

QUATRIÈME PARTIE

Filtrage interférométrique des structures

Elliot : How do you explain school to a higher intelligence?

“E.T. the extraterrestrial” (Steven Spielberg)

CHAPITRE XIV

L'interférométrie en radioastronomie

XIV.1 La course à la résolution angulaire

L'existence d'un rayonnement radio en provenance de sources astronomiques, c'est-à-dire à des longueurs d'onde supérieures à 1 mm environ, correspondant à des fréquences inférieures à 300 GHz, est connue depuis les travaux pionniers de Jansky en 1933 [Jansky, 1933] et de Reber en 1940 [Reber, 1940]. On dispose, depuis cette époque et le développement du radar lors de la seconde guerre mondiale, d'antennes permettant de détecter ce rayonnement radio cosmique afin d'en tirer des informations quant à la structure des sources astrophysiques. De manière générale, ces antennes - ou radiotélescopes - sont destinées à collecter le rayonnement provenant d'une direction donnée du ciel, une chaîne de réception en aval permettant la transformation du signal électromagnétique en signal électrique, puis l'amplification et le traitement de ce dernier à des fins d'analyse.

Cependant, dans le cas d'une antenne unique, la résolution angulaire - caractérisée par le rapport de la longueur d'onde λ du rayonnement au diamètre d de l'ouverture - est bien souvent insuffisante pour l'étude correcte des sources. En effet, dans les conditions optimales, une antenne de 100 m de diamètre, telle que celle d'Effelsberg, utilisée à 5 mm de longueur d'onde, offre une résolution angulaire maximale de l'ordre de 13 secondes d'arc, alors que la limite de diffraction des plus grands télescopes optiques ($d \sim 10$ m) est de l'ordre du centième de seconde d'arc. Même en tenant compte de la turbulence atmosphérique dont l'effet de perturbation sur la forme du front d'onde est beaucoup plus marqué en optique qu'en radio, et sans système actif de correction de la forme des miroirs, la résolution angulaire des télescopes optiques est couramment meilleure qu'une seconde d'arc.

Or, l'obtention de grandes résolutions angulaires dans le domaine radio est essentielle à plus d'un titre. Il s'agit d'une part de permettre l'identification des radiosources avec des objets déjà connus dans d'autres domaines de longueurs d'onde, et mieux encore, d'établir des cartes de sources étendues pour pouvoir comparer, avec une même résolution, les distributions spatiales de l'émission dans les différentes parties du spectre électromagnétique, afin d'affiner la compréhension des phénomènes physiques dont ces objets sont le siège. D'autre part, l'amélioration de la résolution angulaire doit permettre l'établissement de systèmes de référence astrométriques de plus en plus précis. Actuellement, les observations de quasars lointains en radio permettent, grâce aux techniques d'interférométrie à très longue base, d'obtenir des résolutions allant jusqu'à 10^{-4} seconde d'arc, soit un ordre de grandeur de mieux que les observations en optique du satellite astrométrique Hipparcos¹.

Ce renversement de la hiérarchie des résolutions angulaires accessibles aux domaines optique et radio témoigne de l'essor exceptionnel de l'interférométrie radioastronomique. C'est en associant plusieurs antennes au sein d'un réseau appelé interféromètre, et en corrélant les signaux reçus par chacune de ces antennes, qu'on peut atteindre ces résolutions angulaires, comme on le verra dans la suite. La rapidité avec laquelle ces techniques se sont développées dans le domaine radio, par rapport aux domaines infrarouge et visible, est due en particulier à la facilité avec laquelle les signaux radio peuvent être traités électroniquement, ainsi qu'à l'effet moindre des turbulences atmosphériques sur le rayonnement de grande longueur d'onde.

XIV.2 Un bref historique

Le développement d'interféromètres radio remonte aux premières années suivant la seconde guerre mondiale. En 1946, Ryle et Vonberg [Ryle & Vonberg, 1946] construisirent un équivalent de l'interféromètre de Michelson à l'aide de deux antennes fonctionnant à 175 MHz. Parallèlement, des interféromètres pla-

¹Remarquons qu'en ce qui concerne l'astrométrie interférométrique, c'est plus la précision sur la phase que la résolution angulaire qui joue.

cés le long des côtes et utilisant la réflexion des rayons lumineux à la surface de la mer ont permis d'enregistrer des premiers résultats scientifiques notables, comme la découverte de la radiosource Cygnus A [Hey *et al.*, 1946]. D'autres sources importantes furent ensuite observées à l'aide d'interféromètres à deux éléments, puis identifiées à des galaxies ou à des restes de supernovæ. À cette époque, la stabilité des chaînes de réception ne permettait cependant généralement pas de remonter aux distributions spatiales de brillance des sources, ce qui est théoriquement faisable, comme on le verra dans la suite. Les observateurs modélisaient alors ces sources par des distributions symétriques, en déduisant la largeur angulaire de l'objet à un niveau de brillance donné à partir des variations d'amplitude des franges d'interférence avec l'espacement des antennes, sans utiliser l'information de phase.

XIV.2.a Diverses méthodes de corrélation

La manière dont les signaux sont corrélés a évolué au cours du temps. Aux débuts de l'interférométrie radio, la technique de corrélation était une simple copie du phénomène d'interférences déjà bien connu en optique, puisque les signaux étaient simplement additionnés puis transmis à un détecteur quadratique, le signal final étant donc de la forme $u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2$, où u_1 et u_2 sont les signaux en sortie des antennes. Les variations de gain des amplificateurs placés au niveau de celles-ci, qui représentent par ailleurs des sources de bruit potentiellement importantes, pouvaient alors complètement noyer l'information contenue dans le terme croisé. La mise en œuvre, à partir des années 1950, de la technique du *phase switching*, consistant à déphaser régulièrement l'un des deux signaux de π avant de l'additionner à l'autre signal, puis à prendre la différence entre les signaux $(u_1 - u_2)^2$ et $(u_1 + u_2)^2$ obtenus, ne laissant subsister que le terme croisé, a permis de s'affranchir de ce problème, car les bruits des amplificateurs sont non corrélés. En définitive, on est passé d'interféromètres additifs à des interféromètres multiplicatifs. Aujourd'hui, les corrélateurs permettant de faire le produit des signaux u_1 et u_2 sont essentiellement numériques, à l'exception du mélange avec le signal de l'oscillateur local, dont on parlera plus loin.

XIV.2.b Réseaux d'antennes et synthèse d'ouverture

La fin des années 1950 et le début de la décennie suivante ont vu le développement de réseaux d'antennes dédiés à la détermination précise des positions angulaires de radiosources, en particulier l'interféromètre développé par Mills, dont les éléments étaient répartis le long des deux bras d'une croix, et l'interféromètre de Cambridge, constitué de quatre antennes placées aux coins d'un rectangle, et qui fut notamment utilisé pour établir le catalogue 3C.

C'est au tournant des années 1970 que l'intérêt a commencé à se porter plus franchement sur la structure détaillée des sources de rayonnement radio. La nécessité de disposer d'une résolution suffisante pour cartographier ces objets imposa d'abord de travailler à des longueurs d'onde centimétriques et de construire des instruments permettant de faire varier les positions relatives des antennes le plus librement possible dans le plan, tels que l'interféromètre d'Owens valley. Mais c'est en utilisant la rotation terrestre comme moyen de faire varier la ligne de base entre deux antennes qu'il a véritablement été possible, pour la première fois, de cartographier des radiosources avec une grande résolution [Ryle *et al.*, 1965]. Cette méthode de synthèse d'ouverture était connue depuis plusieurs années, mais le succès des cartographies de Cygnus A et Cassiopeia A en démontra brillamment le potentiel, amenant les instruments existants à s'y adapter, et incitant les organismes de recherche à construire de nouveaux grands réseaux d'antennes la mettant à profit. C'est ainsi que virent le jour, notamment, l'interféromètre de Westerbork et le VLA, ainsi que, dans le domaine millimétrique, l'interféromètre du plateau de Bure.

