour lesquelles le profil d'intensité devient en pratique indépendant de l_v . D'après les résultats de [Gail & Sedlmayr, 1974], la transition microturbulente est atteinte pour $l_v \leq 1$ km en ce qui concerne la raie de l'oxygène et pour $l_v \leq 10$ km en ce qui concerne celle du fer. Réciproquement, la limite macroturbulente se situe aux alentours de $l_v \geq 1000$ km pour l'oxygène et $l_v \geq 3000$ km pour le fer.

Étant donné que le champ de vitesse turbulent se superpose à l'agitation thermique, son influence est plus grande sur les raies d'éléments dont la dispersion thermique est plus petite, ce qu'on confirme ici⁵. Pour les dispersions de vitesse turbulente inférieures à la dispersion thermique (cas des panneaux (a) et (e) de la figure **XIX.2**), c'est l'agitation thermique qui domine l'élargissement des raies, et la structure du champ de vitesse turbulent, c'est-à-dire la valeur de l_v , n'a qu'une importance secondaire, tous les profils étant sensiblement identiques. En revanche, lorsque σ_v domine la dispersion thermique, comme c'est le cas sur les panneaux (c), (d), (f), (g) et (h), les profils de raie sont assez différents les uns des autres suivant la longueur de corrélation, cet effet étant d'autant plus marqué que σ_v augmente. Par ailleurs, la structure du champ de vitesse n'a pas la même importance au centre de la raie et dans les ailes. Les résultats de [Gail & Sedlmayr, 1974] montrent que, si pour les petites longueurs de corrélation, l'ensemble de la raie est effectivement formé dans les conditions de microturbulence, en revanche, lorsque l_v est assez grand, le régime macroturbulent se fait d'abord et essentiellement sentir dans les parties du profil d'absorption présentant les gradients les plus forts en fonction de $\Delta\lambda$, avant de se faire sentir au centre de la raie et dans les ailes.

On remarque enfin que dans les ailes des raies, l'absorption devient faible, et la structure du champ de vitesse perd son importance, d'où la convergence des différents profils.

XIX.3.c Largeurs équivalentes, profondeurs des raies, courbes de croissance

Conformément aux prédictions de [Gail *et al.*, 1974], c'est dans le régime microturbulent que les raies sont les plus profondes, ainsi que les plus larges, comme on le voit sur la figure **XIX.2**. C'est également la première remarque qu'on peut faire en considérant le panneau de gauche de la figure **XIX.3**, qui représente l'évolution de la largeur équivalente W_λ et de la profondeur⁶ r_0 au centre de la raie OI à 7771 Å, en fonction de la longueur de corrélation l_v d'une part, et de la vitesse turbulente σ_v d'autre part.

Le comportement observé est semblable pour les autres raies de l'oxygène et du fer [Gail & Sedlmayr, 1974]. On remarque que pour $\sigma_v \rightarrow 0$, la largeur équivalente ainsi que la profondeur de la raie deviennent indépendantes de la longueur de corrélation, ce qu'on a déjà souligné plus haut. L'élargissement de la raie est alors purement thermique. Dans ce cas, les raies présentent une profondeur maximale et une largeur équivalente minimale. Lorsque la dispersion des vitesses augmente, la largeur équivalente augmente et la profondeur de la raie diminue, de façon à peu près linéaire en fonction de σ_v .

En ce qui concerne les effets de la longueur de corrélation, on voit que dans la limite macroturbulente, représentée par des tirets sur les panneaux (a) et (c), la largeur équivalente devient indépendante de σ_v , ce que traduit également la convergence des courbes sur le panneau (b).

Les courbes de croissance correspondant à la transition à 5576 Å du fer atomique sont présentées sur le panneau de droite de la figure **XIX.3**, où $\ln(gf\epsilon)$ est le paramètre d'abondance de l'espèce en question. Chaque sous-figure correspond à une valeur de la longueur de corrélation et comprend quatre courbes représentant, de bas en haut, les cas $\sigma_v = 0$ km s⁻¹, $\sigma_v = 1$ km s⁻¹, $\sigma_v = 2$ km s⁻¹ et $\sigma_v = 3$ km s⁻¹. On remarque que lorsque l_v augmente les différentes courbes se rapprochent du cas purement thermique, qui est aussi le cas macroturbulent. Inversement, la limite microturbulente est celle pour laquelle les courbes de croissance sont les plus éloignées du cas purement thermique.

⁴Notons qu'il s'agit de profils calculés au centre du Soleil, la prise en compte de l'inclinaison des rayons si l'on souhaite s'intéresser aux raies observées sur les bords du disque étant très simple.

⁵La vitesse d'agitation thermique est inversement proportionnelle à la racine carrée de la masse de l'espèce chimique. Le fer étant plus lourd que l'oxygène, la formation de ses raies est donc plus susceptible d'être influencée par le champ de vitesse turbulent.

⁶Relativement au continu.

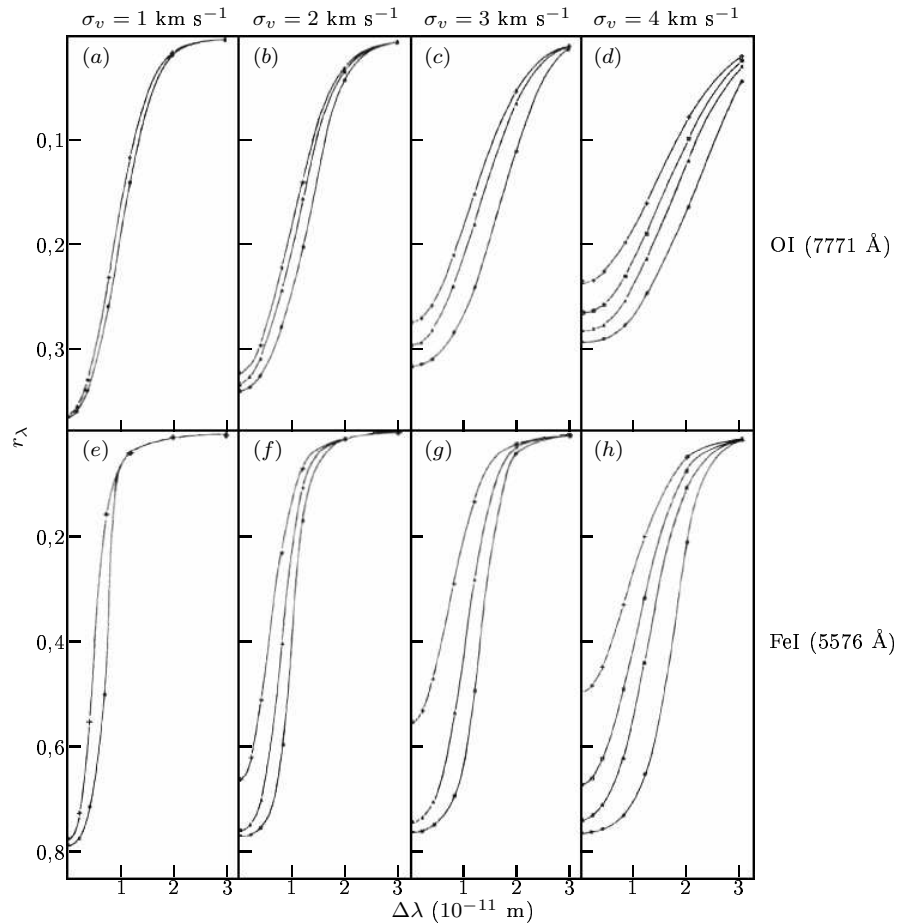


FIG. XIX.2 – Profils des raies d'absorption OI à 7771 Å (figures a – d) et FeI à 5576 Å (figures e – h) calculés par [Gail & Sedlmayr, 1974]. Comme il est usuel, seule la moitié de chaque profil est présentée, étant donné qu'ils sont symétriques. Le centre de la raie est situé à gauche de chaque sous-figure et r_λ représente l'absorption relative au continu. De gauche à droite, les figures correspondent aux cas $\sigma_v = 1 \text{ km s}^{-1}$, $\sigma_v = 2 \text{ km s}^{-1}$, $\sigma_v = 3 \text{ km s}^{-1}$ et $\sigma_v = 4 \text{ km s}^{-1}$. Dans chaque sous-figure, les différents profils correspondent à des valeurs différentes de l_v , comprises entre 1 km et 3000 km. Les profils les plus profonds correspondent aux longueurs de corrélation les plus petites. Figure issue de [Gail & Sedlmayr, 1974].

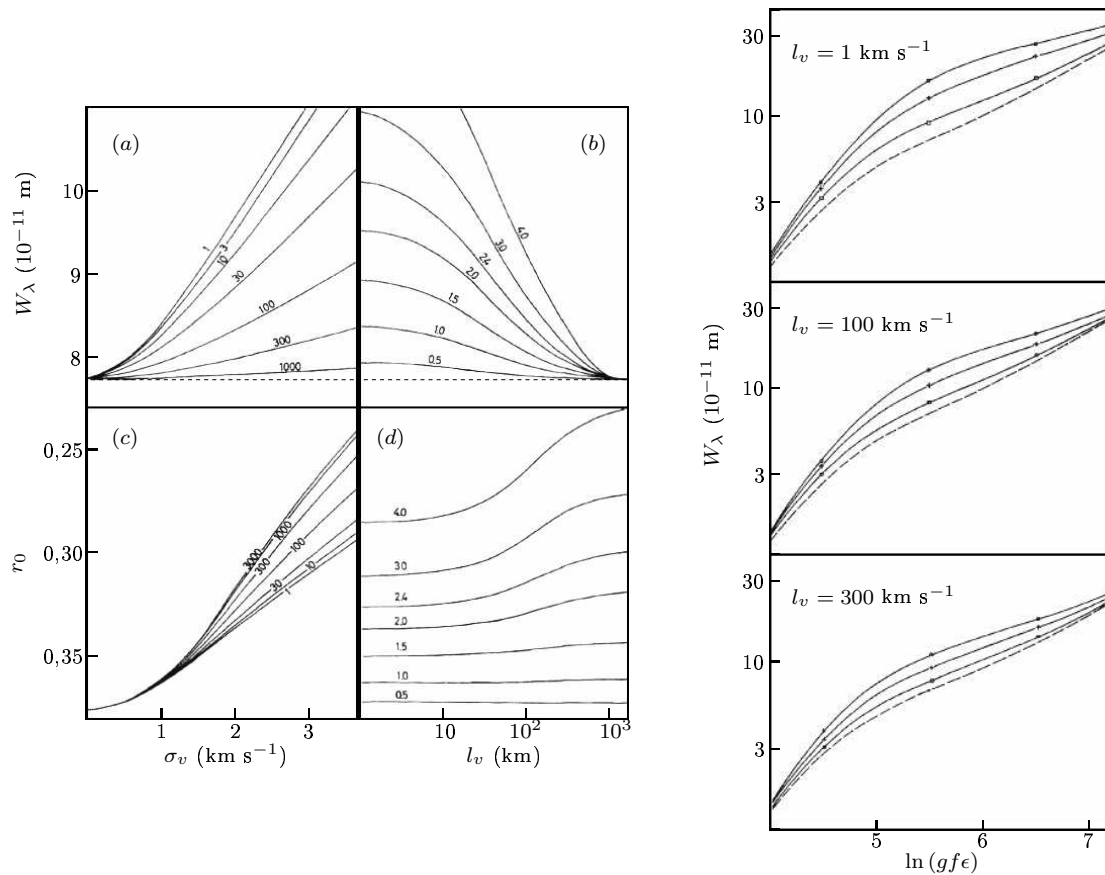


FIG. XIX.3 – Largeur équivalente et profondeur de la raie OI à 7771 Å en fonction des caractéristiques du champ de vitesse turbulent (à gauche) et courbes de croissance de la raie FeI à 5576 Å (à droite). Les chiffres indiqués sur les figures du panneau de gauche donnent la valeur de l_v lorsque les courbes sont tracées en fonction de σ_v , et réciproquement. Les courbes en tirets, sur les panneaux de gauche comme de droite, correspondent au cas macroturbulent, qui est identique au cas purement thermique. Figure issue de [Gail & Sedlmayr, 1974].

Ces courbes de croissance théoriques peuvent être mises à profit pour déterminer les caractéristiques du champ de vitesse ainsi que les abondances reproduisant au mieux les profils observés. Étant donné que les résultats de [Gail & Sedlmayr, 1974] concernent des raies formées dans la photosphère solaire, on ne les donnera pas ici, puisque les valeurs obtenues ne sont pas vraiment utiles à notre étude. En effet, les conditions régnant dans les nuages moléculaires du milieu interstellaire sont de toutes les manières très différentes de celles du modèle d'atmosphère qu'ils utilisent [Holweger, 1967].

XIX.4 Prise en compte des effets hors-ETL

XIX.4.a Introduction

On a effectivement dit, au chapitre précédent, que les raies interstellaires étaient très vraisemblablement formées dans des conditions hors équilibre thermodynamique local, étant données les faibles densités qu'on y trouve. La méthode exposée plus haut doit donc être adaptée à ce cas, c'est-à-dire qu'en sus de l'équation de transfert généralisée, il est nécessaire de résoudre simultanément les équations régissant l'évolution des populations des niveaux du fait des transitions radiatives et collisionnelles, tout en satisfaisant à la conservation des particules. Cette généralisation a été amorcée par [Gail *et al.*, 1975], puis essentiellement par [Albrecht & Kegel, 1987], dont on va présenter succinctement les résultats dans la suite. Remarquons également qu'il est justifié de chercher à étendre la méthode de [Gail *et al.*, 1974] au cas hors équilibre thermodynamique local parce que le libre parcours moyen des photons - qui est précisément lié à la notion

d'ETL - doit intuitivement dépendre de la structure du champ de vitesse, c'est-à-dire non seulement de la vitesse turbulente moyenne σ_v , mais également de la longueur de corrélation l_v .

XIX.4.b Équations d'évolution des populations

Considérons un ensemble de N particules de la même espèce, pouvant se trouver dans un certain nombre d'états discrets⁷. Étant donné qu'on s'intéresse à une transition bien particulière, deux de ces niveaux, notés m et p , joueront un rôle particulier. La variation de la population $\{n_k\}$ d'un niveau k est donnée par une équation de conservation, dont la forme est

$$\frac{dn_k}{dt} = \sum_j [n_j (C_{jk} + A_{jk}) - n_k (C_{kj} + A_{kj})] + \sum_j [n_j B_{jk} - n_k B_{kj}] J_{kj},$$

dont le membre de droite fait intervenir les coefficients d'Einstein A et B introduits au chapitre XVIII, ainsi que les probabilités de transition collisionnelle, notées C . Plus précisément, le membre de droite est composé de deux sommations portant sur les niveaux $j \neq k$, la première correspondant aux processus collisionnels ainsi qu'à l'émission spontanée, la seconde à l'absorption et à l'émission induite. Dans chacune des sommes, on fait la différence entre les processus remplissant le niveau k et ceux le vidant. Si l'on a séparé les deux sommes, c'est que l'absorption et l'émission induite font intervenir le champ de rayonnement, sous la forme du facteur

$$J_{kj} = \frac{1}{4\pi} \int \phi I_\nu d\Omega \quad \text{où } \phi \text{ est le profil normalisé d'émission et d'absorption de la transition.}$$

Quant au membre de gauche, il ne prend des valeurs non négligeables que si l'échelle de temps des variations macroscopiques n'est pas très grande devant le temps de relaxation des processus de transitions, qui est typiquement d'environ 10^{-8} s. Autant dire qu'on peut considérer que les populations $\{n_k\}$ sont constantes au cours du temps⁸, ce qui donne

$$p_k = \sum_j [n_j (C_{jk} + A_{jk}) - n_k (C_{kj} + A_{kj})] + [n_j B_{jk} - n_k B_{kj}] J_{kj} = 0 \quad \text{et} \quad p = \sum_k n_k - N = 0, \quad (99)$$

cette dernière équation traduisant la conservation des particules.

XIX.4.c Mise en œuvre de la généralisation du modèle

L'implémentation des équations du problème pose un certain nombre de questions pratiques, abordées en détail par [Gail *et al.*, 1975]⁹. En ce qui concerne les équations des populations, l'approche hors-ETL classique consiste à supposer que l'équilibre statistique représenté par les équations (99) est satisfait sur chaque élément de volume, mais uniquement pour la "valeur moyenne" de l'intensité I_ν , cette moyenne étant calculée sur l'ensemble des configurations possibles du champ de vitesse, ce qui revient à supposer que les équations (99) ne sont vérifiées qu'en moyenne sur tout l'espace des vitesses et des intensités. Cette approche semble par trop grossière, mais l'approche inverse, consistant à supposer que l'équilibre statistique est réalisé en tout point de cet espace, c'est-à-dire pour toutes les vitesses et toutes les intensités possibles, et qui permet d'éliminer purement et simplement les populations $\{n_k\}$ et de se ramener à une seule équation de transfert, est en fait difficile à utiliser, en particulier parce qu'elle aboutit à des équations hautement non-linéaires.

L'approche intermédiaire de [Gail *et al.*, 1975] consiste à n'imposer l'équilibre statistique qu'en tout point de l'espace des vitesses, mais en moyenne sur l'intensité. En pratique, on considère que les $\{p_k\}$ et p sont des variables du problème, et on s'intéresse à la densité de probabilité $P(v, I_\nu, \mathbf{p}, p; z)$ d'avoir, à la position

⁷On peut inclure le cas des transitions avec le continu sans difficulté.

⁸Ce qu'on doit comprendre dans le sens "quasi-statique". En effet le champ de vitesse varie au cours du temps, mais ses variations sont suffisamment lentes pour qu'à chaque pas de temps, on puisse calculer la solution du problème du transfert en supposant les populations constantes.

⁹On ne parlera pas ici du problème de la généralisation à des milieux bidimensionnels ou tridimensionnels, dont discute [Gail *et al.*, 1975]. On se placera toujours dans le cas à une seule dimension, par exemple celui d'une couche telle que celle utilisée dans le chapitre X, sans pour autant oublier que les rayons peuvent être inclinés sur l'axe.

z , une intensité spécifique I_ν à la fréquence ν donnée, une vitesse longitudinale turbulente v , des variations de populations $\{p_k\}$, qu'on a rassemblées sous une notation vectorielle \mathbf{p} , et un paramètre de conservation p . Dans cette optique, il est inévitable de supposer que les $\{p_k\}$ et p puissent prendre des valeurs nulles¹⁰, mais on impose néanmoins que leurs valeurs moyennes le soient. Finalement, les formes pratiques des équations d'évolution des populations ainsi que l'équation de conservation de la matière sont obtenues en appliquant à (99) l'opérateur intégral

$$\int P(v, I_\nu, \mathbf{p}, p; z) dp d\mathbf{p} dI_\nu \quad \text{d'où} \quad \sum_j [n_j (C_{jk} + A_{jk}) - n_k (C_{kj} + A_{kj})] W_v + [n_j B_{jk} - n_k B_{kj}] Q_{kj} = 0,$$

où l'on a fait apparaître la distribution des vitesses W_v , et où Q_{kj} est donnée par

$$Q_{kj} = \frac{1}{4\pi} \int \phi Q_\nu d\Omega \quad \text{sachant que} \quad Q_\nu = \int P I_\nu dp d\mathbf{p} dI_\nu \quad \text{et} \quad W_v = \int P dp d\mathbf{p} dI_\nu.$$

Le traitement de l'équation de transfert généralisée se fait exactement comme dans le cas de l'équilibre thermodynamique local, puisque les effets des populations des niveaux sont inclus dans la fonction source S_ν et dans le profil d'absorption et d'émission ϕ (voir le chapitre **XVIII**). De même, on peut introduire l'intensité conditionnelle $q_\nu = Q_\nu/W_v$ dont l'équation est toujours

$$\frac{\partial q_\nu}{\partial \tau} = \frac{1}{\tau_v} \left(-u \frac{\partial q_\nu}{\partial u} + \frac{\partial^2 q_\nu}{\partial u^2} \right) - \phi(q_\nu - S_\nu).$$

Comme c'est cette dernière quantité qu'on va en fait considérer, il convient de noter que les équations des populations peuvent s'écrire, en factorisant par la distribution des vitesses,

$$\sum_j [n_j (C_{jk} + A_{jk}) - n_k (C_{kj} + A_{kj})] + [n_j B_{jk} - n_k B_{kj}] \frac{1}{4\pi} \int \phi q_\nu d\Omega = 0. \quad (100)$$

Il faut noter que, dans cette approche, les nombres d'occupation $\{n_k\}$ ne dépendent plus seulement de la position z , mais également de la vitesse.

XIX.4.d Implémentation numérique

Comme on l'a déjà évoqué, le milieu étudié est nécessairement unidimensionnel, au sens où les variations considérées ne peuvent se produire que selon un axe z , ce qui n'empêche pas de considérer une couche turbulente comme on l'a fait au chapitre **X**, dès lors que celle-ci est homogène transversalement, dans le plan (Ox, Oy) . On peut alors inclure le traitement des rayons inclinés d'un angle θ sur l'axe z en faisant le simple changement de variable

$$d\tau \longrightarrow \frac{d\tau}{\mu} \quad \text{avec} \quad \mu = \cos \theta \quad \text{ce qui ne change pas fondamentalement les équations.}$$

Numériquement, [Gail *et al.*, 1975] traite le problème en choisissant un ensemble de fréquences (ν_1, \dots, ν_M) et de cosinus directeurs (μ_1, \dots, μ_P) , et en résolvant le système de $M \times P$ équations aux dérivées partielles sur l'intensité conditionnelle, simultanément avec les équations des populations et la conservation des particules. Les conditions initiales du système sont obtenues en supposant que l'intensité conditionnelle incidente à l'arrière de la couche suit une fonction de Planck, pour une certaine température T_0 , et qu'il n'existe pas de rayonnement incident au niveau de la face de sortie. En effet, la résolution proposée par [Gail *et al.*, 1975] consiste à séparer les rayons se déplaçant vers le demi-espace $z > 0$ de ceux allant dans le sens opposé. On a donc en fait deux systèmes de $M \times P/2$ équations de transfert, et il faut une condition initiale pour chacun de ces systèmes. Les conditions aux limites sont données pour les vitesses tendant vers l'infini, et spécifient que l'intensité conditionnelle devient alors égale à l'intensité du continu à la même fréquence.

¹⁰Sans quoi l'on se ramène à l'approche "rigide" évoquée plus haut.

On ne détaillera pas ici la méthode suggérée par [Gail *et al.*, 1975] pour résoudre ces systèmes. On se contentera de remarquer qu'elle revient à partir d'une estimation (par exemple issue d'un modèle à l'ETL) des intensités conditionnelles correspondant à $\mu < 0$, puis, en se déplaçant le long de l'axe z , à calculer les intensités correspondant à $\mu > 0$. La combinaison des intensités pour tous les angles est alors utilisée pour calculer le champ de rayonnement au point z et donc les populations. Après avoir atteint le bord extérieur du nuage on recommence en sens inverse jusqu'à obtenir la convergence. Par comparaison, la méthode de [Albrecht & Kegel, 1987] consiste à se donner une estimation des populations dans tout l'espace, à en déduire les coefficients d'absorption et la fonction source, qu'on utilise ensuite pour résoudre le système d'équations de transfert. Les intensités ainsi calculées donnent de nouvelles estimations des populations $\{n_k\}$, et on itère le processus jusqu'à atteindre un critère de convergence spécifié à l'avance.

XIX.4.e Résultats et analyse

Les premières simulations numériques de ce modèle hors équilibre thermodynamique local sont présentées par [Gail *et al.*, 1975] dans le cadre d'une approximation à deux niveaux et à deux rayons ($\mu = \pm 1$) de la transition à 5576 Å du fer atomique, déjà utilisée par [Gail & Sedlmayr, 1974]. Le paramètre caractérisant alors le caractère hors-ETL du modèle est le rapport $\varepsilon = C_{21}/A_{21}$ de dépopulation par collisions du niveau supérieur. On montre en effet que les équations de transfert généralisées incluent des termes de couplage entre les différentes fréquences et les différents angles, termes qui sont proportionnels à $(1 + \varepsilon)^{-1}$, de sorte que si ε est grand devant un¹¹, on a en fait un simple système d'équations exactement identiques à celles du cas de l'ETL. En revanche, si ε est inférieur ou de l'ordre de un, il faut traiter le cas hors-ETL.

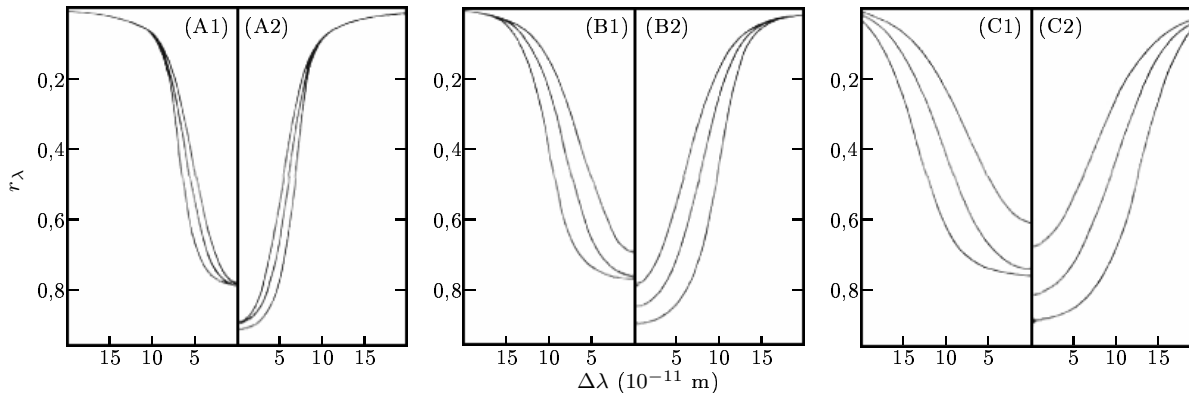


FIG. XIX.4 – Profils de raies d'absorption du Fe I à 5576 Å, dans le cas de vitesses turbulentes $\sigma_v = 1$ km s⁻¹ (figures A1 et A2), $\sigma_v = 2$ km s⁻¹ (figures B1 et B2) et $\sigma_v = 3$ km s⁻¹ (figures C1 et C2). Les figures A1, B1 et C1 correspondent à l'ETL, les figures A2, B2 et C2 au cas hors-ETL. Sur chacune des sous-figures, les trois courbes représentent, de bas en haut, les profils d'absorption dans le cas des longueurs de corrélation $l_v = 10$ km, $l_v = 100$ km et $l_v = 1000$ km, respectivement. Figure issue de [Gail *et al.*, 1975].

La figure XIX.4 montre, pour trois valeurs différentes de la vitesse turbulente σ_v et trois longueurs de corrélation l_v , la comparaison entre les cas ETL et hors-ETL, telle que calculée par [Gail *et al.*, 1975]. Sur chaque sous-figure, le profil le plus profond correspond au cas microturbulent. Que l'on soit dans le cas de l'équilibre thermodynamique local ou pas, on constate que les profils d'absorption sont de moins en moins profonds et de moins en moins larges quand la longueur de corrélation augmente, comme on l'avait remarqué au XIX.3.b. D'autre part, à l_v et σ_v identiques, le profil hors-ETL est plus profond que le profil ETL correspondant, en tous les cas au centre de la raie. On remarque en revanche que les ailes de raies sont sensiblement identiques dans les deux cas, ce qui suggère que celles-ci sont toujours formées à l'ETL.

XIX.4.f Le cas de l'émission de molécules CO

Albrecht et Kegel [Albrecht & Kegel, 1987] ont utilisé le modèle qu'on vient de décrire pour calculer numériquement les profils en émission de raies du monoxyde de carbone, modélisé par une molécule à six

¹¹Ce qui signifie que les processus collisionnels dominent les processus radiatifs.

niveaux d'énergie. Cette approximation décrivant relativement bien le diagramme d'énergie de CO, les profils obtenus sont pertinents pour l'étude des raies du monoxyde de carbone interstellaire.

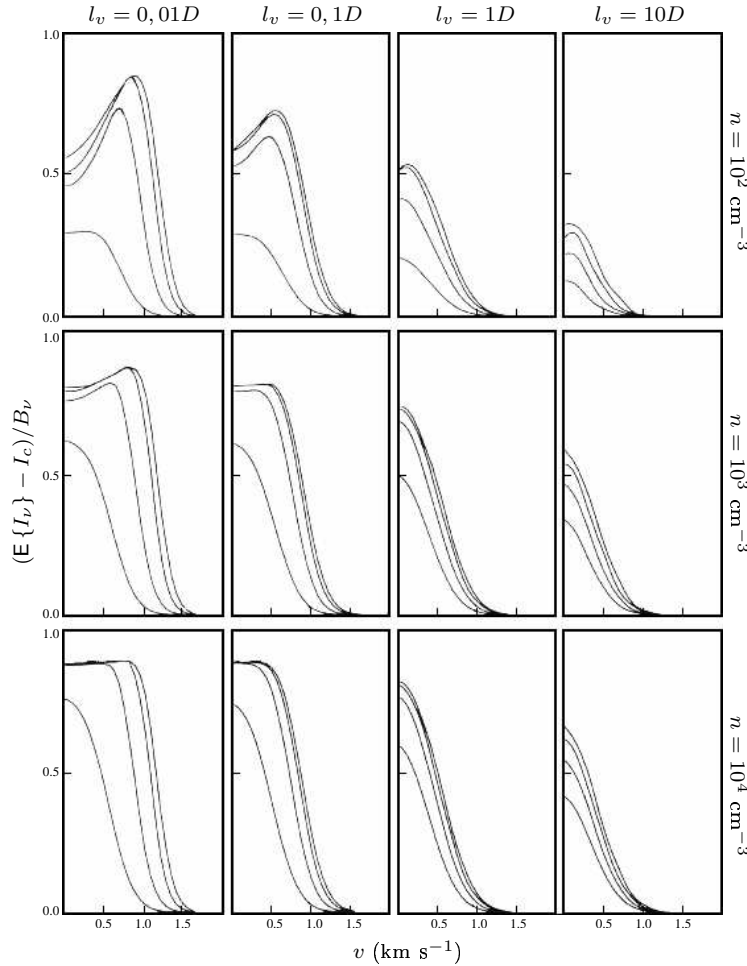


FIG. XIX.5 – Profils de raie calculés pour la transition $J = 1 \rightarrow 0$ du monoxyde de carbone. La vitesse turbulente σ_v est prise égale à $3\sigma_{\text{th}}$, pour $T_k = 10$ K. Les différentes sous-figures correspondent à différentes valeurs de la densité n et de la longueur de corrélation l_v , comme indiqué en regard, en rappelant que D est la profondeur de la couche turbulente. Sur chacune des sous-figures, les quatre courbes correspondent aux différentes densités de colonne de CO considérées, soit $N_{\text{CO}} = 10^{16} \text{ cm}^{-2}$, $N_{\text{CO}} = 10^{17} \text{ cm}^{-2}$, $N_{\text{CO}} = 10^{18} \text{ cm}^{-2}$ et $N_{\text{CO}} = 10^{19} \text{ cm}^{-2}$, en partant de la raie la moins intense. Figure issue de [Albrecht & Kegel, 1987].

On ne reviendra évidemment pas sur l'établissement de l'équation de transfert généralisée ni des équations régissant les populations des niveaux. La procédure numérique a également été décrite un peu plus haut, pour un modèle de nuage constitué d'une couche turbulente homogène¹² de largeur D . À la différence de [Gail *et al.*, 1975], le nuage est ici illuminé des deux côtés par le rayonnement du fond diffus cosmologique, lequel constitue en moyenne une fraction importante du rayonnement ambiant aux fréquences des transitions rotationnelles de CO. D'autre part, les faibles densités du milieu interstellaire justifient de prendre une gaussienne comme profil d'absorption et d'émission ϕ .

Les paramètres du problème sont la densité volumique n de particules, à savoir essentiellement celle des molécules de dihydrogène, la température cinétique T_k , la densité de colonne¹³ du monoxyde de carbone N_{CO} , et bien entendu les paramètres σ_v et l_v du champ de vitesse. En ce qui concerne leurs influences respectives, on remarquera que la densité du gaz n'intervient qu'au travers des probabilités de transition

¹²Ici, homogène signifie qu'il n'existe pas de fluctuations de densité, à ne pas confondre avec le caractère homogène de la turbulence évoqué dans le chapitre X.

¹³L'abondance de CO par rapport à H_2 est fixée, dans le modèle, à 10^{-5} .

collisionnelle¹⁴. La température cinétique, elle, détermine d'une part la largeur des coefficients d'absorption, et d'autre part les taux de collision, et donc les coefficients C_{jk} . Par ailleurs, la densité de colonne de CO joue d'un côté sur la probabilité d'échappement des photons (qui diminue lorsque N_{CO} augmente) et d'un autre côté sur l'émission des raies à haut J . En effet, lorsque les raies correspondant aux niveaux de basse énergie deviennent optiquement épaisses à grande densité de colonne, les niveaux excités correspondant sont plus facilement peuplés du fait des émissions et absorptions multiples, ce qui permet alors d'exciter les niveaux plus élevés. Enfin, on a déjà discuté de l'influence des paramètres du champ de vitesse au **XIX.3**.

Les figures **XIX.5** et **XIX.6** montrent certains des résultats obtenus par [Albrecht & Kegel, 1987], pour la transition $J = 1 \rightarrow 0$, la température cinétique étant égale à $T_k = 10$ K. Sur la figure **XIX.5**, on voit les profils de raie tracés pour différentes valeurs de la longueur de corrélation, de la densité de colonne de CO, et de la densité n du dihydrogène. La vitesse turbulente caractéristique est ici fixée à $\sigma_v = 3\sigma_{\text{th}}$, où σ_{th} est la dispersion de vitesse thermique. Sur ces profils, on remarque l'autoabsorption au centre de la raie, qui est particulièrement marquée dans le cas des plus petites longueurs de corrélation, mais qui disparaît presque complètement lorsque l_v augmente, ce qui pourrait expliquer le fait qu'en pratique on n'observe que très peu d'autoabsorption dans les raies interstellaires, contrairement à ce que prédisent les modèles hors-ETL microturbulents. D'autre part, les profils sont plus intenses et plus larges dans le cas des petites longueurs de corrélation, ce qui corrobore les résultats obtenus par [Gail *et al.*, 1975] pour des raies en absorption.

La figure **XIX.6** présente quant à elle les courbes de croissance de cette transition, correspondant aux mêmes densités n et à la même température cinétique. On considère deux valeurs pour la vitesse turbulente, soit $\sigma_v = \sigma_{\text{th}}$ et $\sigma_v = 3\sigma_{\text{th}}$. Chaque sous-figure regroupe les courbes de croissance calculées pour différentes longueurs de corrélation, tous autres paramètres étant égaux par ailleurs. Si l'interprétation de ces courbes, ainsi que des profils de raie, est assez délicate, on remarque quoi qu'il en soit que la valeur de la longueur de corrélation de la vitesse en modifie sensiblement l'aspect, ce qui suggère que l'interprétation des raies interstellaires doit en tenir compte pour accéder aux propriétés physiques des nuages.