XIV.2.c L'interférométrie VLBI

L'obtention de résolutions angulaires encore meilleures a alors requis le développement des techniques d'interférométrie à très longue base (VLBI), dont le principe consiste à séparer la réception des signaux de leur corrélation : on enregistre les signaux au niveau de chaque antenne sur un système de sauvegarde adapté, et les données sont corrélées ultérieurement. Simple en soi, cette méthode nécessite un certain nombre de prouesses techniques, notamment au niveau de la bande passante utilisable - les premiers essais étaient limités à 2 kHz, en raison de la fréquence intermédiaire très basse imposée par le système d'enregistrement - et de la précision des oscillateurs locaux. En contrepartie, elle permet d'utiliser des

lignes de base longues de plusieurs milliers de kilomètres, permettant des résolutions meilleures que la milliseconde d'arc. La combinaison de plus de deux instruments en interférométrie VLBI, à partir du milieu des années 1970, a permis la cartographie de sources éloignées, et la découverte de vitesses apparemment supraluminiques dans les quasars [Pearson *et al.*, 1981]. C'est également grâce aux techniques VLBI que des progrès essentiels en astrométrie et en géodésie ont été accomplis.

XIV.3 Antennes radioastronomiques

XIV.3.a Propagation d'un signal radioastronomique

Nous allons aborder maintenant les diverses étapes de l'observation radiointerférométrique, de façon à établir la relation qui existe entre la distribution de brillance dans le plan du ciel et les données instrumentales accessibles à l'observateur.

Considérons un phénomène physique en un point \mathbf{x}_0 d'une source astronomique, donnant naissance à un champ électrique variable $\mathbf{E}(\mathbf{x}_0, t)$. De manière générale, les variations de ce champ sont aléatoires, à la fois en termes d'amplitude, de phase et de polarisation. L'application des équations de Maxwell montre alors qu'une onde électromagnétique se propage dans l'espace, et peut ainsi être observée à la position \mathbf{x} par un instrument approprié, soit une antenne dans le domaine des radiofréquences. La propagation du champ électromagnétique s'interprète à l'aide du principe de Huygens-Fresnel, qu'on peut résumer ainsi [Born & Wolf, 1959] : L'onde électromagnétique se propage de proche en proche, chaque élément de surface (réel ou virtuel) atteint par une vibration du champ électromagnétique se comportant comme une source secondaire d'ondelettes sphériques dont l'amplitude est proportionnelle à la taille de l'élément de surface considéré. La vibration du champ électromagnétique en un point quelconque est alors la somme vectorielle - l'interférence - des vibrations produites par toutes les sources secondaires.

Le champ électrique \mathbf{E} au voisinage de l'antenne est également dépendant du temps et de la position considérée. Cependant, la linéarité des équations de Maxwell autorise à le décrire comme une superposition de composantes monochromatiques, à l'aide d'une transformée de Fourier inverse,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \int \mathbf{E}_\nu(\mathbf{x}) \exp(2i\pi\nu t) d\nu,$$

et on peut ainsi se contenter d'étudier le cas d'une onde électromagnétique monochromatique, de fréquence ν . D'autre part, on peut faire l'hypothèse simplificatrice que le champ électrique possède une polarisation linéaire fixe, adaptée à la chaîne de réception en aval de l'antenne, de sorte qu'on peut ne considérer que la grandeur scalaire E_ν correspondant à la projection du vecteur \mathbf{E}_ν sur un vecteur unitaire fixe caractérisant la polarisation du champ. Enfin, la distance entre la source et l'antenne étant grande devant la taille de cette dernière, il est tout à fait raisonnable de supposer que l'onde arrivant au niveau de l'ouverture de l'antenne est plane, si l'on suppose pour simplifier qu'il n'y a pas de perturbation du front d'onde éventuellement due aux milieux traversés par le rayonnement, en particulier l'atmosphère terrestre.

XIV.3.b Réception du signal

Concrètement, le champ électrique incident sur un élément de surface de l'antenne y crée un courant variable, lequel est à l'origine d'un champ électrique additionnel. La superposition des deux champs peut alors s'interpréter comme une réflexion du champ électrique sur l'antenne. Ainsi les propriétés des antennes radioastronomiques peuvent parfaitement se comprendre à partir des lois de l'optique et on peut également voir les antennes comme des instruments modifiant la phase du champ électrique incident de manière à concentrer les rayons sur un point focal. En particulier, les antennes de type paraboloïde de révolution sont théoriquement stigmatiques lorsque la source est à l'infini². De même, comme en optique, la taille finie des antennes se traduit par un phénomène de diffraction autour de l'image géométrique de la source. Afin de comprendre quelle est la quantité mesurée par une antenne, intéressons nous donc d'abord au cas d'une source ponctuelle monochromatique située à l'infini sur l'axe de pointage de l'antenne, comme sur la figure XIV.1. Schématiquement, l'antenne se comporte comme la combinaison d'un diaphragme et d'une lentille formant l'image de la source sur le plan focal.

²Comme on l'a dit, c'est le cas des objets astronomiques, avec une excellente approximation.

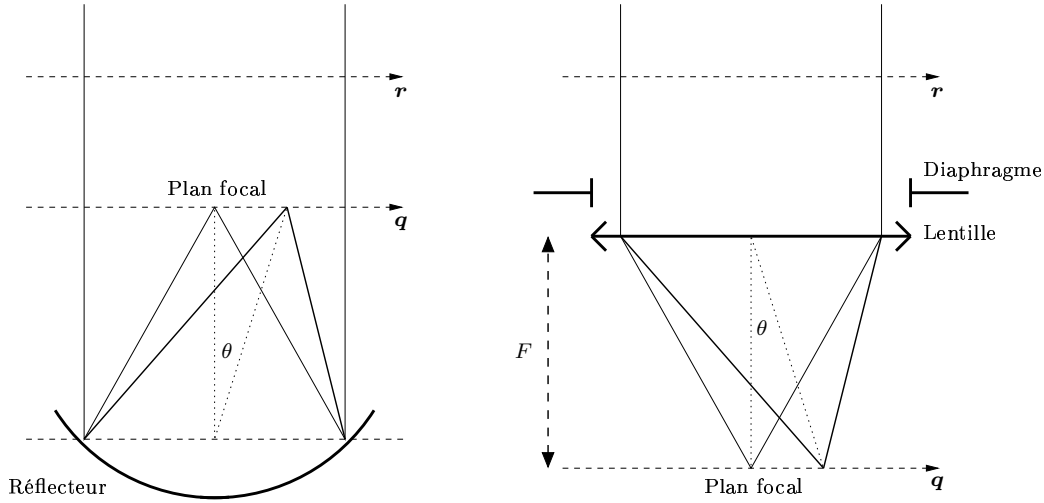


FIG. XIV.1 – Formation d'une image par un radiotélescope. Le front d'onde plane arrive perpendiculairement à la ligne de visée et est concentré au foyer du réflecteur (à gauche). La situation est formellement identique à celle de la formation de l'image d'un objet à l'infini par une lentille convergente (à droite).

On est alors dans les conditions de l'approximation de Fraunhofer du phénomène de diffraction. Si l'on note $E_\nu^0(\mathbf{r})$ le champ électrique dans un plan perpendiculaire aux rayons situé juste en amont du système optique, et si l'on note $g_\nu(\mathbf{r})$ la fonction de transfert de ce système, définie par le rapport du champ électrique en aval à celui en amont, alors le champ électrique $E_\nu(\mathbf{q})$ dans le plan focal de l'instrument est donné par une relation de transformée de Fourier,

$$E_\nu(\mathbf{q}) = \frac{\nu e^{ikF}}{icF} \iint g_\nu(\mathbf{r}) E_\nu^0(\mathbf{r}) \exp(-2i\pi\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (75)$$

où F est la distance focale de l'instrument, $k = (2\pi\nu)/c$ et \mathbf{q} repère la position d'un point dans le plan focal en termes de fréquences spatiales, et peut être relié aux angles d'inclinaison θ_x et θ_y de la direction de diffraction sur l'axe optique,

$$\mathbf{q} = q_x \mathbf{e}_x + q_y \mathbf{e}_y = \frac{\nu}{c} \sin(\theta_x) \mathbf{e}_x + \frac{\nu}{c} \sin(\theta_y) \mathbf{e}_y.$$