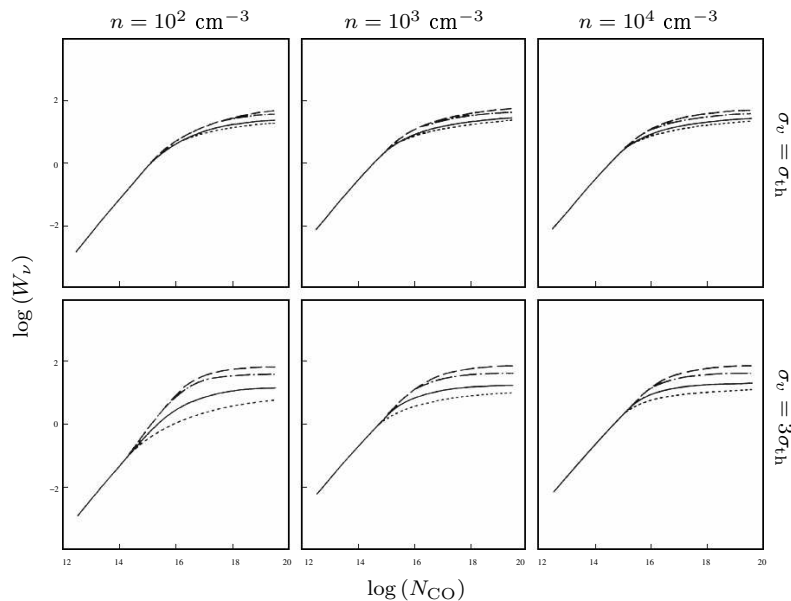


FIG. **XIX.6** – Courbes de croissance théoriques de la transition $J = 1 \rightarrow 0$ du monoxyde de carbone, calculées pour une température cinétique $T_k = 10$ K. La première ligne correspond au cas $\sigma_v = \sigma_{\text{th}}$, la seconde à $\sigma_v = 3\sigma_{\text{th}}$. Les différentes sous-figures regroupent les courbes obtenues pour les valeurs $l_v = 0, 0,01D$ (tirets), $l_v = 0,1D$ (trait mixte), $l_v = D$ (trait plein) et $l_v = 10D$ (pointillés) de la longueur de corrélation, la densité n variant d'une sous-figure à l'autre, comme indiqué. Figure issue de [Albrecht & Kegel, 1987].

¹⁴La densité critique de H_2 au-delà de laquelle les processus collisionnels dominant est d'environ 10^5 cm^{-3} .

XIX.5 Cas d'un milieu présentant des fluctuations de densité

XIX.5.a Introduction

Le milieu moléculaire froid et dense, dans lequel se forment les raies de CO discutées à la section précédente, présente une structure hétérogène en densité (voir le chapitre II). Or on vient de voir, dans le cas d'une couche homogène, que cette densité influe assez nettement sur les profils des raies. Il semble donc raisonnable, dans une nouvelle étape de généralisation du modèle de [Gail *et al.*, 1974], de chercher à inclure les effets d'un champ stochastique décrivant la densité n du dihydrogène dans le nuage. C'est ce que proposent Hegmann et Kegel [Hegmann & Kegel, 2000], tout en notant qu'il existe des modèles de transfert radiatif dans des milieux hétérogènes¹⁵. Mis à part cette amélioration, le travail de [Hegmann & Kegel, 2000] repose sur le même modèle de couche turbulente que [Albrecht & Kegel, 1987], et ils s'intéressent également aux raies d'émission de CO, représenté par un rotateur rigide à six niveaux d'énergie. On va maintenant décrire le champ de densité stochastique qu'ils introduisent, avant de donner quelques résultats.

XIX.5.b Champ de densité stochastique

Le modèle de [Gail *et al.*, 1974] reposait sur l'idée que l'équation de transfert pouvait se voir comme une équation de Langevin, dont le terme stochastique pur est nul, et qu'en prenant un champ de vitesse obéissant également à une équation de Langevin, on pouvait alors dériver une équation de Fokker-Planck portant sur la probabilité jointe de la vitesse et de l'intensité.

De même, si l'on introduit un champ de densité dont l'évolution le long de la ligne de visée est régi par une équation de Langevin, on pourra appliquer le même formalisme pour la probabilité jointe des trois variables intensité spécifique, densité et vitesse. Le problème qui se pose alors est de contraindre la positivité de la densité, ce que ne permet pas *a priori* l'équation de Langevin. On s'en sort en prenant comme variable, non pas la densité n proprement dite, mais son logarithme, en posant

$$\tilde{n} = \ln \left(\frac{n}{n_0} \right) \quad \text{où } n_0 \text{ est une densité de référence.}$$

C'est cette densité logarithmique qui est alors décrite par une équation de Langevin identique à celle régissant la vitesse, et caractérisée par une dispersion $\sigma_{\tilde{n}}$ et une longueur de corrélation $l_{\tilde{n}}$, qui sont des constantes indépendantes des autres paramètres du problème,

$$\frac{d\tilde{n}}{dz} = -\frac{\tilde{n}}{l_{\tilde{n}}} + \frac{\sigma_{\tilde{n}}}{\sqrt{l_{\tilde{n}}}} \Gamma_{\tilde{n}}(z) \quad \text{avec} \quad \langle \Gamma_{\tilde{n}}(z) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \Gamma_{\tilde{n}}(z) \Gamma_{\tilde{n}}(z') \rangle = 2\delta(z - z')$$

Remarquons qu'étant donné ce qui a été dit au chapitre VIII, la distribution des densités logarithmiques est gaussienne, comme la distribution des vitesses. Par conséquent, la distribution de la densité est lognormale, ce qu'on illustre sur la figure XIX.7, laquelle montre également des exemples de champs de densité le long d'une ligne de visée, pour deux valeurs de la dispersion $\sigma_{\tilde{n}}$.

On remarque notamment que plus cette dispersion est élevée, plus le gaz a tendance à être regroupé dans des entités denses, séparées les unes des autres par des régions peu denses. L'échelle caractéristique de variation de la densité est quant à elle donnée par la longueur $l_{\tilde{n}}$. Notons enfin que la densité moyenne le long de la ligne de visée est reliée à la densité de référence par

$$E\{n\} = n_0 \exp \left(\frac{\sigma_{\tilde{n}}^2}{2} \right) \quad \text{et en pratique c'est elle qu'on se donnera, plutôt que } n_0.$$

XIX.5.c Équation de transfert généralisée

Suivant ce qui a été fait au XIX.2.c, on considère la probabilité $P(v, \tilde{n}, I_\nu; z) dv d\tilde{n} dI_\nu$ pour qu'au point z la vitesse, la densité logarithmique et l'intensité aient respectivement pour valeurs v à dv près, \tilde{n} à $d\tilde{n}$ près,

¹⁵Toutefois, ces hétérogénéités sont représentées par un nombre fini de phases homogènes distinctes [Juvola, 1997].

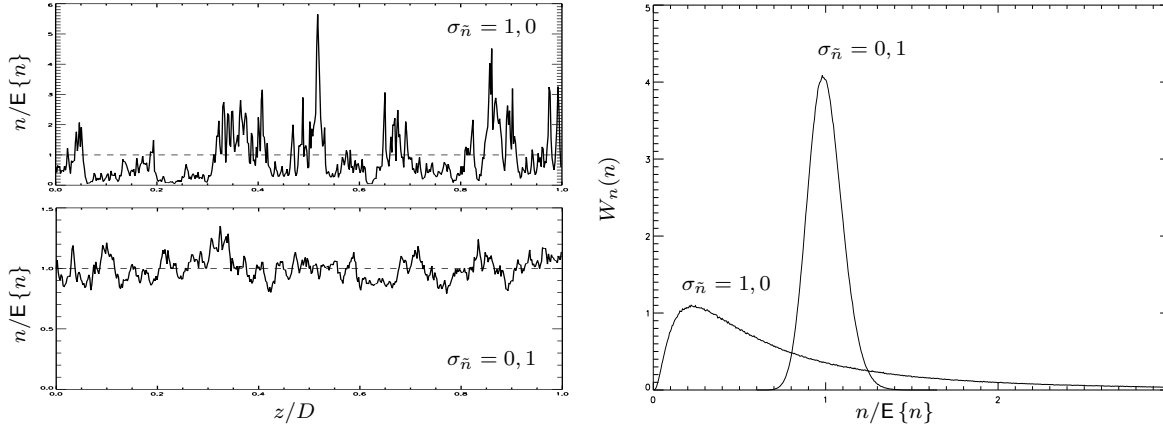


FIG. XIX.7 – Exemples de champs de densité le long d’une ligne de visée (à gauche pour deux valeurs de la dispersion $\sigma_{\tilde{n}}$) et distributions de probabilité correspondantes (à droite). Figure reproduite d’après [Hegmann & Kegel, 2000].

et I_ν à dI_ν près. Étant donné que les différentes équations de Langevin portant sur ces trois variables ne sont pas couplées, l’équation de Fokker-Planck portant sur P est simplement¹⁶

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{l_\nu} \frac{\partial(vP)}{\partial v} + \frac{\sigma_v^2}{l_\nu} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} + \frac{1}{l_{\tilde{n}}} \frac{\partial(\tilde{n}P)}{\partial \tilde{n}} + \frac{\sigma_{\tilde{n}}^2}{l_{\tilde{n}}} \frac{\partial^2 P}{\partial \tilde{n}^2} + \frac{\partial}{\partial I_\nu} [\kappa_\nu(I_\nu - S_\nu)P], \quad (101)$$

où, par rapport à l’équation (98), on a juste ajouté les termes correspondant à la variable \tilde{n} , dont la forme est identique à celle des termes se rapportant à la vitesse. On n’introduira pas ici la vitesse réduite ou la profondeur optique, et les quantités Q_ν et q_ν seront cette fois dépendantes des variables z , v et \tilde{n} . En particulier, l’équation de transfert généralisée pour l’intensité conditionnelle q_ν est

$$\frac{\partial q_\nu}{\partial z} = \frac{1}{l_\nu} \left(-v \frac{\partial q_\nu}{\partial v} + \sigma_v^2 \frac{\partial^2 q_\nu}{\partial v^2} \right) + \frac{1}{l_{\tilde{n}}} \left(-\tilde{n} \frac{\partial q_\nu}{\partial \tilde{n}} + \sigma_{\tilde{n}}^2 \frac{\partial^2 q_\nu}{\partial \tilde{n}^2} \right) - \kappa_\nu (q_\nu - S_\nu) \quad (102)$$

Remarquons que l’espérance de l’intensité spécifique est maintenant donnée, en fonction de Q_ν - ou de q_ν - par une intégrale portant non seulement sur la vitesse, comme c’était le cas jusqu’à présent, mais également sur la densité logarithmique,

$$E\{I_\nu\} = \iint Q_\nu(v, \tilde{n}; z) dv d\tilde{n} = \iint q_\nu(v, \tilde{n}; z) W_v(v) W_{\tilde{n}}(\tilde{n}) dv d\tilde{n}$$

Dans le cas hors ETL, l’équation de transfert généralisée (102) doit être résolue simultanément avec les équations (100) donnant l’évolution des populations des niveaux, équations qui restent inchangées, si ce n’est que les nombres d’occupation dépendent maintenant aussi de la densité logarithmique \tilde{n} , en plus de la position et de la vitesse.

XIX.5.d Résultats

Le modèle utilisé par [Hegmann & Kegel, 2000] est le même que celui de [Albrecht & Kegel, 1987], soit une couche turbulente bidimensionnelle, homogène transversalement, et illuminée de chaque côté par le rayonnement du fond cosmologique. La température cinétique choisie est $T_k = 10$ K, et les densités moyennes du dihydrogène sont comprises entre 10^3 et 10^4 cm^{-3} , l’abondance du monoxyde de carbone étant fixée à $8 \cdot 10^{-5}$, valeur donnée par [Black & Willner, 1984]. Pour commencer, [Hegmann & Kegel, 2000] observe les effets de la seule structure en densité¹⁷, en prenant l’exemple d’un champ de vitesse microturbulent. Il apparaît que cette structure affecte bien le transfert radiatif, car, tout en se plaçant dans les conditions de

¹⁶Puisque les variables ne sont pas couplées, les coefficients de diffusion associés à deux variables distinctes sont nuls.

¹⁷Les effets de la turbulence sont alors assimilables à l’élargissement thermique.

l'ETL, l'intensité spécifique au centre de la raie $J = 1 \rightarrow 0$ diminue lorsqu'une des deux quantités $\sigma_{\bar{n}}$ ou $l_{\bar{n}}$ augmente, ce qu'on interprète en notant que les fortes valeurs de $\sigma_{\bar{n}}$ conduisent à des lignes de visée sur lesquelles le gaz est essentiellement concentré dans des nuages petits et denses, séparés les uns des autres par une distance de l'ordre de $l_{\bar{n}}$. Dans ce cas, on a un effet de dilution du rayonnement qui atténue la raie observée. D'autre part, les hétérogénéités de la densité ont également une influence sur les populations des niveaux, puisque les taux de collision dépendent directement de n^2 . Plus $\sigma_{\bar{n}}$ est grande, plus la fraction de gaz contenue dans des nuages denses est forte, et plus on se rapproche des conditions de l'ETL. C'est bien ce qu'on observe [Hegmann & Kegel, 2000].

La prise en compte d'un champ de vitesse turbulent possédant une longueur de corrélation finie aboutit à des profils de raie présentés sur les figures XIX.8 et XIX.9, correspondant respectivement aux transitions $J = 1 \rightarrow 0$ et $J = 4 \rightarrow 3$. Dans les deux cas, la densité de colonne du monoxyde de carbone est $N_{\text{CO}} = 2,4 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-2}$, la densité moyenne du gaz est $E\{n\} = 10^3 \text{ cm}^{-3}$ et la vitesse caractéristique de la turbulence est $\sigma_v = 10\sigma_{\text{th}}$. Les profils correspondant aux mêmes valeurs de $l_{\bar{n}}$ et l_v , qui sont prises entre 10^{17} et $2,5 \cdot 10^{18} \text{ cm}$, sont regroupés, les différentes courbes d'une même sous-figure représentant les différentes valeurs de la dispersion de la densité logarithmique, à savoir $\sigma_{\bar{n}} = 0, 1, \sigma_{\bar{n}} = 1, 0$ et $\sigma_{\bar{n}} = 2, 0$.

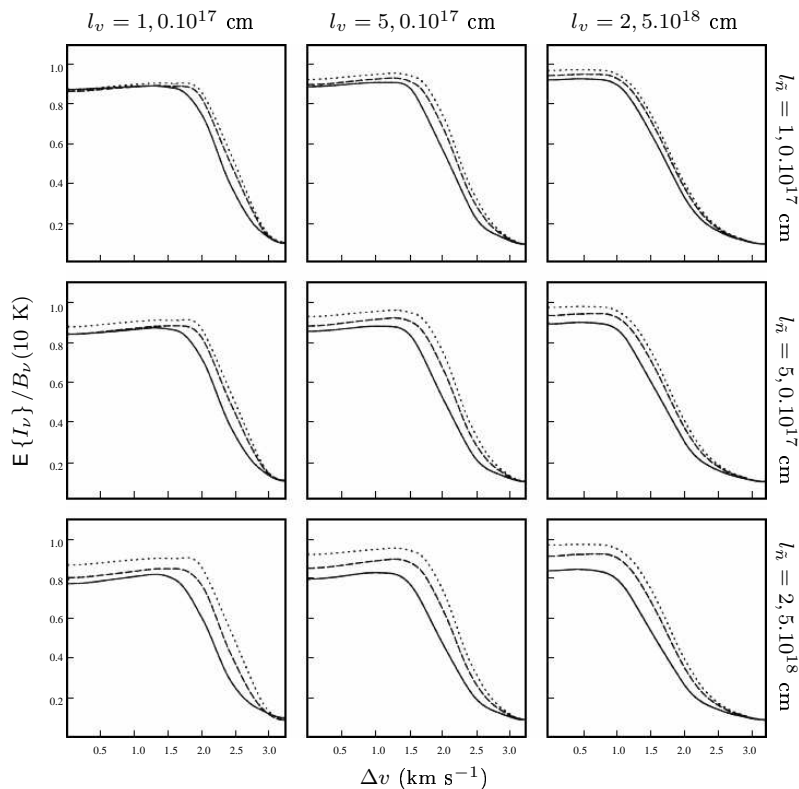


FIG. XIX.8 – Profils de raie pour la transition $J = 1 \rightarrow 0$ du monoxyde de carbone, calculés pour une température cinétique $T_k = 10 \text{ K}$, une densité moyenne $E\{n\} = 10^3 \text{ cm}^{-3}$, une densité de colonne $N_{\text{CO}} = 2,4 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-2}$ et une vitesse turbulente $\sigma_v = 10\sigma_{\text{th}}$. La longueur de corrélation de la densité augmente de haut en bas, celle de la vitesse augmente de gauche à droite, chaque sous-figure correspondant à une combinaison $(l_{\bar{n}}, l_v)$. Les courbes regroupées sur une sous-figure représentent les différentes valeurs de la dispersion, $\sigma_{\bar{n}} = 0, 1$ (pointillés), $\sigma_{\bar{n}} = 1, 0$ (tirets) et $\sigma_{\bar{n}} = 2, 0$ (trait plein). Figure issue de [Hegmann & Kegel, 2000].

On remarque notamment que les profils de la raie $J = 4 \rightarrow 3$ sont plus intenses lorsque $\sigma_{\bar{n}}$ augmente, ce qu'on interprète en disant que, dans ce cas de figure, les nuages denses présents dans le milieu favorisent les transitions collisionnelles vers les niveaux de J élevé, et donc les désexcitations radiatives correspondantes. À l'inverse, et comme on l'a déjà suggéré, la raie $J = 1 \rightarrow 0$ devient plus faible quand $\sigma_{\bar{n}}$ augmente. D'autre part, l'autoabsorption au centre de la raie pour les faibles valeurs de l_v sur la figure XIX.8 disparaît quand cette longueur de corrélation augmente.

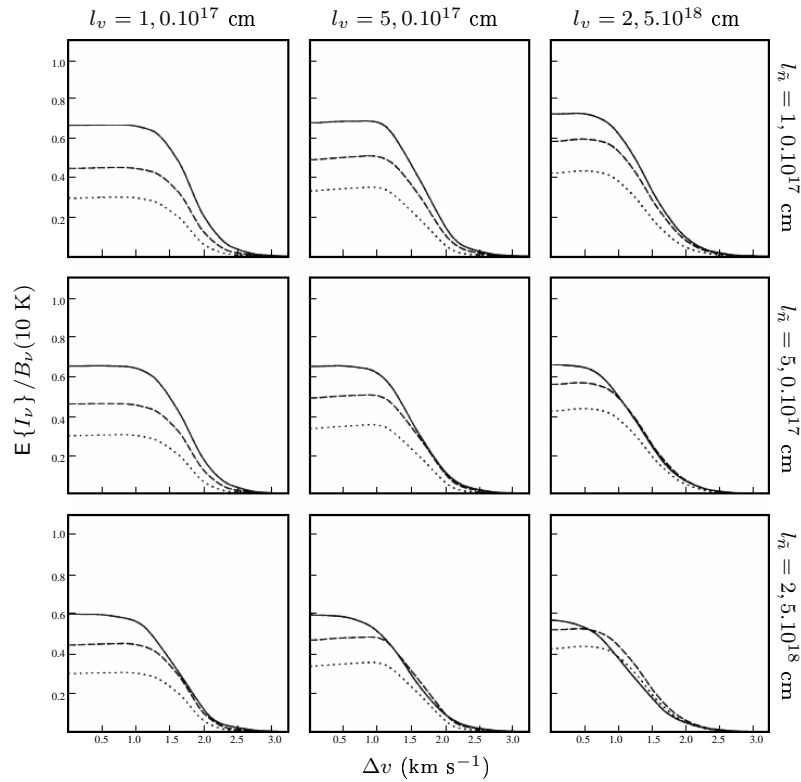


FIG. XIX.9 – Profils de raie pour la transition $J = 4 \rightarrow 3$ du monoxyde de carbone. Les paramètres et la disposition des figures sont identiques à ceux de la figure XIX.8. Figure issue de [Hegmann & Kegel, 2000].

En résumé, les raies de bas J sont en général atténuées par l'existence d'un champ de densité stochastique, et ce d'autant plus que les longueurs de corrélation $l_{\bar{n}}$ et l_v sont grandes (voir la figure XIX.8). Au contraire, on observe que les raies de haut J sont renforcées par les hétérogénéités de densité. En ce qui concerne l'influence d'un champ de vitesse ayant une longueur de corrélation finie, on a noté l'atténuation des effets d'autoabsorption, de sorte que les raies semblent saturer bien qu'on ne soit pas à l'ETL. Encore une fois, ces résultats montrent que l'interprétation des raies interstellaires ne peut pas être faite correctement sans prendre en compte la structure des champs de densité et de vitesse.

□

CHAPITRE XX

Cas des corrélations densité-vitesse

XX.1 Introduction

Comme on vient de le voir au chapitre **XIX**, l'existence de champs de densité et de vitesse stochastiques dans les nuages moléculaires peut notablement affecter la forme des raies qu'on y observe, en particulier des raies rotationnelles de CO, dont l'importance est fondamentale pour l'étude des propriétés physiques de ces nuages. Il se pose alors la question de savoir de quelle façon on pourrait rendre ce modèle encore plus réaliste, de manière à en observer les effets sur la formation des raies.

Or, le modèle de [Hegmann & Kegel, 2000] présente le défaut d'ignorer totalement l'existence de corrélations entre les champs de densité et de vitesse. Il semble donc que l'introduction de telles corrélations puisse constituer une étape supplémentaire, à la fois raisonnable et réaliste, de complexification du problème du transfert radiatif stochastique tel que décrit par le modèle de Gail *et al* [Gail *et al.*, 1974], généralisé par [Hegmann & Kegel, 2000]. C'est l'objectif de ce chapitre que d'introduire ces corrélations.

Dans cette optique, la prise en compte des contraintes hydrodynamiques au sein du gaz interstellaire peut se faire par exemple en reliant la densité du gaz à la dispersion locale des vitesses, ce que nous ferons au **XX.2.b**. Ainsi, tout en restant dans le cadre formel de champs décrits par des équations de Langevin, il doit être clair dès maintenant que les équations portant sur \tilde{n} et v ne pourront plus être indépendantes, comme c'était le cas jusqu'à présent. L'équation de transfert généralisée en sera probablement modifiée, d'autant que son écriture (102) a été obtenue en faisant implicitement l'hypothèse qu'on pouvait écrire la densité de probabilité jointe $W(v, \tilde{n})$ comme le produit des densités de probabilité associées à chacune des variables \tilde{n} et v , ce qui n'est *a priori* plus possible dès lors qu'on introduit des corrélations entre la densité et la vitesse.

XX.2 Équation d'évolution de l'intensité conditionnelle

XX.2.a Forme générale de l'équation d'évolution de l'intensité moyenne

Pour simplifier l'approche, on conservera les équations d'évolution de la vitesse et de la densité logarithmique le long de la ligne de visée, telles qu'introduites par [Gail *et al.*, 1974] et [Hegmann & Kegel, 2000]. Cependant, étant donné que l'équation de transfert généralisée est susceptible d'être modifiée par la présence de corrélations entre la densité et la vitesse, il ne semble pas superflu de repartir de formes très générales pour les équations de Langevin décrivant ces deux champs, et d'en dériver l'équation d'évolution de l'intensité moyenne Q_ν , qu'on simplifiera ensuite en revenant aux équations de Langevin spécifiées par [Hegmann & Kegel, 2000].

Équation portant sur la densité de probabilité tridimensionnelle

La forme générale des équations de Langevin portant sur \tilde{n} et v est obtenue en supposant que les paramètres des équations sont des fonctions de \tilde{n} et v , ainsi que de la position z ,

$$\frac{d\tilde{n}}{dz} = h_{\tilde{n}}(v, \tilde{n}; z) + g_{\tilde{n}}(v, \tilde{n}; z)\Gamma_{\tilde{n}}(z) \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dz} = h_v(v, \tilde{n}; z) + g_v(v, \tilde{n}; z)\Gamma_v(z).$$

On reconnaît là une forme déjà simplifiée des équations de Langevin (32), en ce sens qu'on suppose que les éléments non-diagonaux de la matrice \mathbf{g} sont nuls. On fait cette hypothèse pour ne pas trop alourdir les notations et l'expression finale de l'équation sur q_ν , et parce que les équations qu'on utilisera *in fine* sont de ce type. Les forces de Langevin $\Gamma_{\tilde{n}}$ et Γ_v possèdent les propriétés décrites au chapitre **VIII**, c'est-à-dire

qu'il s'agit de processus gaussiens indépendants, avec

$$\mathbb{E} \{ \Gamma_v(z_1) \dots \Gamma_v(z_{2n-1}) \} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \{ \Gamma_v(z_1) \dots \Gamma_v(z_{2n}) \} = 2^n \left[\sum_{P_n} \delta(z_{i_1} - z_{i_2}) \dots \delta(z_{i_{2n-1}} - z_{i_{2n}}) \right],$$

en rappelant que P_n est l'ensemble des $(2n)!/(2^n n!)$ permutations de $(1, 2, \dots, 2n)$ ne laissant pas invariant le produit des distributions de Dirac. On a bien sûr la même propriété pour $\Gamma_{\tilde{n}}$.

En rapprochant les deux équations d'évolution de \tilde{n} et v de l'équation de transfert classique, on peut traiter le problème dans le cadre général des équations de Langevin non-linéaires à plusieurs variables. Dans notre cas, le vecteur composé des divers processus stochastiques considérés est $\mathbf{X} = (v, \tilde{n}, I_\nu)$, et les fonctions h_i et g_{ij} apparaissant dans les équations (32) s'écrivent respectivement

$$h_1 = h_{\tilde{n}} \quad h_2 = h_v \quad h_3 = -\kappa_\nu(I_\nu - S_\nu) \quad g_{11} = g_{\tilde{n}} \quad g_{22} = g_v \quad \text{et} \quad g_{33} = 0,$$

les éléments non diagonaux de la matrice \mathbf{g} étant nuls, comme on l'a déjà souligné. À partir de ces expressions, on peut en déduire directement l'équation de Fokker-Planck régissant l'évolution, le long de la ligne de visée, de la densité de probabilité tridimensionnelle $P(v, \tilde{n}, I_\nu; z)$, en suivant la méthode décrite au chapitre VIII. Pour l'écrire, il nous suffit de calculer les coefficients de dérive et de diffusion, ce qui est immédiat à partir des formules (35),

$$D_1 = h_{\tilde{n}} + g_{\tilde{n}} \frac{\partial g_{\tilde{n}}}{\partial \tilde{n}} \quad D_2 = h_v + g_v \frac{\partial g_v}{\partial v} \quad D_3 = -\kappa_\nu(I_\nu - S_\nu) \quad D_{1,1} = g_{\tilde{n}}^2 \quad D_{2,2} = g_v^2 \quad D_{3,3} = 0,$$

les coefficients de diffusion non diagonaux étant nuls du fait que la matrice \mathbf{g} est elle-même diagonale. Insérant ces expressions dans l'équation de Fokker-Planck (31), on obtient

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial \tilde{n}} \left[\left(h_{\tilde{n}} + g_{\tilde{n}} \frac{\partial g_{\tilde{n}}}{\partial \tilde{n}} \right) P \right] - \frac{\partial}{\partial v} \left[\left(h_v + g_v \frac{\partial g_v}{\partial v} \right) P \right] + \frac{\partial}{\partial I_\nu} [\kappa_\nu(I_\nu - S_\nu)P] + \frac{\partial^2 (g_{\tilde{n}}^2 P)}{\partial \tilde{n}^2} + \frac{\partial^2 (g_v^2 P)}{\partial v^2}.$$

On montre sans difficulté qu'en remplaçant $h_{\tilde{n}}$, $g_{\tilde{n}}$, h_v et g_v par leurs valeurs dans le cas considéré par [Hegmann & Kegel, 2000], on retrouve leur équation, donnée au chapitre XIX par l'équation (101).

Équation portant sur l'intensité moyenne

Suivant toujours la méthode de [Hegmann & Kegel, 2000], l'étape suivante consiste à définir l'espérance de l'intensité, laquelle dépend non seulement de la position sur la ligne de visée, mais également de la vitesse et de la densité logarithmique. Explicitement, on pose

$$Q_\nu(v, \tilde{n}; z) = \int P(v, \tilde{n}, I_\nu; z) I_\nu dI_\nu, \quad \text{et on cherche à déterminer son équation d'évolution.}$$

Dans ce but, on multiplie l'équation portant sur la densité de probabilité P par l'intensité spécifique I_ν , avant d'intégrer sur cette même variable. En utilisant l'intégration par parties décrite au XIX.2.c, on obtient alors l'expression suivante

$$\frac{\partial Q_\nu}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial \tilde{n}} \left[\left(h_{\tilde{n}} + g_{\tilde{n}} \frac{\partial g_{\tilde{n}}}{\partial \tilde{n}} \right) Q_\nu \right] - \frac{\partial}{\partial v} \left[\left(h_v + g_v \frac{\partial g_v}{\partial v} \right) Q_\nu \right] - \kappa_\nu(Q_\nu - S_\nu W) + \frac{\partial^2 (g_v^2 Q_\nu)}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 (g_{\tilde{n}}^2 Q_\nu)}{\partial \tilde{n}^2}$$

Cette équation est l'équation de transfert dans le cas le plus général considéré ici. Elle fait intervenir la densité de probabilité jointe pour la densité logarithmique et la vitesse longitudinale,

$$W(v, \tilde{n}; z) = \int P(v, \tilde{n}, I_\nu; z) dI_\nu,$$

dont on remarque qu'elle vérifie également une équation de Fokker-Planck, qu'on peut d'ailleurs écrire directement, puisqu'elle est associée au processus stochastique bidimensionnel $\mathbf{Y} = (v, \tilde{n})$, lequel est déjà parfaitement déterminé en termes de coefficients de dérive et de diffusion,

$$\frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial \tilde{n}} \left[\left(h_{\tilde{n}} + g_{\tilde{n}} \frac{\partial g_{\tilde{n}}}{\partial \tilde{n}} \right) W \right] - \frac{\partial}{\partial v} \left[\left(h_v + g_v \frac{\partial g_v}{\partial v} \right) W \right] + \frac{\partial^2 (g_{\tilde{n}}^2 W)}{\partial \tilde{n}^2} + \frac{\partial^2 (g_v^2 W)}{\partial v^2}. \quad (103)$$

Cette remarque n'est pas que formelle, car on se servira de cette équation dans la suite.

XX.2.b Forme des corrélations densité-vitesse

Avant de résoudre cette équation de transfert généralisée, on va d'abord expliciter les formes que vont prendre les corrélations entre les champs de densité et de vitesse. Si l'on se penche sur ce problème maintenant, alors qu'on n'a pas encore écrit l'équation gouvernant l'évolution de l'intensité conditionnelle q_ν , c'est que les expressions deviennent extrêmement lourdes dans le cas général qu'on a utilisé jusqu'ici. On va donc introduire les formes spécifiques que nous allons utiliser dans la suite. Il n'est pas déraisonnable, en vue d'imposer une corrélation entre les champs de densité et de vitesse, de supposer que le gaz suit une équation d'état polytropique, selon laquelle la pression turbulente varie comme une puissance de la densité, soit $P_{\text{turb}} \propto n^\gamma$. Comme d'autre part, cette pression turbulente est liée à la dispersion locale du champ de vitesses σ_ν par $P_{\text{turb}} \propto n\sigma_\nu^2$, on est amené à conclure que la dispersion des vitesses est elle-même liée à la densité,

$$\sigma_\nu = \sigma_0 \left(\frac{n}{n_0} \right)^\alpha = \sigma_0 \exp(\alpha \tilde{n}) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\gamma - 1}{2} \quad \text{et où } n_0 \text{ est la densité de référence du \textbf{XIX.5.b.}}$$

Pour rester proche du modèle de [Gail *et al.*, 1974] et [Hegmann & Kegel, 2000], on choisit alors simplement de prendre les mêmes équations décrivant l'évolution du champ de vitesse et du champ de densité logarithmique,

$$\frac{d\tilde{n}}{dz} = -\frac{\tilde{n}}{l_{\tilde{n}}} + \frac{\sigma_{\tilde{n}}}{\sqrt{l_{\tilde{n}}}} \Gamma_{\tilde{n}}(z) \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dz} = -\frac{v}{l_v} + \frac{\sigma_\nu}{\sqrt{l_v}} \Gamma_\nu(z), \quad (104)$$

à ceci près que, dans notre cas, le paramètre σ_ν n'est plus une constante mais dépend de la variable \tilde{n} . Les autres paramètres, l_v , $l_{\tilde{n}}$ et $\sigma_{\tilde{n}}$ restent quant à eux inchangés.

Afin d'évaluer les valeurs possibles de γ , il convient de remarquer que la pression turbulente P_{turb} est ici considérée comme une pression cinétique associée aux mouvements macroscopiques du gaz, et on peut donc s'inspirer des valeurs de l'indice polytropique connues pour la pression cinétique microscopique P_k au sein d'un gaz supposé parfait. Au cours d'une évolution isotherme, $\gamma = 1$ et α est donc nul, tandis qu'en évolution adiabatique, et suivant qu'on se trouve plutôt dans une phase atomique ou ionisée, ou plutôt dans une phase moléculaire, γ varie entre $5/3$ ($\alpha = 1/3$) et $7/5$ ($\alpha = 1/5$). En conclusion, il semble que des valeurs de γ comprises entre 1 et 2 soient représentatives des conditions rencontrées dans les différentes phases du milieu interstellaire.

Avec ces hypothèses, la forme de l'équation régissant l'évolution de l'intensité moyenne Q_ν est la même que celle de [Hegmann & Kegel, 2000], à ceci près que la distribution W n'est pas factorisable du fait des corrélations, et que σ_ν n'est pas une constante mais dépend de la densité,

$$\boxed{\frac{\partial Q_\nu}{\partial z} = \frac{1}{l_{\tilde{n}}} \frac{\partial}{\partial \tilde{n}} \left[\tilde{n} Q_\nu + \sigma_{\tilde{n}}^2 \frac{\partial Q_\nu}{\partial \tilde{n}} \right] + \frac{1}{l_v} \frac{\partial}{\partial v} \left[v Q_\nu + \sigma_\nu^2 \frac{\partial Q_\nu}{\partial v} \right] - \kappa_\nu (Q_\nu - S_\nu W)}. \quad (105)$$

En effet, les expressions des différentes fonctions $h_{\tilde{n}}$, h_v , $g_{\tilde{n}}$ et g_v sont inchangées par rapport au cas sans corrélation. La seule nouveauté vient du fait que g_v est une fonction de \tilde{n} , ce qui ne change rien au coefficient de dérive D_2 puisque c'est la dérivée par rapport à v qui intervient, laquelle est nulle.