Puisque la source est ponctuelle, monochromatique, et située à l'infini sur l'axe optique, le champ $E_\nu^0(\mathbf{r})$ dans le plan juste en amont de l'ouverture est évidemment uniforme, égal à une constante E_ν^0 , de sorte que l'équation (75) devient

$$E_\nu(\mathbf{q}) = \frac{\nu e^{ikF}}{icF} E_\nu^0 \iint g_\nu(\mathbf{r}) \exp(-2i\pi\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) d\mathbf{r} = E_\nu^0 \hat{g}_\nu(\mathbf{q}).$$

Le traitement du signal en aval de l'antenne nécessite alors un couplage au niveau du plan focal, de façon à faire entrer le champ électrique E_ν dans un guide d'onde menant au mélangeur. Ce couplage complexe se fait à l'aide d'un cornet permettant une adaptation d'impédance entre l'espace libre et le guide, de sorte que les pertes d'énergie par réflexion soient limitées. De plus, il faut noter qu'on récupère uniquement le champ au centre du plan focal, de sorte que le signal obtenu pour une source située dans la direction de pointage est simplement $U_\nu(\mathbf{0}) = E_\nu^0 \hat{g}_\nu(\mathbf{0}) = E_\nu^0 B_\nu(\mathbf{0})$, où l'on a introduit $B_\nu(\mathbf{q}) = \hat{g}_\nu(-\mathbf{q})$, qui représente la réponse impulsionnelle de l'instrument en termes d'amplitude du champ électrique, ou *voltage reception pattern* [Thompson *et al.*, 1991], à ne pas confondre avec le *power pattern* ou lobe primaire $P_\nu(\mathbf{q})$ qui est égal à $|B_\nu(\mathbf{q})|^2$. Typiquement, $B_\nu(\mathbf{q})$ présente un pic central important pour $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ et des pics secondaires positifs et négatifs, qu'on peut atténuer en modifiant la fonction de transmission³. La largeur du pic central,

³Cette modification se fait en réalité plus loin dans la chaîne, grâce à des corrugations sur la surface interne du cornet au niveau de l'entrée du récepteur.

ou lobe principal, donne la résolution angulaire de l'antenne unique. En effet, si l'on considère maintenant une source également monochromatique et ponctuelle mais située hors de l'axe optique, la distribution du champ électrique au niveau du plan focal est

$$E_\nu(\mathbf{q}) = \frac{\nu e^{ikF}}{icF} \iint g_\nu(\mathbf{r}) E_\nu^0 e^{i\phi_0(\mathbf{r})} \exp(-2i\pi\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{\nu e^{ikF}}{icF} \iint g_\nu(\mathbf{r}) E_\nu^0 \exp[-2i\pi(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)\cdot\mathbf{r}] d\mathbf{r},$$

où $\phi_0(\mathbf{r}) = 2\pi\mathbf{q}_0\cdot\mathbf{r}$ est la phase du champ électrique en \mathbf{r} au niveau de l'ouverture, par rapport à la phase au point central $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, le vecteur \mathbf{q}_0 correspondant, dans le plan de Fourier, à la direction de la source par rapport à la direction de pointage. Ainsi, dans le cas considéré, $E_\nu(\mathbf{q}) = E_\nu^0 \widehat{g}_\nu(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)$, ce qui traduit le déplacement de la réponse impulsionnelle dans le plan focal, et le signal reçu finalement en sortie est $U_\nu(\mathbf{q}_0) = E_\nu^0 B_\nu(\mathbf{q}_0)$ et c'est donc bien la taille du lobe central de B_ν qui donne la résolution angulaire de l'instrument.

XIV.3.c Conversion de fréquence

Le traitement des signaux en sortie des antennes comprend de nombreuses étapes, notamment d'amplification, de transport, de retard, de filtrage et bien sûr de corrélation. La plupart de ces manipulations du signal sont techniquement difficiles aux fréquences d'origine, qui peuvent atteindre plusieurs centaines de GHz. Il est donc classique d'abaisser la fréquence ν du signal astronomique à l'aide d'un oscillateur local et d'un mélangeur, de la manière suivante. À la sortie de l'antenne, on dispose d'une tension alternative $U_\nu(t)$, de fréquence ν et dont l'amplitude est proportionnelle au champ électrique. Cette tension est ensuite mélangée au signal $U_0(t)$ issu d'un oscillateur local (LO),

$$U_\nu(t) = \alpha E_\nu^0 \cos(2\pi\nu t + \phi) \quad \text{et} \quad U_0(t) = A \cos(2\pi\nu_0 t + \phi_0).$$

Ce mélange se fait en appliquant la superposition des deux tensions à un dipôle non-linéaire (de type diode) dont la caractéristique courant-tension est exprimable sous forme d'une série, d'où [Guilloteau, 2000]

$$I = \sum_{p \geq 0} a_p (U_\nu + U_0)^p = \sum_{i,j \geq 0} b_{ij} U_\nu^i U_0^j = \sum_{i,j \geq 0} b_{ij} (\alpha E_\nu^0)^i A^j [\cos(2\pi\nu t + \phi)]^i [\cos(2\pi\nu_0 t + \phi_0)]^j.$$

La relation fondamentale $2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$ montre que l'intensité aux bornes du dipôle possède un spectre discret, où seules sont présentes les fréquences de la forme $|p\nu + q\nu_0|$ avec p et q entiers relatifs. En sortie du mélangeur, on insère un filtre de fréquence centrale ν_c et de bande passante $\Delta\nu$ permettant de sélectionner uniquement la composante de fréquence $|\nu - \nu_0|$, soit

$$\nu_c - \frac{\Delta\nu}{2} \leq |\nu - \nu_0| \leq \nu_c + \frac{\Delta\nu}{2}.$$

Le signal en sortie du filtre est alors, suivant les positions relatives de ν et de ν_0 ,

$$I \propto E_\nu^0 A \cos[2\pi(\nu - \nu_0)t + \phi - \phi_0] \quad \text{si } \nu \geq \nu_0 \quad \text{ou} \quad I \propto E_\nu^0 A \cos[2\pi(\nu_0 - \nu)t + \phi_0 - \phi] \quad \text{si } \nu \leq \nu_0.$$

La fréquence $\nu' = |\nu - \nu_0|$ est appelée fréquence intermédiaire (*intermediate frequency*). En conclusion, le filtre laisse passer les composantes du signal radioastronomique dont les fréquences se trouvent dans deux bandes de part et d'autre de la fréquence de l'oscillateur local, appelées *Upper Side Band* (USB) et *Lower Side Band* (LSB), respectivement, comme indiqué sur la figure XIV.2. Remarquons que la phase à $t = 0$ est différente dans chaque cas. Sans autre filtrage ou information complémentaire sur le spectre de la source, il est donc *a priori* impossible de déterminer à quelle bande de fréquence appartient un signal particulier en sortie du récepteur, et on a affaire à une réception de type *Double Side Band* (DSB). Certains récepteurs, cependant, permettent de supprimer l'une des deux bandes, soit parce qu'ils ont une réponse très dépendante de la fréquence, soit parce qu'un filtre a été placé en amont de la chaîne de réception, auquel cas on parle de réception *Single Side Band* (SSB).

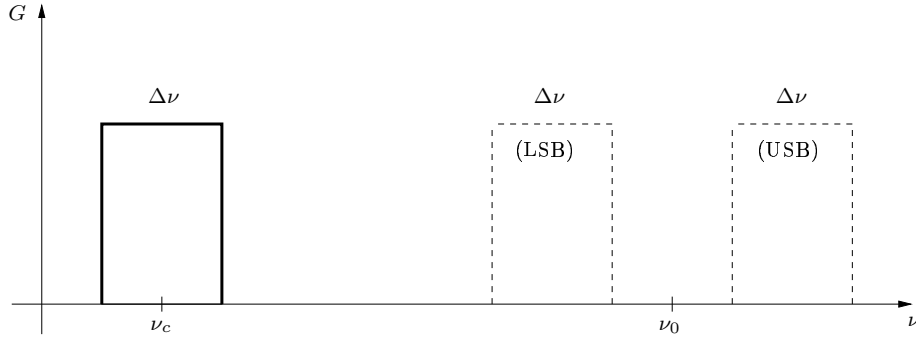


FIG. XIV.2 – Représentation schématique de la conversion de fréquence. Les deux bandes de fréquences observables (USB et LSB) sont représentées en tirets, la bande passante du récepteur en trait plein.

XIV.4 L'interféromètre à deux éléments

XIV.4.a Les franges d'interférence

Supposons maintenant que la source ponctuelle monochromatique est observée simultanément par deux antennes identiques formant l'interféromètre le plus simple qu'on puisse imaginer, dans la direction du vecteur unitaire σ_0 . On suppose toujours que la distance à laquelle se trouve la source permet de considérer que l'onde électromagnétique incidente est plane.

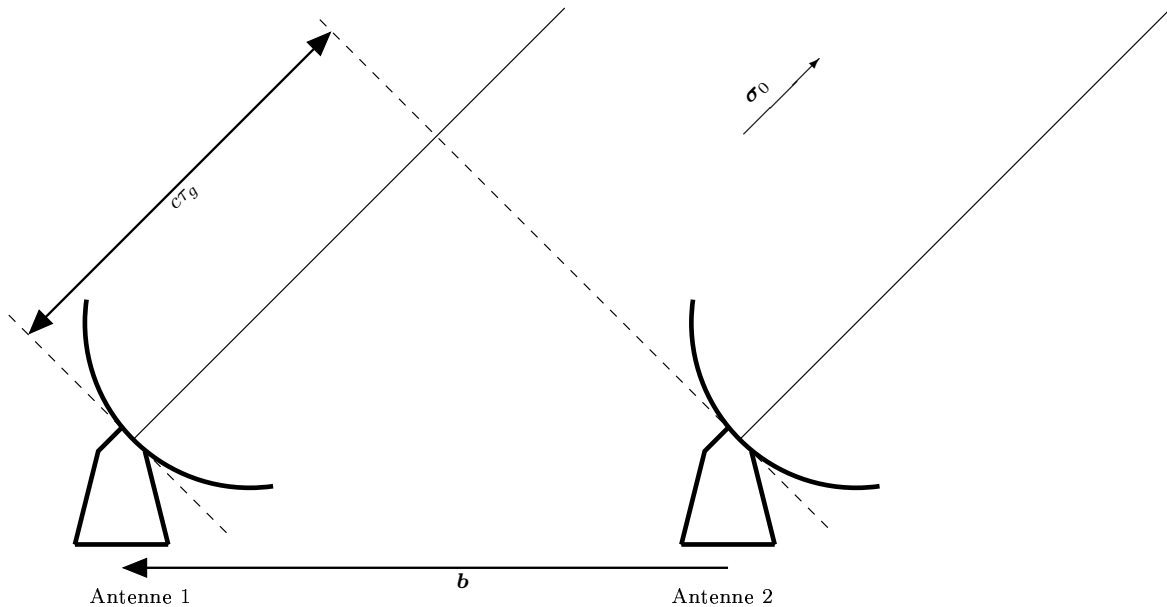


FIG. XIV.3 – Représentation de l'origine du retard géométrique τ_g .

On voit sur la figure XIV.3 que l'onde arrivant sur l'antenne 1, bien qu'étant la même que celle arrivant sur l'antenne 2, est reçue avec un retard géométrique τ_g donné par la relation $c\tau_g = \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0$, où \mathbf{b} désigne le vecteur de ligne de base reliant les deux antennes. En faisant l'hypothèse que les deux récepteurs sont également strictement identiques, et en négligeant toutes les sources de bruit, les signaux issus des deux antennes sont⁴

$$u_1 = U \cos [2\pi\nu(t - \tau_g)] \quad \text{et} \quad u_2 = U \cos (2\pi\nu t),$$

⁴On oublie pour l'instant la conversion de fréquence évoquée au dessus.

où l'amplitude U des deux signaux est proportionnelle à celle du champ électrique reçu au niveau des antennes. Les deux signaux sont alors combinés dans un corrélateur constitué d'un multiplicateur et d'un intégrateur, de sorte que le signal en sortie u_s est une moyenne du produit $u_1 u_2$ sur un temps τ_i ,

$$u_s = 2\mu U^2 \langle \cos[2\pi\nu(t - \tau_g)] \cos(2\pi\nu t) \rangle_{\tau_i} = \mu U^2 \cos(2\pi\nu\tau_g), \quad (76)$$

où μ est un facteur de proportionnalité dépendant du corrélateur. Cette équation suppose que le délai géométrique τ_g ne varie pas sur la durée de l'intégration, ce qui est inexact en toute rigueur. En fait, le temps caractéristique de variation de τ_g est celui de la rotation terrestre, et est donc grand devant les temps caractéristiques τ_i d'intégration des signaux, qui sont plutôt de l'ordre de la minute. Ainsi, le signal de sortie dépend lentement du temps selon $u_s(t) = \mu U^2 \cos[2\pi\nu\tau_g(t)]$, et présente donc des variations sinusoïdales exactement analogues aux franges d'interférence connues en optique, avec une amplitude proportionnelle à l'intensité du champ de rayonnement incident. Il faut noter que ce résultat n'est valable que si la réponse des antennes au signal est invariante dans le temps, soit parce qu'elles sont isotropes, soit parce qu'elles suivent la source dans son mouvement sur la sphère céleste.

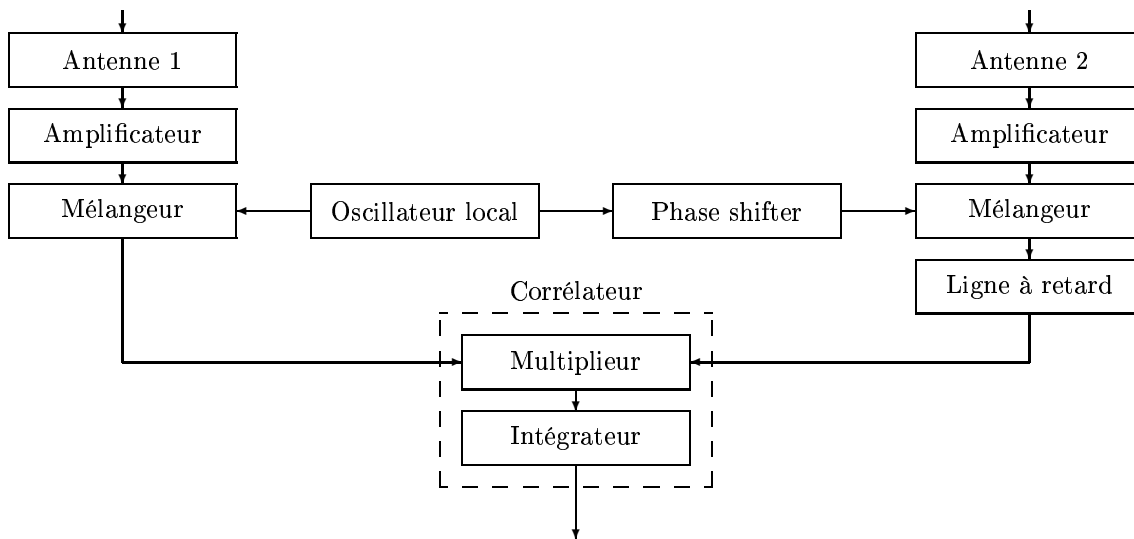


FIG. XIV.4 – Schéma simplifié de la chaîne de réception et de corrélation des signaux reçus au niveau de deux antennes. En sortie, le signal résultant est enregistré pour un traitement ultérieur.

XIV.4.b Cas d'une source étendue et non monochromatique

Le cas d'une source ponctuelle et monochromatique est hautement idéalisé. De manière plus réaliste, on doit considérer que la source observée est étendue et qu'elle émet dans un domaine de fréquence $\Delta\nu$, en s'autorisant toutefois à supposer que son émission est spatialement et temporellement incohérente. Considérons que les deux antennes pointent dans la direction σ_0 du "centre" de la source. Comme on l'a vu, le signal $U_\nu(\sigma)$ reçu par chaque antenne en provenance d'un angle solide $d\Omega$ autour d'une direction σ et dans un intervalle de fréquence $d\nu$ autour d'une fréquence centrale ν est proportionnel au produit⁵ $E_\nu(\sigma)B_\nu(\sigma)$, et le signal en sortie du corrélateur, correspondant à l'équation (76), est

$$d^2 u_s = CP_\nu(\sigma) I_\nu(\sigma) \cos\left(2\pi\nu \frac{\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{c}\right) d\Omega d\nu \quad \text{avec} \quad I_\nu(\sigma) d\nu d\Omega = Z |E_\nu(\sigma)|^2, \quad (77)$$

le coefficient de proportionnalité Z , homogène à une impédance par unité de surface, dépend des caractéristiques de la chaîne de réception. La quantité $I_\nu(\sigma)$ désigne l'intensité spécifique (voir le chapitre XVIII)

⁵Notons qu'on change quelque peu la notation, puisque les quantités considérées sont écrites ici en fonction de la direction σ et non plus des coordonnées \mathbf{q}_0 dans le plan de Fourier, ce qui est équivalent.