XX.2.c Évolution de l'intensité conditionnelle

L'intensité moyenne Q_ν dépend de la densité logarithmique et de la vitesse. Il est donc intéressant, comme cela est fait dans les différentes approches du transfert radiatif stochastique, de [Gail & Sedlmayr, 1974] à [Hegmann & Kegel, 2000], d'introduire l'intensité conditionnelle q_ν , qui revient à normaliser l'intensité moyenne par la distribution jointe W de la densité logarithmique et de la vitesse,

$$q_\nu(v, \tilde{n}; z) = \frac{Q_\nu(v, \tilde{n}; z)}{W(v, \tilde{n}; z)} \quad \text{de sorte que} \quad \mathbb{E}\{I_\nu(z)\} = \iint q_\nu(v, \tilde{n}; z) W(v, \tilde{n}; z) d\tilde{n} dv.$$

On remarque que q_ν a effectivement la dimension d'une intensité spécifique, contrairement à Q_ν . Notons d'autre part que cette quantité est utilisée par [Hegmann & Kegel, 2000] pour des raisons de stabilité

numérique. L'introduction de cette forme dans l'équation (105) donne alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_\nu}{\partial z} &= \frac{q_\nu}{l_{\tilde{n}}} \left(1 + \frac{\tilde{n}}{W} \frac{\partial W}{\partial \tilde{n}} + \frac{\sigma_{\tilde{n}}^2}{W} \frac{\partial^2 W}{\partial \tilde{n}^2} \right) + \frac{1}{l_{\tilde{n}}} \frac{\partial q_\nu}{\partial \tilde{n}} \left(\tilde{n} + \frac{2\sigma_{\tilde{n}}^2}{W} \frac{\partial W}{\partial \tilde{n}} \right) + \frac{\sigma_{\tilde{n}}^2}{l_{\tilde{n}}} \frac{\partial^2 q_\nu}{\partial \tilde{n}^2} \\ &+ \frac{q_\nu}{l_v} \left(1 + \frac{v}{W} \frac{\partial W}{\partial v} + \frac{\sigma_v^2}{W} \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} \right) + \frac{1}{l_v} \frac{\partial q_\nu}{\partial v} \left(v + \frac{2\sigma_v^2}{W} \frac{\partial W}{\partial v} \right) + \frac{\sigma_v^2}{l_v} \frac{\partial^2 q_\nu}{\partial v^2} - \kappa_\nu (q_\nu - S_\nu). \end{aligned}$$

La simplification de cette équation tient aux propriétés de la distribution de probabilité jointe, dont on a écrit plus haut l'équation d'évolution. Il est légitime, en se plaçant à une position z assez grande devant les longueurs de corrélation $l_{\tilde{n}}$ et l_v , de supposer que cette distribution a atteint le régime stationnaire, de sorte qu'elle vérifie l'équation sans second membre

$$\frac{1}{l_{\tilde{n}}} \left(W + \tilde{n} \frac{\partial W}{\partial \tilde{n}} + \sigma_{\tilde{n}}^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \tilde{n}^2} \right) + \frac{1}{l_v} \left(W + v \frac{\partial W}{\partial v} + \sigma_v^2 \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} \right) = 0, \quad (106)$$

qu'on obtient directement à partir de l'équation (103) en remplaçant les fonctions $h_{\tilde{n}}$, h_v , $g_{\tilde{n}}$ et g_v par leurs expressions respectives, puis en développant les dérivées. On en déduit que les termes en facteur de q_ν dans l'équation de l'intensité conditionnelle s'annulent, de sorte que finalement

$$\boxed{\frac{\partial q_\nu}{\partial z} = \frac{1}{l_{\tilde{n}}} \frac{\partial q_\nu}{\partial \tilde{n}} \left(\tilde{n} + \frac{2\sigma_{\tilde{n}}^2}{W} \frac{\partial W}{\partial \tilde{n}} \right) + \frac{\sigma_{\tilde{n}}^2}{l_{\tilde{n}}} \frac{\partial^2 q_\nu}{\partial \tilde{n}^2} + \frac{1}{l_v} \frac{\partial q_\nu}{\partial v} \left(v + \frac{2\sigma_v^2}{W} \frac{\partial W}{\partial v} \right) + \frac{\sigma_v^2}{l_v} \frac{\partial^2 q_\nu}{\partial v^2} - \kappa_\nu (q_\nu - S_\nu)}. \quad (107)$$

Dans le cas limite où les corrélations sont absentes, soit pour $\gamma = 1$, on a d'une part $\sigma_v = \sigma_0$ quelle que soit la densité, mais également factorisation de W , sous la forme $W(v, \tilde{n}) = W_{\tilde{n}}(\tilde{n})W_v(v)$, où les distributions respectives de la densité logarithmique et de la vitesse sont données par des gaussiennes, puisque ces deux variables, supposées ici indépendantes, sont régies par des équations de Langevin exactement identiques à celle étudiée en détail dans l'exemple du mouvement brownien, au chapitre **VIII**. On a donc, dans ce cas particulier,

$$W(v, \tilde{n}) = W_{\tilde{n}}(\tilde{n})W_v(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\tilde{n}}}} \exp\left(-\frac{\tilde{n}^2}{2\sigma_{\tilde{n}}^2}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_0^2}\right),$$

et l'équation (107) prend alors la forme plus simple utilisée par [Hegmann & Kegel, 2000]

$$\frac{\partial q_\nu}{\partial z} = -\frac{\tilde{n}}{l_{\tilde{n}}} \frac{\partial q_\nu}{\partial \tilde{n}} + \frac{\sigma_{\tilde{n}}^2}{l_{\tilde{n}}} \frac{\partial^2 q_\nu}{\partial \tilde{n}^2} - \frac{v}{l_v} \frac{\partial q_\nu}{\partial v} + \frac{\sigma_0^2}{l_v} \frac{\partial^2 q_\nu}{\partial v^2} - \kappa_\nu (q_\nu - S_\nu),$$

ce qui fait disparaître *de facto* la distribution jointe W . En revanche, dans le cas général où les corrélations sont présentes, on ne peut clairement pas procéder à cette simplification sans précaution. Il convient donc de déterminer la forme de la densité de probabilité jointe. Comme on le verra, le calcul direct pose de grosses difficultés, et il paraît utile de commencer par calculer la distribution des vitesses W_v et celle des densités logarithmiques $W_{\tilde{n}}$, définies par les intégrations

$$W_v(v) = \int W(v, \tilde{n}) d\tilde{n} \quad \text{et} \quad W_{\tilde{n}}(\tilde{n}) = \int W(v, \tilde{n}) dv.$$

Pour reprendre la terminologie du chapitre **IV**, les fonctions $W_{\tilde{n}}$ et W_v sont les densités de probabilité marginales de la loi du couple de variables aléatoires (v, \tilde{n}) .

XX.3 Distribution des densités logarithmiques

Étant donné que les paramètres de l'équation de Langevin gouvernant l'évolution de \tilde{n} le long de la ligne de visée sont des constantes, il est possible de la considérer séparément des équations sur la vitesse et sur l'intensité spécifique. Vu ainsi, le calcul de la distribution des densités logarithmiques a en fait déjà été fait au chapitre **VIII**, et on a donc, en transposant,

$$W_{\tilde{n}}(\tilde{n}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\tilde{n}}}} \exp\left(-\frac{\tilde{n}^2}{2\sigma_{\tilde{n}}^2}\right), \quad \text{cette distribution n'étant donc pas modifiée par les corrélations.}$$

Le point important à relever ici n'est pas tant le résultat, qu'on connaissait déjà, mais la méthode utilisée au **VIII.2.f** pour calculer la distribution des valeurs prises par un processus régi par une équation de Langevin. Cette méthode, suggérée par [Risken, 1989], va maintenant être appliquée au cas, bien plus complexe, de la distribution des vitesses.

XX.4 Distribution des vitesses

XX.4.a Première expression des moments de la vitesse

La procédure en question consiste à calculer la distribution $W_v(v)$ à partir des moments de la vitesse $\mu'_p = E\{v(z)^p\}$, pris en régime stationnaire, c'est-à-dire pour $z \gg l_v$ et $z \gg \tilde{l}_n$. La première étape consiste donc, partant de l'équation de Langevin sur la vitesse, à en écrire la solution formelle $v(z)$ le long de la ligne de visée en utilisant la variation de la constante, ce qui revient à refaire le calcul en termes de fonctions de Green du **VIII.4.c**,

$$v(z) = \int_0^z \frac{\sigma_v(t)}{\sqrt{l_v}} \exp\left(-\frac{z-t}{l_v}\right) \Gamma_v(t) dt = \frac{\sigma_0}{\sqrt{l_v}} \int_0^z \exp\left[\alpha \tilde{n}(t) + \frac{t-z}{l_v}\right] \Gamma_v(t) dt,$$

en prenant garde à la normalisation, et en choisissant une vitesse initiale $v_0 = v(0)$ nulle, ce qui ne constitue pas une perte de généralité, puisqu'en régime stationnaire, le terme dépendant de la vitesse initiale est négligeable¹. Le moment d'ordre p de la vitesse au point z est alors l'espérance

$$\mu'_p = E\{v(z)^p\} = \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{l_v}}\right)^p \int_0^z dt_1 \dots \int_0^z dt_p E\left\{\prod_{i=1}^p \exp\left[\alpha \tilde{n}(t_i) + \frac{1}{l_v}(t_i - z)\right] \Gamma_v(t_i)\right\},$$

Ce qu'on peut réécrire en effectuant les changements de variables $\tau_i = z - t_i$,

$$\mu'_p = \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{l_v}}\right)^p \int_0^z d\tau_1 \dots \int_0^z d\tau_p \exp\left(-\frac{1}{l_v} \sum_{i=1}^p \tau_i\right) E\left\{\exp\left[\alpha \sum_{i=1}^p \tilde{n}(z - \tau_i)\right] \cdot \prod_{i=1}^p \Gamma_v(z - \tau_i)\right\}, \quad (108)$$

Les termes stochastiques Γ_v à l'origine des fluctuations de vitesse sont naturellement décorrelés de la densité, la corrélation ne se faisant qu'au travers des coefficients σ_v de ces forces de Langevin. Par conséquent, les moyennes d'ensemble présentes dans l'équation (108) peuvent être factorisées

$$E\left\{\exp\left[\alpha \sum_{i=1}^p \tilde{n}(z - \tau_i)\right] \cdot \prod_{i=1}^p \Gamma_v(z - \tau_i)\right\} = E\left\{\exp\left[\alpha \sum_{i=1}^p \tilde{n}(z - \tau_i)\right]\right\} E\left\{\prod_{i=1}^p \Gamma_v(z - \tau_i)\right\}. \quad (109)$$

Remarquons que dans le cas particulier où il n'y a pas de corrélation, α est nul, de sorte que cette factorisation est élémentaire. Par ailleurs, les propriétés statistiques de Γ_v montrent [Risken, 1989] que les moments d'ordre impair sont nuls, et que les moments d'ordre pair font intervenir des produits de distributions de Dirac qui vont simplifier les intégrales (108). On rappelle en effet que

$$E\left\{\prod_{i=1}^{2m+1} \Gamma_v(z - \tau_i)\right\} = 0 \quad \text{et} \quad E\left\{\prod_{i=1}^{2m} \Gamma_v(z - \tau_i)\right\} = 2^m \sum_{P_m} \delta(\tau_{i_1} - \tau_{i_2}) \dots \delta(\tau_{i_{2m-1}} - \tau_{i_{2m}}),$$

où P_m représente l'ensemble des $(2m)!/(2^m m!)$ permutations $(i_1, i_2, \dots, i_{2m})$ de $(1, 2, \dots, 2m)$ pour lesquelles les produits de distributions de Dirac sont effectivement distincts. Il découle alors immédiatement de ces propriétés que les moments impairs sont nuls, et que les moments pairs s'écrivent

$$\mu'_{2m} = \left(\frac{2\sigma_0^2}{l_v}\right)^m \sum_{P_m} \int_0^z d\tau_1 \dots \int_0^z d\tau_{2m} \exp\left[-\frac{1}{l_v} \sum_{i=1}^{2m} \tau_i\right] E\left\{\exp\left[\alpha \sum_{i=1}^{2m} \tilde{n}(z - \tau_i)\right]\right\} \prod_{j=1}^m \delta(\tau_{i_{2j-1}} - \tau_{i_{2j}}).$$

¹Le lecteur ne doit pas être perturbé par la notation t pour la variable muette. Il s'agit bien d'une position et non d'un temps. De même, dans la suite, les notations τ désigneront également des positions, et non des profondeurs optiques.

Or, dans chacune des intégrales $2m$ -dimensionnelles de cette somme, les arguments des deux facteurs exponentiels sont parfaitement symétriques dans les variables d'intégration τ_i . Par conséquent, l'action d'une permutation quelconque appartenant à l'ensemble P_m laisse l'intégrande invariant. Tous les termes sont donc identiques, et on peut s'affranchir du signe somme en écrivant directement

$$\mu'_{2m} = \frac{(2m)!}{m!} \left(\frac{\sigma_0^2}{l_v} \right)^m \int_0^z d\tau_1 \dots \int_0^z d\tau_{2m} \exp \left[-\frac{1}{l_v} \sum_{i=1}^{2m} \tau_i \right] \mathbb{E} \left\{ \exp \left[\alpha \sum_{i=1}^{2m} \tilde{n}(z - \tau_i) \right] \right\} \prod_{i=1}^m \delta(\tau_{2i-1} - \tau_{2i}).$$

Au passage, on a simplifié la notation des indices dans l'argument des distributions de Dirac, ce qui revient à prendre comme permutation particulière l'identité.

XX.4.b Développement en puissances de α

Pour obtenir μ'_{2m} dans le cas de champs de densité et de vitesse corrélés, il faut donc calculer le facteur

$$\mathbb{E} \left\{ \exp \left[\alpha \sum_{i=1}^{2m} \tilde{n}(z - \tau_i) \right] \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \mathbb{E} \left\{ \left[\sum_{i=1}^{2m} \tilde{n}(z - \tau_i) \right]^k \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \sum_{\mathcal{C}_{k,m}} \mathbb{E} \left\{ \prod_{j=1}^k \tilde{n}(z - \tau_{i_j}) \right\}$$

en développant l'exponentielle en série infinie, de façon à faire apparaître des produits de corrélation de la densité logarithmique, dont on peut espérer pouvoir calculer les propriétés, en utilisant la même procédure que celle utilisée jusqu'à maintenant pour calculer les moments de la vitesse. On note d'ailleurs que cette écriture permet d'isoler les effets des corrélations densité-vitesse, puisque le terme d'ordre zéro ($k = 0$) correspond justement au cas sans corrélation. La dernière égalité dans l'équation précédente utilise le développement formel de la $k^{\text{ème}}$ puissance de la somme des $\tilde{n}(z - \tau_i)$. L'ensemble $\mathcal{C}_{k,m}$ est ainsi celui des k -uplets (i_1, \dots, i_k) pris dans $(1, \dots, 2m)$. Le calcul du moment μ'_{2m} se réduit donc à celui des intégrales de la forme

$$\mathcal{I}_{k,m} = \sum_{\mathcal{C}_{k,m}} \int_0^z d\tau_1 \dots \int_0^z d\tau_{2m} \exp \left[-\frac{1}{l_v} \sum_{i=1}^{2m} \tau_i \right] \mathbb{E} \left\{ \prod_{j=1}^k \tilde{n}(z - \tau_{i_j}) \right\} \prod_{i=1}^m \delta(\tau_{2i-1} - \tau_{2i}). \quad (110)$$

Pour calculer ces dernières, on doit donc s'intéresser aux corrélations du champ de densité logarithmique en différents points de la ligne de visée. En partant de la solution formelle de l'équation de Langevin régissant l'évolution de \tilde{n} , on écrit²

$$\mathbb{E} \left\{ \prod_{j=1}^k \tilde{n}(z - \tau_{i_j}) \right\} = \left(\frac{\sigma_{\tilde{n}}}{\sqrt{l_{\tilde{n}}}} \right)^k \int_0^{z-\tau_{i_1}} dt_1 \dots \int_0^{z-\tau_{i_k}} dt_k \exp \left[\sum_{j=1}^k \frac{t_j + \tau_{i_j} - z}{l_{\tilde{n}}} \right] \mathbb{E} \left\{ \prod_{j=1}^k \Gamma_{\tilde{n}}(t_j) \right\}, \quad (111)$$

l'exponentielle pouvant être extraite de l'espérance puisqu'elle n'a pas de caractère aléatoire. Il suffit donc en théorie de calculer les moyennes de produits de $\Gamma_{\tilde{n}}$, dont on connaît les propriétés, puisqu'elles sont les mêmes que celles de Γ_v , à savoir

$$\mathbb{E} \left\{ \prod_{j=1}^{2r+1} \Gamma_{\tilde{n}}(t_j) \right\} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left\{ \prod_{j=1}^{2r} \Gamma_{\tilde{n}}(t_j) \right\} = 2^r \sum_{P_r} \delta(t_{j_1} - t_{j_2}) \dots \delta(t_{j_{2r-1}} - t_{j_{2r}}). \quad (112)$$

Il s'ensuit que pour toute valeur impaire de k , les intégrales $\mathcal{I}_{k,m}$ sont nulles. Seules restent celles correspondant aux valeurs paires de k . On a déjà remarqué que le terme d'ordre zéro $\mathcal{I}_{0,m}$ donnait le cas sans corrélation, puisque c'est le seul terme présent lorsque α est nul. On a déjà établi une expression semblable au chapitre VIII, mais on redonne ici le calcul pour des raisons de commodité de lecture. L'intégrale $\mathcal{I}_{0,m}$ se factorise en m intégrales doubles identiques, ce qui permet d'écrire

$$\mathcal{I}_{0,m} = \left[\int_0^z d\tau_1 \int_0^z d\tau_2 \exp \left(-\frac{\tau_1 + \tau_2}{l_v} \right) \delta(\tau_1 - \tau_2) \right]^m = \left(\frac{l_v}{2} \right)^m \quad \text{en régime stationnaire } (z \gg l_v).$$

²Qu'on compare avec les expressions (108) et (109) dans le cas particulier $\alpha = 0$.