émise par la source à la fréquence ν et dans la direction $\boldsymbol{\sigma}$. Notons que l'équation (77) suppose que les antennes sont identiques. En intégrant sur le champ de vue, on a donc

$$du_s = d\nu \int P_\nu(\boldsymbol{\sigma}) I_\nu(\boldsymbol{\sigma}) \cos\left(2\pi\nu \frac{\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{c}\right) d\Omega = d\nu \int P_\nu(\boldsymbol{\sigma}) I_\nu(\boldsymbol{\sigma}) \cos(2\pi\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}) d\Omega \quad \text{avec} \quad \mathbf{p} = \frac{\nu}{c}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{b}}{\lambda}.$$

Sachant que le pointage des antennes se fait dans la direction ‘‘moyenne’’ $\boldsymbol{\sigma}_0$, on introduit le vecteur $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0$, qui est orthogonal à $\boldsymbol{\sigma}_0$ puisqu'on suppose les vecteurs $\boldsymbol{\sigma}_0$ et $\boldsymbol{\sigma}$ unitaires. En effet,

$$1 = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\sigma} \approx \boldsymbol{\sigma}_0\cdot\boldsymbol{\sigma}_0 + 2\boldsymbol{\sigma}_0\cdot\mathbf{s} = 1 + 2\boldsymbol{\sigma}_0\cdot\mathbf{s} \quad \text{d'où} \quad \boldsymbol{\sigma}_0\cdot\mathbf{s} \approx 0$$

au premier ordre si $|\mathbf{s}| \ll 1$, c'est-à-dire si on s'intéresse à une source assez petite. On peut alors écrire⁶ la réponse de l'interféromètre sous la forme

$$du_s = \cos(2\pi\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}_0) d\nu \int P_\nu(\mathbf{s}) I_\nu(\mathbf{s}) \cos(2\pi\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}) d\Omega - \sin(2\pi\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}_0) d\nu \int P_\nu(\mathbf{s}) I_\nu(\mathbf{s}) \sin(2\pi\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}) d\Omega.$$

En introduisant la fonction de visibilité complexe V_0 définie par

$$V_0(\mathbf{p}) = \int P_\nu(\mathbf{s}) I_\nu(\mathbf{s}) e^{-2i\pi\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}} d\Omega, \quad \text{on a} \quad du_s = d\nu |V_0| \cos(2\pi\nu\tau_g - \phi_\nu), \quad (78)$$

où $|V_0|$ et ϕ_ν sont respectivement l'amplitude et la phase de la fonction de visibilité complexe.

En intégrant sur la bande passante $\Delta\nu$ autour de la fréquence centrale ν_0 , et en faisant ici l'hypothèse simplificatrice que le lobe primaire et l'intensité spécifique ne dépendent pas de la fréquence, on a

$$u_s = \int d\nu |V_0| \cos(2\pi\nu\tau_g - \phi_\nu) = |V_0| \Delta\nu \cos(2\pi\nu_0\tau_g - \phi_\nu) \frac{\sin(\pi\Delta\nu\tau_g)}{\pi\Delta\nu\tau_g}. \quad (79)$$

Le facteur d'atténuation de la forme sinus cardinal apparaissant dans cette équation⁷ correspond au brouillage des franges d'interférence pour une source présentant un spectre étendu, chaque longueur d'onde apportant son propre système de franges avec un interfrange différent. On peut également interpréter cette atténuation, qui augmente rapidement avec le délai géométrique, comme le résultat de la ‘‘désynchronisation’’ des trains d'onde arrivant sur les antennes 1 et 2. Cet effet peut donc être dévastateur si l'on souhaite suivre une source pendant son transit, et il convient de compenser le retard τ_g de manière à resynchroniser les trains d'onde.

XIV.4.c Blocage des franges

On introduit donc, sur le chemin du signal issu de l'antenne en avance, une ligne à retard qui peut être constituée soit de câbles de différentes longueurs qui sont connectés à tour de rôle au système de façon adaptée à l'évolution de τ_g , soit de retardateurs électroniques lorsque le signal est déjà numérisé. On a donc un retard τ_d introduit dans la chaîne de réception en aval du mélangeur de l'antenne 2. En considérant le schéma de la figure **XIV.4** et en se plaçant dans le cas d'une conversion de fréquence USB, les signaux issus des antennes 1 et 2 présentent des phases ϕ_1 et ϕ_2 en entrée du corrélateur, avec $\phi_1 = -2\pi\nu\tau_g - \theta_1$ et $\phi_2 = -2\pi\nu'\tau_d - \theta_2$, où θ_1 et θ_2 sont les déphasages introduits, sur les signaux 1 et 2 respectivement, par l'oscillateur local. La forme intégrale de l'équation (79) s'écrit alors

$$u_s = \int d\nu |V_0| \cos(\phi_2 - \phi_1 - \phi_\nu) = \int d\nu |V_0| \cos(2\pi\nu\Delta\tau + 2\pi\nu_0\tau_d - \theta_2 + \theta_1 - \phi_\nu).$$

De manière générale, cette forme implique que l'amplitude de la réponse du corrélateur est également modulée, comme au **XIV.4.b**, par une fonction dépendant cette fois de l'erreur $\Delta\tau = \tau_g - \tau_d$ appelée *delay*

⁶Sous réserve de redéfinir le lobe primaire P_ν et l'intensité spécifique I_ν en les recentrant sur la direction $\boldsymbol{\sigma}_0$.

⁷Le fait que le facteur d'atténuation soit ici un sinus cardinal est lié aux hypothèses d'uniformité en fréquence de la réponse des récepteurs et du spectre de puissance de la source, mais le résultat général est qu'il apparaît un brouillage des franges pour des bandes passantes ou des délais géométriques trop grands.

tracking error, qui en pratique est bien inférieure au retard géométrique τ_g , ce qui permet, en ajustant régulièrement le retard τ_d , de préserver le contraste des franges.

Cependant, la présence du terme $2\pi\nu_0\tau_d$ provoque également une modulation des franges à une vitesse un peu trop rapide pour la numérisation du signal. On introduit donc un décalage de phase (*phase shift*) ϕ_0 permettant de compenser ce terme, et ainsi de bloquer les franges. En théorie, ce blocage empêche dès lors de mesurer simultanément l'amplitude et la phase de la fonction de visibilité. On améliore donc encore le système en utilisant un second corrélateur qui déphase l'un des deux signaux de $\pi/2$ avant corrélation. On mesure ainsi simultanément les parties réelle et imaginaire de la fonction de visibilité complexe. Le système ainsi décrit est appelé corrélateur complexe, pour des raisons évidentes.