À partir de là, la prise en compte des corrélations entre les champs de densité et de vitesse implique que les termes d'ordre $k = 2r$ plus élevé ne sont pas nuls *a priori*. Notre but est ici de calculer les expressions correspondantes, ce qui passe par le calcul des intégrales suivantes, obtenues en insérant les propriétés (112) de $\Gamma_{\tilde{n}}$ dans l'expression (111),

$$\mathbb{E} \left\{ \prod_{j=1}^{2r} \tilde{n}(z - \tau_{i_j}) \right\} = \frac{(2r)!}{r!} \left(\frac{\sigma_{\tilde{n}}^2}{l_{\tilde{n}}} \right)^r \int_0^{z-\tau_{i_1}} dt_1 \dots \int_0^{z-\tau_{i_{2r}}} dt_{2r} \exp \left[\sum_{j=1}^{2r} \frac{t_j + \tau_{i_j} - z}{l_{\tilde{n}}} \right] \prod_{j=1}^r \delta(t_{2j-1} - t_{2j}).$$

On a réutilisé ici le fait que l'intégrande est invariant sous l'effet d'une permutation de P_r . Après avoir fait les changements de variables $u_j = z - t_j$ pour $j = 1, 2, \dots, 2r$ et factorisé les intégrales en regroupant les variables présentes dans la même distribution de Dirac, on obtient

$$\mathbb{E} \left\{ \prod_{j=1}^{2r} \tilde{n}(z - \tau_{i_j}) \right\} = \frac{(2r)!}{r!} \left(\frac{\sigma_{\tilde{n}}^2}{l_{\tilde{n}}} \right)^r \prod_{j=1}^r \mathcal{W}(2j-1, 2j; z),$$

en introduisant temporairement la notation condensée $\mathcal{W}(a, b; z)$, pour s'affranchir d'une équation trop longue. Cette fonction représente l'intégrale double obtenue lorsqu'on a effectué le regroupement des variables d'une même distribution de Dirac,

$$\mathcal{W}(a, b; z) = \int_{\tau_{i_a}}^z du_a \int_{\tau_{i_b}}^z du_b \exp \left[\frac{\tau_{i_a} - u_a + \tau_{i_b} - u_b}{l_{\tilde{n}}} \right] \delta(u_a - u_b).$$

Celle-ci est intégrable explicitement, et sa limite en régime stationnaire ($s \gg l_{\tilde{n}}$) prend la forme d'un facteur exponentiel dépendant de la séparation $|\tau_{i_a} - \tau_{i_b}|$, comparable à celui de la fonction d'autocorrélation du champ de densité logarithmique³. Par conséquent, dans ce régime stationnaire, les fonctions de corrélation d'ordre pair de la densité logarithmique sont

$$\mathbb{E} \left\{ \prod_{j=1}^{2r} \tilde{n}(z - \tau_{i_j}) \right\} = \frac{(2r)!}{r!} \left(\frac{\sigma_{\tilde{n}}^2}{2} \right)^r \exp \left[-\frac{1}{l_{\tilde{n}}} \sum_{j=1}^r |\tau_{i_{2j-1}} - \tau_{i_{2j}}| \right],$$

ce qui permet d'expliciter les intégrales $\mathcal{I}_{2r,m}$ en insérant cette forme dans l'expression (110), et fournit une équation apparemment simple, puisque ne faisant intervenir que des facteurs exponentiels,

$$\mathcal{I}_{2r,m} = \frac{(2r)!}{r!} \left(\frac{\sigma_{\tilde{n}}^2}{2} \right)^r \sum_{\mathcal{C}_{2r,m}} \int_0^z d\tau_1 \dots \int_0^z d\tau_{2m} \exp \left[-\frac{1}{l_v} \sum_{i=1}^{2m} \tau_i - \frac{1}{l_{\tilde{n}}} \sum_{j=1}^r |\tau_{i_{2j-1}} - \tau_{i_{2j}}| \right] \prod_{i=1}^m \delta(\tau_{2i-1} - \tau_{2i}).$$

XX.4.c Différents types d'intégrales

Pour s'affranchir du préfacteur qui ne ferait qu'alourdir les notations dans les calculs qui vont suivre, nous allons écrire les moments pairs de la vitesse sous la forme

$$\mu'_{2m} = \frac{(2m)!}{m!} \left(\frac{\sigma_0^2}{l_v} \right)^m \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2r}}{(2r)!} \mathcal{I}_{2r,m} = \frac{(2m)!}{m!} \left(\frac{\sigma_0^2}{l_v} \right)^m \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2r}}{r!} \left(\frac{\sigma_{\tilde{n}}^2}{2} \right)^r \mathcal{K}_{r,m}, \quad (113)$$

où l'on a introduit les sommes d'intégrales $\mathcal{K}_{r,m}$ définies par

$$\mathcal{K}_{r,m} = \sum_{\mathcal{C}_{2r,m}} \int_0^z d\tau_1 \dots \int_0^z d\tau_{2m} \exp \left[-\frac{1}{l_v} \sum_{i=1}^{2m} \tau_i - \frac{1}{l_{\tilde{n}}} \sum_{j=1}^r |\tau_{i_{2j-1}} - \tau_{i_{2j}}| \right] \prod_{i=1}^m \delta(\tau_{2i-1} - \tau_{2i}). \quad (114)$$

Comme dit plus haut, la contribution correspondant à $r = 0$ est celle du cas sans corrélation entre la densité et la vitesse. Il s'agit donc de déterminer les contributions des ordres suivants. Mais avant de nous lancer

³Ce qui n'est pas pour nous surprendre, et signifie que l'échelle caractéristique de décroissance est $l_{\tilde{n}}$.

dans le calcul, considérons la forme des termes $\mathcal{K}_{r,m}$. Chacun d'eux est composé d'une somme d'intégrales $2m$ -dimensionnelles, dont la particularité est l'argument de l'exponentielle. Celui-ci fait intervenir un terme parfaitement symétrique en toutes les variables τ_i , ainsi qu'un terme dépendant de $2r$ variables choisies parmi les $2m$ possibles. Notons que ce choix est fait sans restriction, c'est-à-dire qu'on peut choisir deux fois la même variable, ce qui devient d'ailleurs inévitable dès que $r > m$. D'autre part, les couples de variables intervenant dans une même valeur absolue peuvent tout aussi bien se retrouver dans la même distribution de Dirac, ou bien dans deux distributions différentes. On voit donc que, suivant le choix de (i_1, \dots, i_{2r}) dans $\llbracket 1, 2m \rrbracket^{2r}$, l'intégrale multiple correspondante pourra être de plusieurs types. Pour mieux comprendre ce point, prenons l'exemple de l'ordre $r = 1$. Les indices i_1 et i_2 , apparaissant dans la valeur absolue dans l'expression (114), sont à choisir parmi $2m$ possibilités, chaque paire donnant une intégrale *a priori* différente dans la somme $\mathcal{K}_{1,m}$. Chacune de ces intégrales, cependant, relève d'un des trois cas suivants,

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{1,m}^{(1)} &= \int_0^z d\tau_1 \dots \int_0^z d\tau_{2m} \exp \left[-\frac{1}{l_v} \sum_{i=1}^{2m} \tau_i \right] \prod_{i=1}^m \delta(\tau_{2i-1} - \tau_{2i}) \\ \mathcal{K}_{1,m}^{(2)} &= \int_0^z d\tau_1 \dots \int_0^z d\tau_{2m} \exp \left[-\frac{1}{l_v} \sum_{i=1}^{2m} \tau_i - \frac{1}{l_{\bar{n}}} |\tau_{i_1} - \tau_{i_2}| \right] \delta(\tau_{i_1} - \tau_{i_2}) \prod_{\substack{i=1 \\ 2i \neq i_1, i_2}}^m \delta(\tau_{2i-1} - \tau_{2i}) \\ \mathcal{K}_{1,m}^{(3)} &= \int_0^z d\tau_1 \dots \int_0^z d\tau_{2m} \exp \left[-\frac{1}{l_v} \sum_{i=1}^{2m} \tau_i - \frac{1}{l_{\bar{n}}} |\tau_{i_1} - \tau_{i_2}| \right] \delta(\tau_{i_1} - \tau_{i'_1}) \delta(\tau_{i_2} - \tau_{i'_2}) \prod_{\substack{i=1 \\ 2i \neq i_1, i_2, i'_1, i'_2}}^m \delta(\tau_{2i-1} - \tau_{2i}),\end{aligned}$$

suivant que $i_1 = i_2$ (premier cas), que $i_1 \neq i_2$ apparaissent dans la même distribution de Dirac (deuxième cas), ou encore que $i_1 \neq i_2$ apparaissent dans des distributions de Dirac différentes (troisième cas). Le calcul de ces intégrales est assez fastidieux, mais il se fait sans difficulté fondamentale. Le premier type d'intégrale est en fait donné par le cas sans corrélation, et les deux autres se ramènent respectivement aux calculs d'une intégrale double et d'une intégrale quadruple, lesquelles peuvent être explicitées⁴, de sorte qu'en se plaçant dans le régime stationnaire, on a finalement

$$\mathcal{K}_{1,m}^{(1)} = \left(\frac{l_v}{2} \right)^m, \quad \mathcal{K}_{1,m}^{(2)} = \left(\frac{l_v}{2} \right)^m \quad \text{et} \quad \mathcal{K}_{1,m}^{(3)} = \frac{2l_{\bar{n}}}{l_v + 2l_{\bar{n}}} \left(\frac{l_v}{2} \right)^m.$$

Quant à la valeur du terme $\mathcal{K}_{1,m}$ complet, il faut la calculer en comptant le nombre d'intégrales de chaque type. Il en existe $2m$ du premier, suivant l'indice $i_1 = i_2$ choisi parmi $(1, \dots, 2m)$. Il y a également $2(2m-1)$ termes du deuxième type et $2(m-1)(2m-1)$ termes du troisième type⁵. Au total, il y a donc $(2m)^2$ termes, comme il se doit.

Cet exemple montre que, d'une manière générale, $\mathcal{K}_{r,m}$ est la somme de $(2m)^{2r}$ termes relevant chacun d'un type d'intégrale parmi un nombre N dépendant *a priori* de r et m . Pour un type n donné entre 1 et $N(r, m)$, on dénombre $D(r, m, n)$ intégrales de ce type, notées $\mathcal{K}_{r,m}^{(n)}$, de sorte que

$$\mathcal{K}_{r,m} = \sum_{n=1}^{N(r,m)} D(r, m, n) \mathcal{K}_{r,m}^{(n)} \quad \text{avec} \quad \sum_{n=1}^{N(r,m)} D(r, m, n) = (2m)^{2r}.$$

Le poids $D(r, m, n)$ de chaque type d'intégrale $\mathcal{K}_{r,m}^{(n)}$ est le nombre de ses représentants apparaissant dans $\mathcal{K}_{r,m}$. Ce sont nécessairement des polynômes en m à coefficients entiers, de degré au plus $2r$, et au moins l'un d'entre eux est de degré $2r$, d'après la contrainte sur leur somme écrite précédemment,

$$D(r, m, n) = \sum_{p=0}^{2r} a_p m^p \quad \text{où les coefficients } a_p \text{ dépendent } a \text{ priori de } r, m \text{ et } n.$$

Notons que la dépendance vis-à-vis de m n'est pas un obstacle à l'écriture sous cette forme polynômiale. Ce qu'on rappelle simplement en disant que les coefficients dépendent de m , c'est que pour certaines valeurs

⁴Le lecteur intéressé pourra refaire le calcul en s'inspirant du cas sans corrélation.

⁵Ceci en supposant que $m \geq 2$, sinon il n'existe pas d'intégrale du troisième type.

de cet entier, les intégrales d'un type donné n'ont pas lieu d'être, par exemple pour $m < 2$ et $r = 1$, il n'y a que deux types d'intégrales possibles. Formellement, cela revient à annuler les coefficients a_p pour ces valeurs de r , m et $n \geq 3$.

Ceci étant dit, le calcul explicite de ces intégrales à l'ordre un, bien que ne présentant pas de difficulté conceptuelle, est déjà assez pénible, de sorte qu'aux ordres supérieurs, la multiplication des intégrales de types plus complexes encore semble en pratique en interdire le calcul analytique. On peut néanmoins invoquer un argument dimensionnel en posant $\tau_i = x_i l_v$ et $z = x l_v$ et en réécrivant $\mathcal{K}_{r,m}$ comme

$$\mathcal{K}_{r,m} = l_v^m \sum_{\mathcal{E}_{2r,m}} \int_0^x dx_1 \dots \int_0^x dx_{2m} \exp \left[- \sum_{i=1}^{2m} x_i - \frac{l_v}{l_n} \sum_{j=1}^r |x_{i_{2j-1}} - x_{i_{2j}}| \right] \prod_{i=1}^m \delta(x_{2i-1} - x_{2i}),$$

d'où la proportionnalité de chacune des intégrales $\mathcal{K}_{r,m}^{(n)}$ à l_v^m . En réalité, suivant l'exemple de l'ordre un, on écrira qu'elles sont proportionnelles à $(l_v/2)^m$, le coefficient de proportionnalité dépendant du rapport des longueurs de corrélation l_v/l_n ainsi que des valeurs de r , m et n . Par suite,

$$\mathcal{K}_{r,m} = \sum_{n=1}^{N(r,m)} \left[\sum_{p=0}^{2r} a_p m^p \right] c_n \left(\frac{l_v}{2} \right)^m = \sum_{p=0}^{2r} b_p m^p \left(\frac{l_v}{2} \right)^m,$$

où chaque coefficient b_p dépend donc des entiers r et m et du rapport des longueurs de corrélation.

XX.4.d Retour sur les moments et distribution des vitesses

On en déduit la forme des moments d'ordre pair de la vitesse d'après l'équation (113),

$$\mu'_{2m} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2r}}{r!} \left(\frac{\sigma_n^2}{2} \right)^r \sum_{p=0}^{2r} b_p m^p \frac{(2m)!}{m!} \left(\frac{\sigma_0^2}{2} \right)^m.$$

En rappelant que les moments impairs μ'_{2m+1} sont nuls, la fonction caractéristique Z_v de la distribution des vitesses est alors donnée par une somme infinie qu'on peut mettre sous la forme⁶

$$Z_v(u_v) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha \sigma_n^2)^{2r}}{2^r r!} \sum_{p=0}^{2r} b_p S_p \left(-\frac{u_v^2 \sigma_0^2}{2} \right) \quad \text{avec} \quad S_p(x) = \sum_{m \geq 0} \frac{x^m}{m!} m^p = Q_p(x) e^x,$$

où Q_p est un polynôme d'ordre p . La fonction caractéristique peut donc s'écrire comme une combinaison linéaire de fonctions de la forme

$$F_k(u_v) = \left(\frac{u_v \sigma_0}{\sqrt{2}} \right)^{2k} \exp \left(-\frac{u_v^2 \sigma_0^2}{2} \right) \quad \text{puisque} \quad Z_v(u_v) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha \sigma_n^2)^{2r}}{2^r r!} \sum_{p=0}^{2r} b_p Q_p \left(-\frac{u_v^2 \sigma_0^2}{2} \right) \exp \left(-\frac{u_v^2 \sigma_0^2}{2} \right).$$

Enfin, la distribution des vitesses est une combinaison linéaire des transformées de Fourier \widehat{F}_k des fonctions F_k , qu'on peut calculer par récurrence, en utilisant une intégration par parties, soit

$$\widehat{F}_0(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}} \exp \left(-\frac{v^2}{2\sigma_0^2} \right) \quad \text{et} \quad \widehat{F}_1(v) = \left(\frac{1}{2} - \frac{v^2}{2\sigma_0^2} \right) \widehat{F}_0(v) \quad \text{pour les deux premiers termes,}$$

$$\widehat{F}_k(v) = \left(2k - \frac{3}{2} - \frac{v^2}{2\sigma_0^2} \right) \widehat{F}_{k-1}(v) - \left(k^2 - \frac{5}{2}k + \frac{3}{2} \right) \widehat{F}_{k-2}(v) \quad \text{pour } k \geq 2.$$

Par conséquent, \widehat{F}_k est le produit de la gaussienne $\widehat{F}_0 = W_v^0$ du cas non-corrélé par un polynôme d'ordre k en $(v/\sigma_0)^2$, et on en déduit que la distribution des vitesses est, elle, le produit de W_v^0 par une série paire

⁶ En ce qui concerne la forme de $S_p(x)$, on la démontre en simplifiant par m , puis en développant $m^{p-1} = (m-1+1)^{p-1}$ selon la formule du binôme. On en déduit alors que $S_p(x)$ s'exprime comme x multiplié par une combinaison linéaire des $S_k(x)$ pour k compris entre 0 et $p-1$. Par récurrence et partant du fait que $S_0(x) = e^x$, on obtient la forme annoncée.

en v/σ_0 , dont les coefficients d_p dépendent de α (et donc de l'exposant polytropique γ), de la dispersion des densités logarithmiques $\sigma_{\tilde{n}}$ et du rapport des longueurs de corrélation $l_v/l_{\tilde{n}}$,

$$W_v(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_0^2}\right) \sum_{p \geq 0} d_p \left(\frac{v^2}{\sigma_0^2}\right)^p. \quad (115)$$

On verra au **XX.6** que la forme (115) est confirmée par le biais de simulations numériques de la distribution des vitesses, et qu'on obtient déjà une très bonne approximation de celle-ci en ne considérant qu'un petit nombre de coefficients d_p .