XIV.4.d Système de coordonnées

Une fois mesurée la fonction de visibilité complexe $V_0(\mathbf{p})$ donnée par l'équation (78), son utilisation pratique requiert la définition d'un système de coordonnées approprié dans lequel écrire le vecteur \mathbf{p} représentant, à un facteur multiplicatif près, la ligne de base entre les deux antennes. Il apparaît naturel que l'une de ses composantes soit prise parallèle à la direction de pointage $\boldsymbol{\sigma}_0$ de l'interféromètre. On introduit donc un système $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ avec $\mathbf{e}_z = \boldsymbol{\sigma}_0$ et $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ définissant un système de coordonnées perpendiculaire à la direction de pointage avec, conventionnellement, \mathbf{e}_x vers l'est et \mathbf{e}_y vers le nord. On notera ainsi $\mathbf{p} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z$. Notons que u, v et w donnent les composantes de la ligne de base dans ce système de coordonnées, mesurées en longueurs d'onde. La direction quelconque $\boldsymbol{\sigma}$, dans ce système de coordonnées, s'écrit alors $\boldsymbol{\sigma} = l\mathbf{e}_x + m\mathbf{e}_y + n\mathbf{e}_z$, avec $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Les coordonnées l et m correspondent aux cosinus directeurs de $\boldsymbol{\sigma}$ dans le système $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$. Bien entendu, les fonctions P_ν et I_ν ne dépendent que de ces deux paramètres, et une image dans le plan (l, m) représente la projection de la sphère céleste sur son plan tangent à l'origine des coordonnées, comme le montre la figure XIV.5. Dans ces conditions, le vecteur $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0$ s'écrit $l\mathbf{e}_x + m\mathbf{e}_y + (n-1)\mathbf{e}_z$ et la fonction de visibilité devient

$$V_0(u, v, w) = \iint P_\nu(l, m) I_\nu(l, m) e^{-2i\pi[ul+vm+w(n-1)]} \frac{dldm}{\sqrt{1-l^2-m^2}},$$

avec la convention que l'intégrande est nulle pour $l^2 + m^2 \geq 1$. Cette équation est presque une transformée de Fourier, mais pas exactement. Afin de pouvoir utiliser le puissant formalisme de Fourier, on peut faire l'hypothèse que le champ dont on veut faire l'image est petit, de sorte que

$$n-1 \approx -\frac{1}{2}(l^2 + m^2) \Rightarrow V_0(u, v, w) \approx \iint \frac{P_\nu(l, m) I_\nu(l, m)}{\sqrt{1-l^2-m^2}} e^{-2i\pi(ul+vm)} e^{i\pi(l^2+m^2)w} dldm.$$

Le terme d'erreur de phase $\delta\phi = \pi(l^2 + m^2)w$ peut être majoré simplement en remarquant que

$$w < w_{\max} \simeq \frac{b_{\max}}{\lambda} \simeq \frac{1}{\theta_s} \quad \text{et} \quad l^2 + m^2 < \theta_f^2 \quad \text{donc} \quad \delta\phi < \frac{\pi\theta_f^2}{4\theta_s},$$

où θ_s et θ_f désignent respectivement la taille du lobe synthétisé (voir plus bas) et celle du champ de vue, ce qui implique une majoration de ce dernier suivant l'erreur de phase maximale qu'on s'autorise.

Moyennant la redéfinition du lobe primaire d'une antenne selon la transformation

$$P'_\nu(l, m) = \frac{P_\nu(l, m)}{\sqrt{1-l^2-m^2}} \quad \text{on a} \quad V_0(u, v, w) \approx V'_0(u, v) = \iint P'_\nu(l, m) I_\nu(l, m) e^{-2i\pi(ul+vm)} dldm,$$

ce qui constitue une véritable transformée de Fourier bidimensionnelle reliant la distribution de brillance dans le ciel à la fonction de visibilité complexe $V_0(\mathbf{p})$ ou plutôt à la projection $V'_0(\mathbf{q})$ de cette dernière sur le plan (u, v) , le vecteur $\mathbf{p} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z$ se projetant en $\mathbf{q} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y$. Pour simplifier les écritures, on notera cependant P_ν pour P'_ν et V_0 pour V'_0 dans la suite.

XIV.4.e Brouillages fréquentiel et temporel

Le point \mathbf{q} de l'espace (u, v) représentant la ligne de base entre deux antennes à un instant donné et pour une direction de pointage donnée, dépend également de la fréquence d'observation ν puisqu'on a la relation

$\mathbf{p} = \nu \mathbf{b}/c$. Si l'on considère alors une source observée dans une bande de fréquence $\Delta\nu$ autour de ν_0 , toutes les mesures sont traitées comme si elles étaient effectuées à cette fréquence centrale et les valeurs de u et de v attribuées sont celles calculées pour ν_0 . Les vraies fréquences spatiales u_ν et v_ν correspondant à la fréquence ν sont alors données par

$$u_\nu = \frac{\nu}{\nu_0}u \quad \text{et} \quad v_\nu = \frac{\nu}{\nu_0}v,$$

donc la contribution de la fréquence ν à la fonction de visibilité complexe est de la forme

$$V_0(u, v) = V_0\left(\frac{\nu_0}{\nu}u_\nu, \frac{\nu_0}{\nu}v_\nu\right) \quad \text{dont la transformée de Fourier est} \quad \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2 I\left(\frac{\nu}{\nu_0}l, \frac{\nu}{\nu_0}m\right),$$

par application du théorème de similitude des transformées de Fourier [Bracewell, 2000]. Chaque fréquence ν dans la bande passante $\Delta\nu$ se traduit donc par une image déformée de la vraie distribution de brillance, qu'on peut résumer par un brouillage radial (*bandwidth smearing*).

D'autre part, la mesure des visibilitées ne se fait pas de manière instantanée, et chaque mesure est le résultat d'une intégration sur un temps τ_i . Pendant le temps d'une intégration, la rotation terrestre modifie la ligne de base projetée \mathbf{q} , comme on le verra, et les visibilitées instantanées intégrées correspondent donc à des points différents du plan (u, v) . Il en résulte un brouillage (*time averaging*) et une distortion de l'image. Il faut donc trouver un compromis entre cette contrainte et la nécessité d'obtenir un bon rapport signal sur bruit, pour lequel on devrait choisir un temps d'intégration long.

XIV.5 Réseaux d'antennes et imagerie

XIV.5.a Position du problème

Comme on l'a vu, un interféromètre élémentaire, constitué de deux antennes identiques, permet à chaque instant de mesurer la valeur de la fonction de visibilité complexe V_0 en un point \mathbf{q} d'un espace à deux dimensions, dit espace (u, v) ou plan (u, v) , en référence aux notations u et v habituellement utilisées pour les fréquences spatiales dans deux directions orthogonales⁸,

$$V_0(\mathbf{q}) = \iint P_\nu(\boldsymbol{\sigma})I_\nu(\boldsymbol{\sigma})e^{-2i\pi\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\sigma}}d\boldsymbol{\sigma} = \iint J(\boldsymbol{\sigma})e^{-2i\pi\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\sigma}}d\boldsymbol{\sigma} \quad \text{soit} \quad V_0 = \text{TF}[J]. \quad (80)$$

Le processus d'imagerie consiste à inverser cette équation, de manière à obtenir, à partir des visibilitées, la distribution de brillance I_ν . Notons que si le lobe d'antenne P_ν est suffisamment bien connu, on pourra oublier celui-ci dans un premier temps et considérer que l'image à obtenir à partir des visibilitées est $J = P_\nu I_\nu$, sachant qu'une simple division par le lobe permettra, en fin de traitement, de retrouver la distribution de brillance réelle I_ν de la source.

La relation de transformation de Fourier (80) exprime le fait qu'à tout instant, une paire d'antennes permet de mesurer une composante de Fourier particulière de la distribution de brillance modifiée J . Notons que cette dernière étant réelle, la fonction de visibilité est hermitienne [Bracewell, 2000], soit

$$V_0^*(\mathbf{q}) = V_0(-\mathbf{q}) \quad \text{où l'étoile désigne la conjugaison complexe.}$$

Chaque mesure fournit donc en réalité deux points dans l'espace (u, v) , bien que ces deux points ne soient pas indépendants. L'utilisation d'un réseau de N_a antennes doit alors permettre la mesure simultanée d'un nombre important de composantes de Fourier, environ de l'ordre de $N_a(N_a - 1)/2$, aux fréquences spatiales \mathbf{q} correspondant aux projections des différentes lignes de base sur un plan perpendiculaire à la direction de pointage (voir la figure XIV.5). D'autre part, la rotation de la Terre se traduit par un déplacement du point représentatif d'une ligne de base donnée dans le plan (u, v) , selon un chemin qu'on décrira dans le chapitre suivant, et dont on voit un exemple sur la figure XIV.6. On dispose donc en fin d'observation d'un ensemble de points \mathbf{q}_k où est mesurée la fonction de visibilité complexe. L'incomplétude de l'information sur cette dernière représente la difficulté majeure de l'imagerie en interférométrie.

⁸Remarquons qu'on désignera ici la transformation de Fourier sous la forme d'un opérateur TF, la transformation réciproque étant notée TF⁻¹.