XX.5 Distribution jointe

XX.5.a Approche par la méthode des moments

Comme on l'a dit avant de faire le calcul de la distribution des densités logarithmiques et de la distribution des vitesses, la quantité qui nous intéresse réellement est la densité de probabilité jointe $W(v, \tilde{n})$, dont on vient en fait de calculer les intégrales sur chacune des variables. Pour déterminer cette distribution jointe, on peut en principe utiliser la même procédure que précédemment, c'est-à-dire partir du calcul des moments mixtes $E\{v^p \tilde{n}^q\}$, en déduire la fonction caractéristique bidimensionnelle $Z(u_v, u_{\tilde{n}})$ définie par la somme infinie

$$Z(u_v, u_{\tilde{n}}) = \sum_{p \geq 0} \sum_{q \geq 0} \frac{(iu_v)^p (iu_{\tilde{n}})^q}{p! q!} E\{v^p \tilde{n}^q\}$$

pour enfin obtenir la distribution jointe $W(v, \tilde{n})$ comme transformée de Fourier de Z . Cependant, si l'on se réfère à ce qui a été écrit plus haut, et en particulier à l'équation (108), les moments mixtes sont proportionnels aux intégrales suivantes,

$$\int_0^z d\tau_1 \dots \int_0^z d\tau_p \int_0^z d\tau'_1 \dots \int_0^z d\tau'_q E \left\{ \prod_{i=1}^p \exp \left[\alpha \tilde{n} (z - \tau_i) - \frac{\tau_i}{l_v} \right] \Gamma_v(z - \tau_i) \prod_{j=1}^q \exp \left(-\frac{\tau'_j}{l_{\tilde{n}}} \right) \Gamma_{\tilde{n}}(z - \tau'_j) \right\},$$

dont les intégrandes font intervenir des moyennes de la forme

$$E \left\{ \exp \left[\alpha \sum_{i=1}^p \tilde{n} (z - \tau_i) \right] \prod_{i=1}^p \Gamma_v(z - \tau_i) \prod_{j=1}^q \Gamma_{\tilde{n}}(z - \tau'_j) \right\}.$$

Comparées avec l'équation (109), ces moyennes semblent bien plus difficile à calculer. En effet, si l'on peut factoriser les fonctions Γ_v , il n'en va pas de même des forces de Langevin associées à la densité logarithmique, puisque les valeurs de \tilde{n} intervenant dans ces moyennes ne sont pas *a priori* indépendantes des sauts de densité logarithmique $\Gamma_{\tilde{n}}$, et, par conséquent, on ne peut pas utiliser les propriétés statistiques de ces derniers pour simplifier les expressions ci-dessus. Si cela était néanmoins possible, on obtiendrait une distribution jointe W factorisable selon

$$W(v, \tilde{n}) = W_{\tilde{n}}(\tilde{n}) W_v(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\tilde{n}}} \exp\left(-\frac{\tilde{n}^2}{2\sigma_{\tilde{n}}^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_0^2}\right) \sum_{p \geq 0} d_p \left(\frac{v^2}{\sigma_0^2}\right)^p. \quad (116)$$

Comme on le verra dans l'analyse numérique, cette forme ne reflète pas la réalité de la distribution W car la forme d'une coupe à densité logarithmique fixée n'est pas indépendante de la valeur de \tilde{n} , contrairement à ce que laisserait supposer la forme (116).

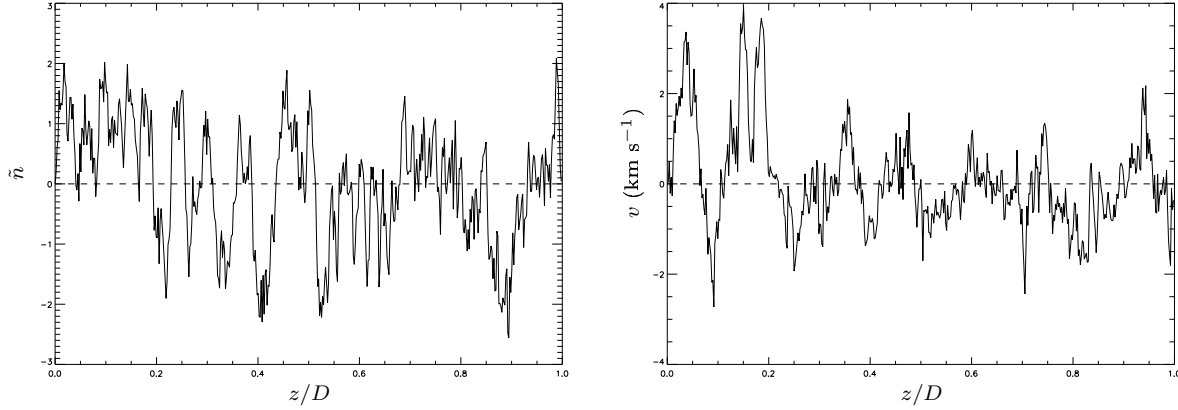


FIG. XX.1 – Champ de densité logarithmique (à gauche) et champ de vitesse (à droite), construits pour le jeu de paramètres suivants : $l_{\tilde{n}}/D = l_v/D = 0,02$, $\sigma_{\tilde{n}} = 1$, $\sigma_0 = 1 \text{ km s}^{-1}$ et $\alpha = 0,33$. Les tirets représentent les valeurs moyennes (nulles) des deux champs.

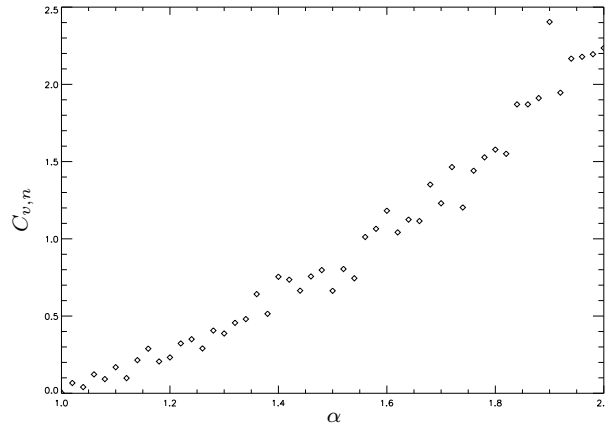


FIG. XX.2 – Évolution de la corrélation entre les champs de densité et de vitesse, mesurée par la quantité $C_{v,n}$ introduite dans le texte, en fonction du paramètre α . Les autres paramètres du modèle sont fixés, et leurs valeurs respectives sont $\sigma_{\tilde{n}} = 1$, $\sigma_v = 1 \text{ km s}^{-1}$, et $l_{\tilde{n}} = l_v = 0,005D$.

XX.5.b Approche semi-empirique

Par conséquent, on est tentés de faire l'hypothèse que W a bien cette forme, mais avec des coefficients d_p dépendant explicitement de \tilde{n} , en plus de leur dépendance en α , $\sigma_{\tilde{n}}$ et $l_v/l_{\tilde{n}}$,

$$W(v, \tilde{n}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\tilde{n}}}} \exp\left(-\frac{\tilde{n}^2}{2\sigma_{\tilde{n}}^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_0^2}\right) \sum_{p \geq 0} d_p(\tilde{n}) \left(\frac{v^2}{\sigma_0^2}\right)^p. \quad (117)$$

Avec cet *ansatz*, et en utilisant l'équation (106) du régime stationnaire pour W , on peut en déduire que les coefficients d_p doivent obéir aux équations différentielles suivantes

$$d_1(\tilde{n}) = \frac{e^{-2\alpha\tilde{n}}}{2} \left[-\frac{l_v}{l_{\tilde{n}}} \sigma_{\tilde{n}}^2 d_0'' + \frac{l_v}{l_{\tilde{n}}} \tilde{n} d_0' + (e^{2\alpha\tilde{n}} - 1) d_0 \right] \quad \text{et}$$

$$d_{k+1}(\tilde{n}) = \frac{e^{-2\alpha\tilde{n}}}{(2k+1)(2k+2)} \left\{ -\frac{l_v}{l_{\tilde{n}}} \sigma_{\tilde{n}}^2 d_k'' + \frac{l_v}{l_{\tilde{n}}} \tilde{n} d_k' + [(4k+1)e^{2\alpha\tilde{n}} - (2k+1)] d_k + (1 - e^{2\alpha\tilde{n}}) d_{k-1} \right\},$$

où d_k' et d_k'' désignent les dérivées première et seconde de d_k par rapport à \tilde{n} . D'après ces formes, la connaissance de d_0 permet en théorie de déduire explicitement tous les autres coefficients. Ce travail,

qui n'a pas encore été mené à bien, devrait permettre de déterminer une forme suffisamment précise de la distribution jointe W , qui puisse être utilisée dans l'intégration numérique de l'équation de transfert généralisée (107). En attendant que cette étude soit poursuivie, on présente dans la section suivante les résultats de simulations numériques justifiant les formes trouvées pour la distribution des vitesses et la distribution jointe.

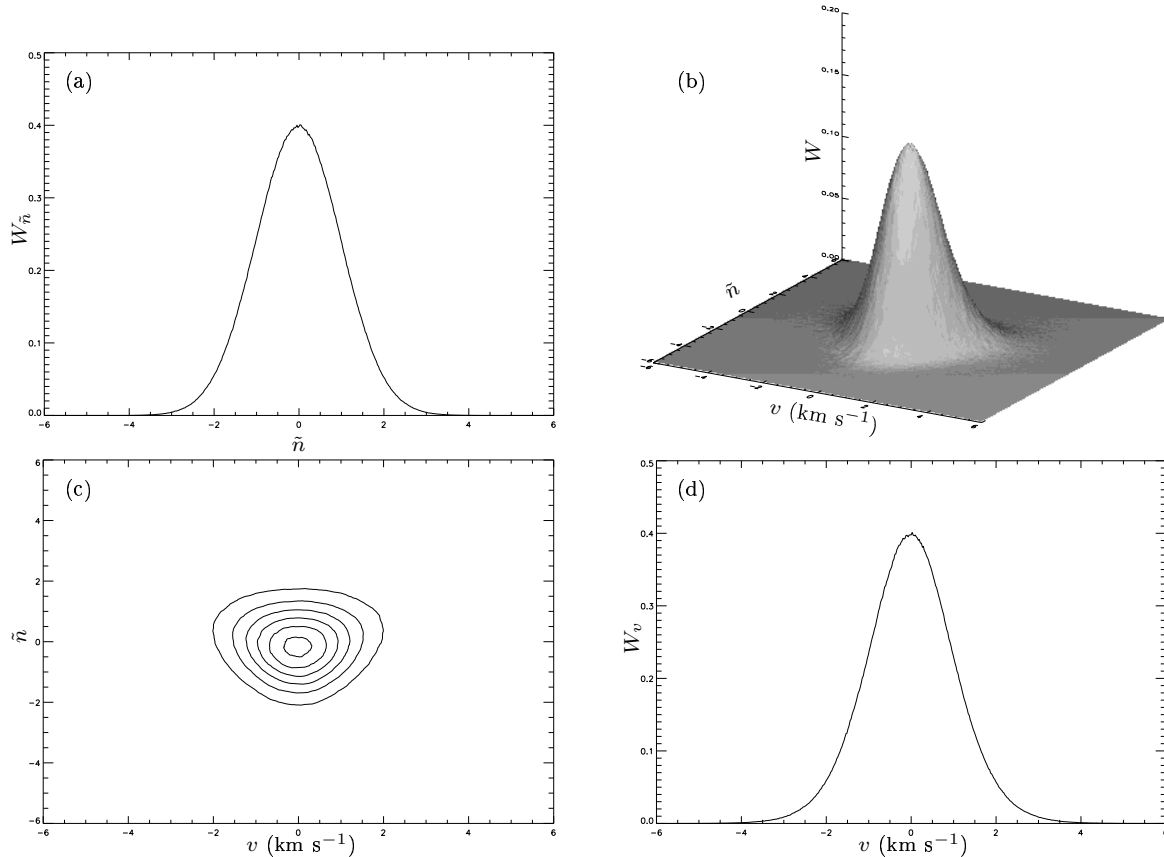


FIG. XX.3 – Distributions obtenues à partir de cent réalisations de champs de densité et de vitesse avec les paramètres suivants : $l_{\tilde{n}} = l_v = 0,0005D$, $\sigma_{\tilde{n}} = 1$, $\sigma_v = 1 \text{ km s}^{-1}$ et $\alpha = 0,25$. Les figures (b) et (c) représentent la distribution jointe W , respectivement sous la forme d'une surface dans un espace à trois dimensions, et comme un ensemble d'isocontours, correspondant à sept valeurs de la distribution régulièrement espacées entre zéro et la valeur maximale. C'est cette dernière représentation qui sera utilisée dans la suite. Notons que cette distribution bidimensionnelle a été lissée pour atténuer le bruit dû à un échantillonnage très fin. Les figures (a) et (d) montrent quant à elles la distribution des densités logarithmiques et la distribution des vitesses.

XX.6 Simulations numériques

XX.6.a Corrélations densité-vitesse

La simulation de champs de vitesse et de densité logarithmique dont l'évolution est gouvernée par les équations de Langevin (104) se fait en partant des conditions initiales $\tilde{n}(0) = 0$ et $v(0) = 0$ et en intégrant numériquement ces équations le long de la ligne de visée. Les processus stochastiques $\Gamma_{\tilde{n}}$ et Γ_v sont tirés de distributions gaussiennes de variance 2. Pour le lecteur intéressé, signalons que l'intégration est effectuée suivant la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre. Les premiers pas le long de la ligne de visée doivent être exclus de l'étude du régime stationnaire, puisque les valeurs des champs en ces points sont encore affectées par les conditions initiales. Pour s'affranchir de ce problème, on ne considérera, dans la construction des histogrammes de vitesse et de densité logarithmique, que les positions $z \geq 5l_v$ et $z \geq 5l_{\tilde{n}}$. Ce choix

présente évidemment une part d'arbitraire, mais il assure que l'influence relative des conditions initiales est inférieure au pourcent⁷.

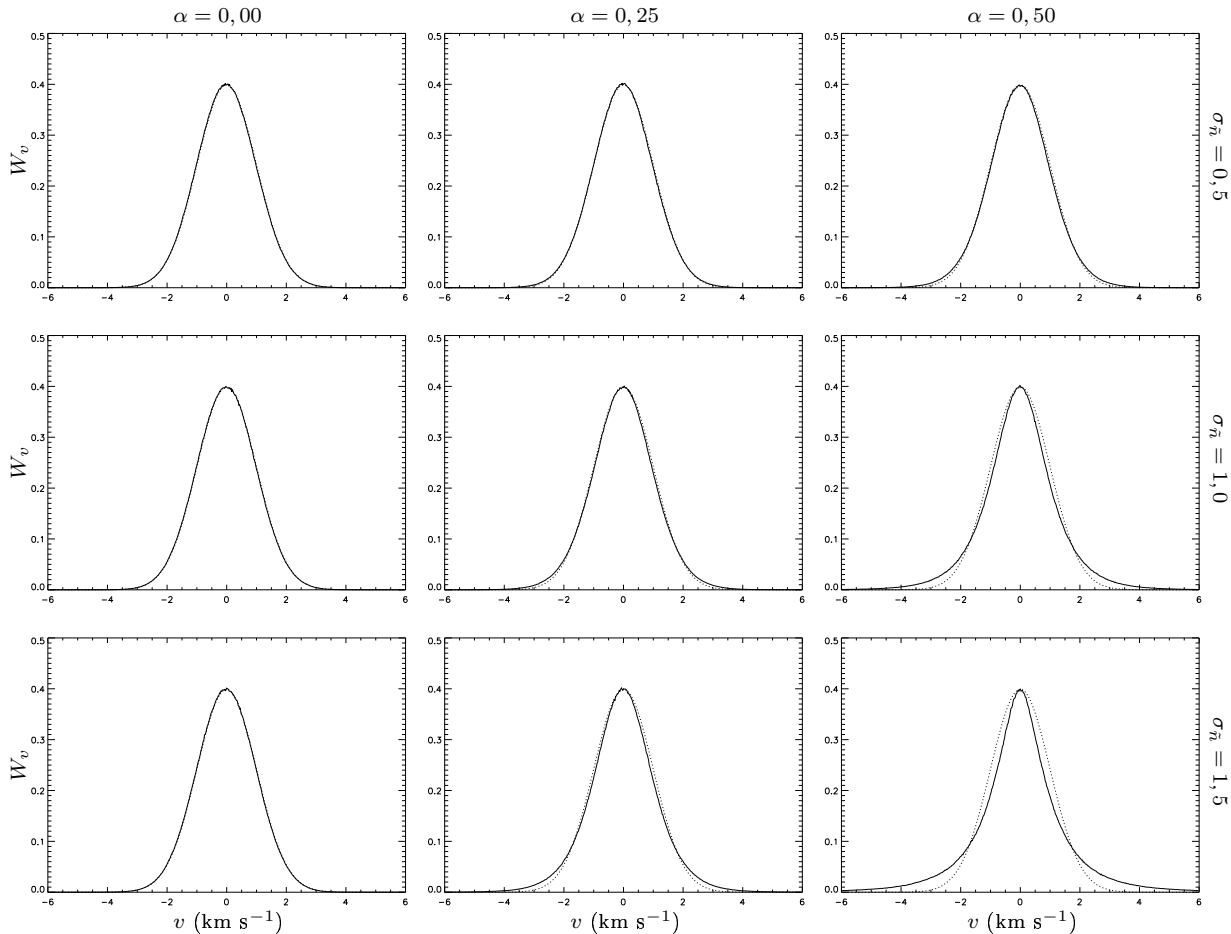


FIG. XX.4 – Distributions des vitesses $W_v(v)$ obtenues pour les valeurs des paramètres α et $\sigma_{\bar{n}}$ indiquées en regard. Le paramètre de corrélation est constant le long de chaque colonne, la dispersion des densités logarithmiques l'est le long de chaque ligne. Les autres paramètres $l_{\bar{n}}$, l_v et σ_0 sont identiques à ceux de la figure XX.3. La gaussienne W_v^0 du cas non-corrélé est indiquée par des pointillés sur chacune des sous-figures.