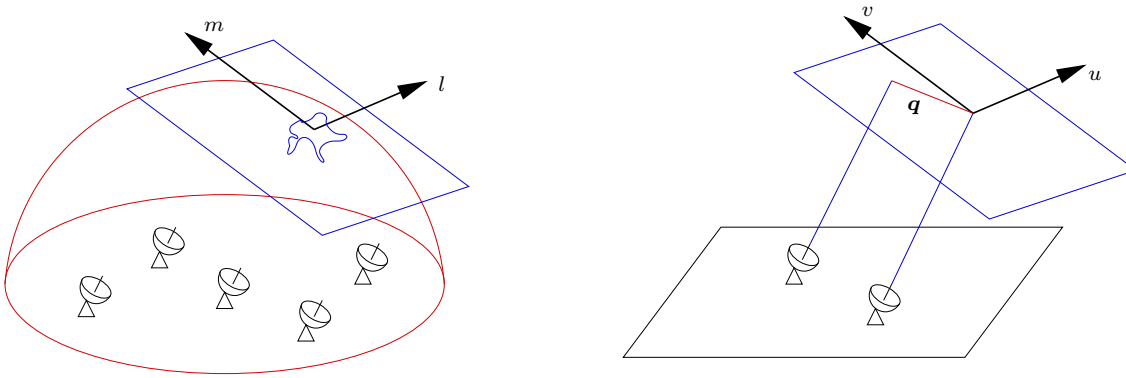


FIG. XIV.5 – Systèmes de coordonnées dans le plan du ciel (à gauche) et dans le plan de Fourier (à droite).

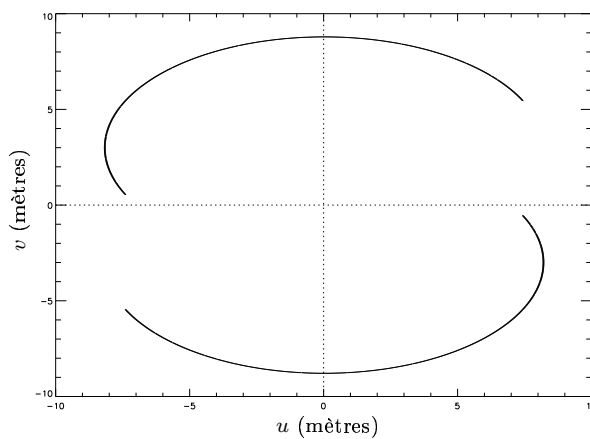


FIG. XIV.6 – Couverture (u, v) d'un interféromètre à deux éléments situé à une latitude de 45° nord, lors d'une observation d'une source à 45° de déclinaison, pendant 12 heures.

Afin de formaliser cette idée, on introduit une fonction d'échantillonnage S , non nulle uniquement aux points effectivement mesurés. La fonction de visibilité V dont on dispose réellement est alors

$$V(\mathbf{q}) = S(\mathbf{q})V_0(\mathbf{q}) \quad \text{avec} \quad S(\mathbf{q}) = \sum_k \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_k). \quad (81)$$

Le support de S est constitué des points mesurés et est couramment appelé couverture (u, v) , bien que ce terme soit également parfois utilisé pour désigner la fonction S elle-même. Par ailleurs, en réalité, les mesures des visibilitées sont entachées de bruit, de sorte que $V = SV'_0$, où V'_0 représente la fonction de visibilité complexe corrompue par le bruit. On y reviendra plus bas. Afin d'obtenir une image, la première possibilité consiste à prendre brutalement la transformée de Fourier inverse de V ,

$$I^B(\boldsymbol{\sigma}) = \iint V(\mathbf{q})e^{2i\pi\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\sigma}}d\mathbf{q} \quad \text{soit} \quad I^B = \text{TF}^{-1}[V]. \quad (82)$$

L'image I^B , dite image sale, est une représentation de la distribution de brillance qui, bien qu'incorrecte, représente généralement la première étape du processus d'imagerie. La relation entre l'image sale et la véritable distribution de brillance est alors donnée par une équation de convolution,

$$I^B = B * J \quad \text{avec} \quad B = \text{TF}^{-1}[S],$$

où l'on a négligé la présence de bruit. La fonction B , appelée lobe sale ou lobe synthétisé, représente la réponse impulsionnelle de l'instrument, et on voit donc que, même en l'absence de bruit, l'obtention de la

distribution réelle de brillance nécessite une déconvolution dont la solution n'est pas unique. Supposons en effet qu'on se donne une distribution de brillance Z solution de l'équation homogène $B * Z = 0$, ce qui est possible : on peut simplement prendre la transformée de Fourier inverse d'une fonction définie sur le plan (u, v) , hermitienne, dont le support soit disjoint de celui de S . Dans ces conditions, il est impossible de distinguer la distribution $J + Z$ de J à partir des données. L'existence de ces distributions invisibles empêche le plus souvent de considérer la solution principale de l'équation de convolution - pour laquelle V_0 est prise nulle en dehors des points mesurés - comme une solution réaliste du problème posé. En effet, cette solution est souvent non-physique, présentant par exemple des valeurs négatives.

C'est l'objet des multiples méthodes dites de déconvolution que d'obtenir une solution réaliste en remplissant les trous du plan (u, v) . On construit ainsi des modèles de distribution de brillance, qu'on appelle images propres, à partir des données et d'hypothèses *a priori* sur l'objet observé.

XIV.5.b Affectation de poids aux données

Dans l'expression de la fonction d'échantillonnage S de l'équation (81), il apparaît que toutes les mesures sont traitées de la même façon et qu'on leur accorde une importance identique. Or, il est bien évident que la réalité est différente, car certaines mesures peuvent être plus bruitées que d'autres, par exemple. D'autre part, il peut s'avérer intéressant de modifier les valeurs de la fonction d'échantillonnage de manière à atténuer les artefacts et à obtenir un lobe synthétisé plus proche d'un lobe "propre". On introduit ainsi une fonction de poids W telle que

$$W(\mathbf{q}) = \sum_k F_k T_k D_k \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_k) = F(\mathbf{q}) T(\mathbf{q}) D(\mathbf{q}) S(\mathbf{q})$$

où les coefficients F_k , T_k et D_k correspondent à divers effets. Les F_k traduisent la fiabilité des mesures, telle qu'envisagée précédemment, et on ne peut donc pas les modifier. La fonction T , dite de *tapering*, permet de diminuer l'importance accordée aux mesures à haute fréquence spatiale, afin de supprimer les lobes parasites à petite échelle. La fonction de densité D permet quant à elle de compenser, en partie, l'incomplétude de la couverture (u, v) en prenant comme valeur en un point l'inverse de la densité locale de points de mesure⁹. On dispose alors d'une fonction de visibilité $V_w = W V_0$, et d'une image sale dépendant évidemment du schéma de poids appliqué

$$I_w = B_w * J \quad \text{avec} \quad B_w = \text{TF}^{-1}[W].$$

Il ne faut cependant pas oublier que l'image I_w n'est pas, de manière générale, une solution acceptable du problème de la distribution de brillance, car l'influence des poids sur l'aspect de l'image sale est toute relative, et on ne peut se passer de l'étape de déconvolution.

XIV.5.c Le *gridding*

L'obtention de l'image sale à partir des données nécessite, on l'a vu, une transformation de Fourier. Numériquement, le calcul de cette transformée peut se faire de deux façons. On peut effectuer une transformation "directe" en calculant, pour chaque direction d'observation σ désirée, la quantité

$$I^B(\sigma) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N V(\mathbf{q}_k) e^{2i\pi \mathbf{q}_k \cdot \sigma}.$$

Le coût numérique de cette méthode, pour obtenir une image $M \times M$, est de l'ordre de M^4 , et peut donc s'avérer extrêmement lourd. Plus rapide, l'utilisation de la transformée de Fourier rapide (FFT) requiert que les données soient placées sur une grille régulière. Or, bien entendu, ce n'est pas le cas des données d'origine, et il convient de procéder à une interpolation communément appelée *gridding*. Le coût numérique

⁹Cette option est appelée *uniform weighting*, tandis que le choix $D = 1$ constitue le *natural weighting*. Le choix de l'une ou l'autre option est essentiellement dicté par l'objectif de sensibilité de l'instrument à plus ou moins grande ligne de base. Notons qu'il existe des variantes, telles que le *robust weighting* ou encore le *super uniform weighting*.

d'une telle interpolation suivie d'une FFT est lui de l'ordre de $M^2 \log M$, ce qui justifie amplement qu'on choisisse cette option plutôt que la transformation directe¹⁰.