On a déjà montré, sur la figure XIX.7, des exemples de champs de densité⁸ obtenus en utilisant l'équation (104) correspondante. La figure XIX.1 montre quant à elle deux exemples de champs de vitesse construits par la même méthode. L'effet des corrélations entre ces deux quantités, telles qu'on les a introduites dans ce chapitre, peut être observé⁹ sur la figure XX.1, qui représente un champ de densité logarithmique et un champ de vitesse construits pour $\alpha = 1/3$.

La méthode de corrélation suggère qu'aux endroits où la densité logarithmique est faible, il en va de même pour la dispersion de vitesse, et inversement. Pour vérifier que la corrélation est bien prise en considération, on construit un ensemble de champs de densité et de vitesse en faisant varier le paramètre α , tous les autres paramètres étant fixés. La corrélation est alors mesurée pour chaque couple de champs en calculant la quantité

$$C_{v,n} = \frac{E\{(vn)^2\}}{E\{v^2\}E\{n^2\}} - 1, \quad \text{qui est nulle si les champs de densité et de vitesse ne sont pas corrélés.}$$

⁷Puisque $e^{-5} \simeq 6,74 \cdot 10^{-3}$.

⁸Il s'agit bien de la densité n , et non de la densité logarithmique \bar{n} .

⁹Bien qu'il ne soit pas inutile de s'en être persuadé auparavant...

La figure **XX.2** présente le résultat de cette simulation, en précisant que pour chaque valeur du paramètre de corrélation α , on a construit cent couples de champs, et que c'est la moyenne de $C_{v,\tilde{n}}$ sur ces réalisations qu'on représente en fonction de α . On voit cette fois clairement que la méthode introduite au **XX.2.b** pour corréler les champs de densité et de vitesse stochastiques se traduit bien ainsi dans les simulations.

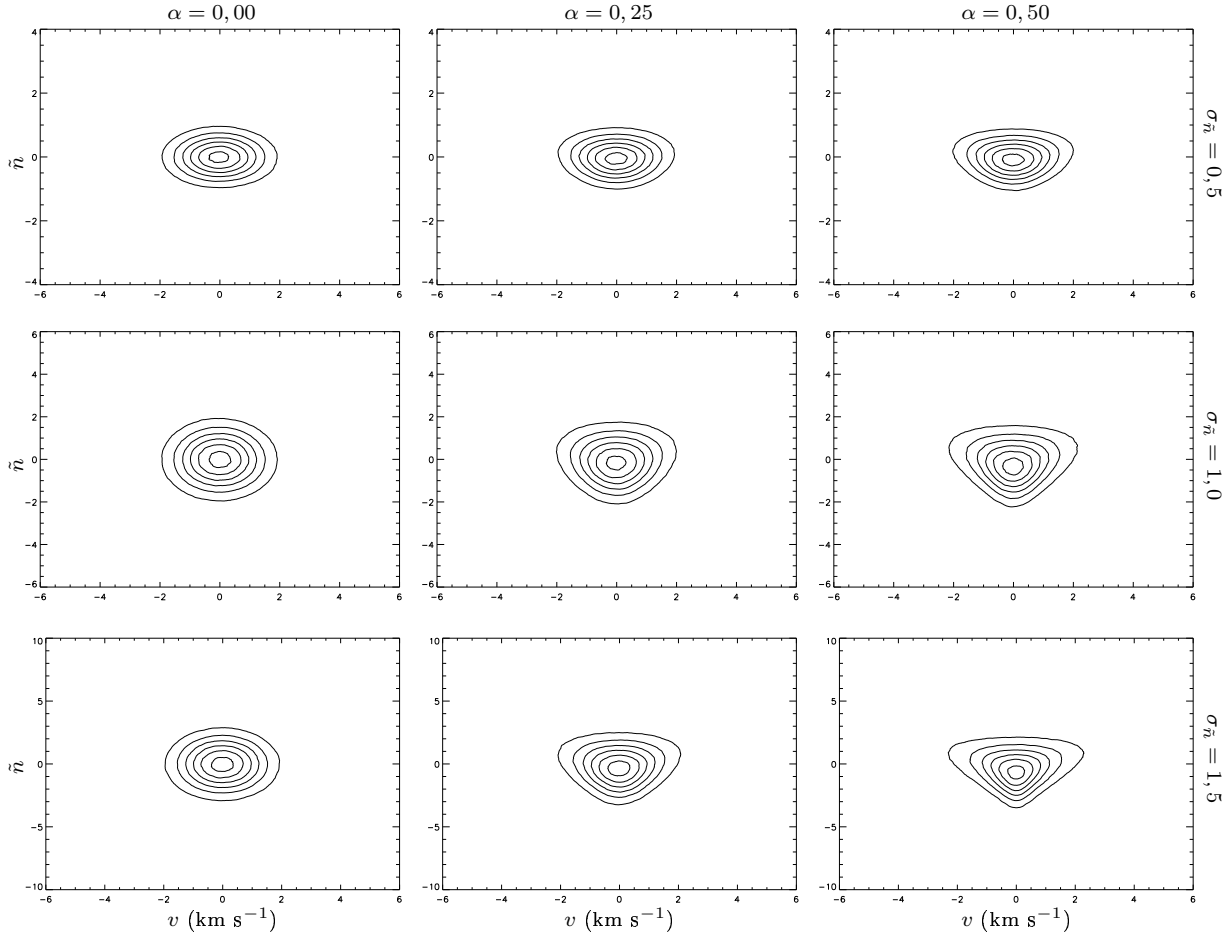


FIG. **XX.5** – Distributions jointes $W(v, \tilde{n})$ obtenues pour les mêmes valeurs des paramètres que celles utilisées sur la figure **XX.4**. La disposition des sous-figures est également la même.

XX.6.b Densités de probabilité

Ceci étant établi, on va considérer les effets de ces corrélations sur les densités de probabilité discutées plus haut du point de vue analytique, à savoir la distribution des densités logarithmiques $W_{\tilde{n}}(\tilde{n})$, la distribution des vitesses $W_v(v)$ et la distribution jointe $W(v, \tilde{n})$. Le calcul numérique des histogrammes de la densité logarithmique et de la vitesse se fait en se limitant, comme on l'a dit, aux positions suffisamment éloignées de la frontière $z = 0$ du nuage pour pouvoir être considérées comme représentatives du régime stationnaire. Plus précisément, les champs sont construits sur des lignes de visée contenant 10^6 pixels, les longueurs de corrélation $l_{\tilde{n}}$ et l_v pouvant être égales, suivant le modèle considéré, à 50 ou 500 pixels. Le régime stationnaire est ainsi atteint sur plus de 99,75% de la ligne de visée.

La figure **XX.3** montre, de façon synthétique, un exemple des différentes distributions obtenues dans ces simulations, pour un jeu de paramètres donné, précisé en légende. On voit en particulier que l'effet des corrélations entre la densité et la vitesse se traduit par une déformation de la distribution jointe par rapport à la gaussienne elliptique du cas non-corrélé, ce qu'on vérifiera d'ailleurs dans la suite. L'écart à la gaussienne de la distribution des vitesses est, lui, plus difficile à voir sur cette figure. Pour l'observer, on considère les distributions des vitesses obtenues en faisant varier le paramètre α ainsi que la dispersion

des densités logarithmiques $\sigma_{\tilde{n}}$. Les résultats sont présentés sur la figure **XX.4**, pour neuf combinaisons de ces paramètres.

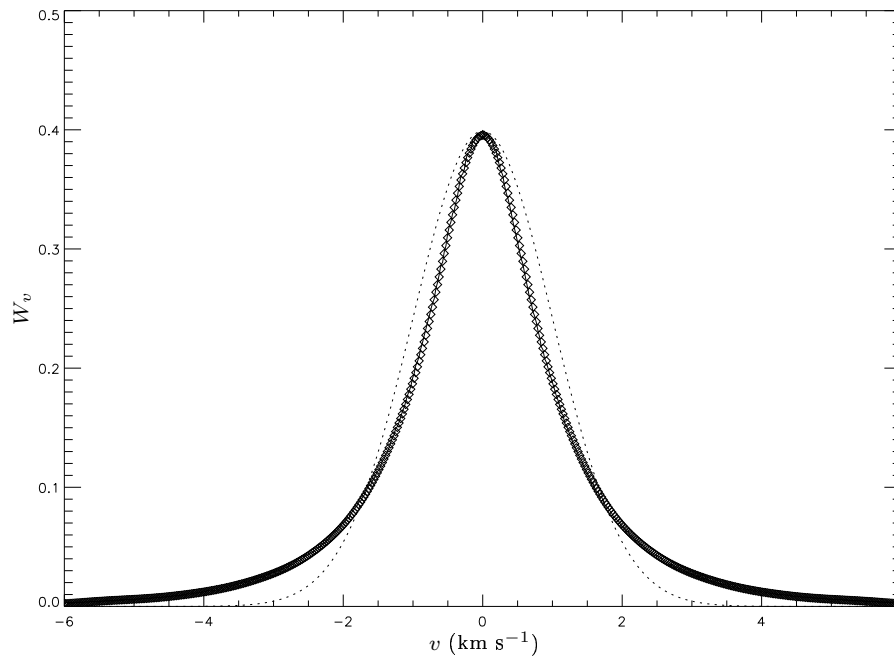


FIG. **XX.6** – Exemple d’ajustement de la distribution des vitesses par une expression de la forme (115). La distribution simulée (trait plein) correspond au cas $\alpha = 0,5$ et $\sigma_{\tilde{n}} = 1,5$, les autres paramètres étant les mêmes que sur les figures **XX.4** et **XX.5**. L’ajustement obtenu par la procédure décrite dans le texte est représenté par des losanges. Pour mémoire, la gaussienne W_v^0 est tracée en pointillés.

Les effets de la corrélation sont d’autant plus marqués que α et $\sigma_{\tilde{n}}$ augmentent. À l’inverse, la distribution $W_{\tilde{n}}$ de la densité logarithmique ne s’écarte jamais de la gaussienne de variance $\sigma_{\tilde{n}}^2$, quel que soit le niveau de corrélation. Quant à la distribution jointe, la figure **XX.5** montre la déformation qu’elle subit lorsque les corrélations entrent en jeu. Celle-ci peut se comprendre en rappelant que la dispersion locale des vitesses σ_v est proportionnelle à une puissance positive de la densité, de sorte qu’une coupe de la distribution jointe à \tilde{n} fixée est d’autant plus large que cette valeur de la densité logarithmique est grande. C’est bien ce qu’on observe sur la figure **XX.5**.

En ce qui concerne la distribution des vitesses, la vérification de la forme analytique (115) se fait en ajustant le rapport W_v/W_v^0 par un polynôme en v^2 . Notons que la limite nulle de W_v^0 lorsque la valeur absolue de la vitesse tend vers l’infini impose de se donner une plage limitée de vitesses sur laquelle est calculé l’ajustement. Cette contrainte n’est cependant pas trop restrictive, car on verra que les ajustements résultants sont en fait excellents sur l’ensemble de l’axe des vitesses. Le polynôme $P(v^2)$ obtenu est alors multiplié par $W_v^0(v)$ pour obtenir un ajustement de W_v . La figure **XX.6** montre un exemple de ce qu’on obtient par cette procédure. Le polynôme P calculé dans ce cas précis est de degré dix, mais il s’agit d’un exemple relativement extrême et le degré du polynôme nécessaire pour reconstruire proprement la distribution des vitesses chute rapidement dès que le paramètre de corrélation α ou la dispersion des densités logarithmiques diminue.

L’ajustement des distributions jointes par la forme semi-empirique (117) se fait quant à lui en cherchant, pour chaque plan de densité logarithmique constante, un ajustement polynômial de

$$\frac{W(v, \tilde{n})}{W_{\tilde{n}}(\tilde{n})W_v^0(v)}, \quad \text{prise bien entendu comme une fonction de la vitesse.}$$

La figure **XX.7** montre le résultat obtenu pour le cas $\alpha = 0,5$ et $\sigma_{\tilde{n}} = 1,5$ déjà utilisé dans les figures précédentes. On constate que l’ajustement trouvé est très proche de la distribution bidimensionnelle W simulée, ce qui justifie *a posteriori* la forme (117). Les différents polynômes calculés par cette méthode sont de degré au plus treize, et comme on l’a signalé plus haut, ce degré maximum est plus petit lorsque les corrélations sont moins importantes.

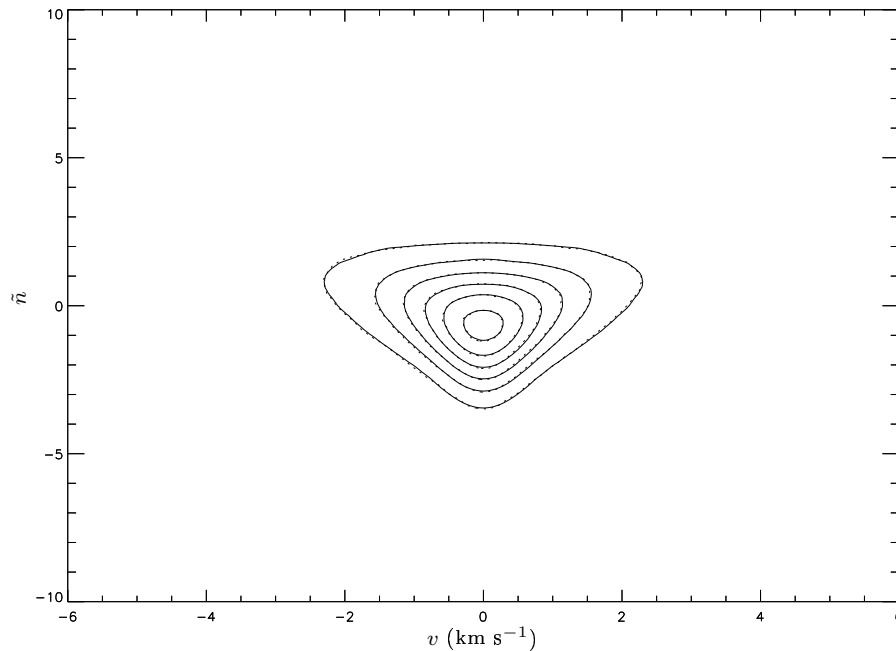


FIG. XX.7 – Ajustement de la distribution jointe correspondant au même jeu de paramètres que la figure XX.6. La distribution simulée est représentée par des contours pointillés, l’ajustement par les contours en trait plein.

XX.7 Perspectives

La prise en compte des corrélations entre les champs de densité et de vitesse stochastiques utilisés dans le cadre de l’étude du transfert radiatif au sein de milieux complexes tels que les nuages moléculaires, nécessitera comme prochaine étape le calcul précis des coefficients d_p intervenant dans la forme semi-empirique (117) de la distribution jointe $W(v, \bar{n})$, dont on vient de voir rapidement, mais sans approfondir l’étude, qu’elle était justifiée par la simulation numérique de champs corrélés. La détermination de ces coefficients doit pouvoir se faire d’une part numériquement, en améliorant la précision des distributions simulées et en utilisant la méthode d’ajustement décrite à la section précédente, et d’autre part semi-analytiquement, en se fondant sur les équations différentielles écrites au **XX.5.b**.

Une fois ces coefficients connus, et leur comportement compris, on pourra par la suite inclure cette forme de la distribution jointe dans l’équation de transfert généralisée (107). L’intégration de cette dernière, en combinaison avec les équations régissant les populations des niveaux, doit alors permettre de déterminer les profils de raie émergents, à la manière de [Gail & Sedlmayr, 1974] et [Hegmann & Kegel, 2000]. Il est d’ailleurs probable que les corrélations ainsi introduites entre les champs de densité et de vitesse auront un effet notable sur ces profils, car la distribution des vitesses, qu’on relie naturellement au profil d’émission local ϕ , s’écarte de la distribution gaussienne qui prévalait jusqu’alors. Ce travail analytique et numérique, réalisé en collaboration avec Michael Hegmann, n’est pour l’instant pas achevé.

□