Il s'agit donc de se donner une grille régulière dans le plan (u, v) et d'assigner des valeurs à chaque nœud de cette grille en fonction des visibilitées observées dans son voisinage. Plusieurs méthodes sont possibles pour parvenir à ce résultat [Thompson & Bracewell, 1974], mais il apparaît que les techniques consistant à convoluer les données dans l'espace (u, v) sont les plus utilisées, en particulier parce qu'elles ne se limitent pas à une simple interpolation, mais qu'elles impliquent également une moyenne permettant de limiter quelque peu les effets de mesures aberrantes. Il est par ailleurs possible de corriger les effets de cette convolution sur l'image finale, ce qui est un avantage certain.

Si G est le noyau de convolution utilisé, la fonction dont on prend la transformée de Fourier est évidemment $V_w^g = G * V_w$ et on peut relier l'image sale I_w^g et le lobe sale B_w^g , correspondant à V_w^g , aux quantités analogues avant *gridding*,

$$I_w^g = \text{TF}^{-1} [G * V_w] = \widehat{G} I_w \quad \text{et} \quad B_w^g = \text{TF}^{-1} [G * W] = \widehat{G} B_w \quad \text{avec} \quad \widehat{G} = \text{TF}^{-1} [G].$$

Bien entendu, V_w^g ne représente qu'une étape intermédiaire, puisqu'il s'agit d'une fonction lisse, qu'il faut maintenant échantillonner sur la grille. Ce procédé est équivalent à la multiplication par un peigne de Dirac à deux dimensions, noté ici R et défini par

$$R(u, v) = \frac{1}{\Delta u \Delta v} \sum_{i, j} \delta \left(\frac{u}{\Delta u} - i, \frac{v}{\Delta v} - j \right) \quad \text{où la sommation porte sur } (i, j) \in \mathbb{Z}^2.$$

De manière évidente, Δu et Δv désignent les tailles des cellules de la grille dans chacune des directions. Ainsi l'échantillonnage de la fonction V_w^g fournit une distribution de visibilitées $V_s = R V_w^g$. L'image sale I_s reconstruite à partir de ces visibilitées est alors donnée par une convolution,

$$I_s = \text{TF}^{-1} [V_s] = \widehat{R} * I_w^g \quad \text{avec} \quad \widehat{R} = \text{TF}^{-1} [R].$$

La fonction \widehat{R} est également un peigne de Dirac, dont la périodicité, dans chaque direction, est égale à l'inverse de la périodicité de R . Cette convolution a pour effet de répliquer l'image sale I_w^g dans l'espace réel, et il est donc possible qu'un repliement (*aliasing*) se produise, si le support de l'image sale est plus grand que la périodicité de \widehat{R} . L'atténuation due au lobe de l'antenne permet d'assurer, en première approximation, que ce support est fini, mais il n'est pas exclu que des sources brillantes dans un lobe secondaire soient repliées dans l'image I_s . De plus, le bruit n'est pas limité dans l'espace réel et subit donc un repliement qui augmente son niveau aux bords de la carte. Remarquons que si l'aliasing est négligeable, on préserve l'équation de convolution sous la forme¹¹

$$\frac{I_s}{\widehat{G}} = \frac{I_w^g}{G} = I_w = B_w * J.$$

Les fonctions de *gridding* G choisies habituellement tentent de satisfaire des conditions quelque peu contradictoires, à savoir être non nulles uniquement sur une petite région tout en limitant l'aliasing et sans trop ralentir la vitesse de calcul. Le choix le plus simple¹² est de prendre une fonction rectangle, c'est-à-dire d'assigner chaque visibilité au nœud de la grille le plus proche. Mais en définitive, le choix le plus approprié répondant aux contraintes de support et d'aliasing limités est celui des fonctions sphéroïdales, qu'on ne peut exprimer analytiquement, mais dont les valeurs sont tabulées, ce qui permet de procéder au *gridding* de manière numérique.

XIV.5.d Le problème du bruit

On a bien pris soin de noter plus haut que les visibilitées observées sont corrompues par l'existence de bruit. Celui-ci peut-être de deux types principaux, additif ou multiplicatif. Si on note ϵ_a le bruit additif et

¹⁰Ce n'est plus vraiment le cas, cependant, pour les petites images construites à partir d'un nombre réduit de données. D'autre part, la méthode directe a l'avantage de permettre de construire l'image sale en temps réel, au fur et à mesure que de nouvelles visibilitées sont disponibles.

¹¹La division par \widehat{G} de l'image sale I_s obtenue *in fine* se nomme correction de *gridding*.

¹²Bien qu'il soit le pire en termes d'*aliasing*...

ϵ_m le bruit multiplicatif, on a, schématiquement, $V'_0 = \epsilon_m V_0 + \epsilon_a$. Toutes les opérations effectuées étant linéaires, le bruit additif a pour effet d'ajouter une structure de bruit sur l'image finale, tandis que le bruit multiplicatif se traduit par une convolution dans l'espace image.

En ce qui concerne l'origine du bruit, on peut essentiellement en distinguer deux sources. Les récepteurs, tout d'abord, qui peuvent collecter des photons radio provenant de leur environnement immédiat et non de la source astronomique. Il faut donc les protéger par des écrans appropriés, qu'on doit refroidir pour minimiser leur émission thermique propre, sans quoi le remède risquerait d'être pire que le mal. Le refroidissement est d'ailleurs effectué en plongeant chaque récepteur dans un cryostat dont la température est de l'ordre de la quinzaine de Kelvins, de façon à réduire leur bruit intrinsèque, sans qu'il soit possible de l'éliminer entièrement.

D'autre part, les fluctuations de l'atmosphère, en particulier de son contenu en vapeur d'eau, se traduisent par des retards de phase différents, et dépendant bien entendu du temps¹³, au niveau de chaque antenne. La corrélation des signaux est alors entachée d'une erreur. En conséquence, la source semble bouger sur le ciel, ce qui limite la résolution de l'instrument, ainsi que sa sensibilité puisque le signal est étalé spatialement et donc plus faible. Cet effet de dégradation atmosphérique est plus important à haute fréquence. Pour en minimiser les effets, on peut par exemple observer régulièrement un calibrateur, en alternance avec la source à laquelle on s'intéresse. Le calibrateur doit avoir une position connue dans le ciel, ce qui fournit une référence de phase. Les fluctuations du retard sont calibrées *a posteriori* en interpolant les mesures faites sur le calibrateur, puis soustraites des mesures de phase sur la source. Alternativement, on peut mesurer directement, par exemple à l'aide de radiomètres, la quantité de vapeur d'eau présente sur la ligne de visée au niveau de chaque antenne, et en déduire le retard de phase correspondant. On reparlera brièvement de ce problème au **XV.2.c**.

XIV.5.e La déconvolution

Comme on l'a vu, les images sales obtenues aux différentes étapes du traitement des données décrites plus haut peuvent toujours se mettre sous la forme d'une convolution de la véritable distribution de brillance modifiée par un lobe synthétisé. Cependant, le problème des distributions invisibles demeure, et la remarque faite plus haut sur l'inadéquation des méthodes de déconvolution linéaire est toujours valable. On doit donc plutôt construire, à partir de l'image sale, des modèles de distribution de brillance compatibles avec les observations, en se fondant sur des hypothèses *a priori*. On va voir quelques unes de ces méthodes.

CLEAN et ses dérivés

La méthode CLEAN, dont il existe de nombreuses variantes, fait l'hypothèse qualitative que la distribution de brillance réelle peut être représentée par une collection de sources ponctuelles, et la reconstruit en adoptant la procédure suivante : On se donne deux images de la taille de l'image sale. L'une, l'image propre, est initialisée à zéro, tandis que l'autre, l'image des résidus, est identifiée à l'image sale. On commence par repérer le maximum de brillance dans l'image des résidus, et on place dans l'image propre, au même point, une source ponctuelle avec une amplitude égale à γ , où γ est un facteur de gain typiquement de l'ordre de 0,1 à 0,2. Cette source ponctuelle est convoluée avec le lobe synthétisé et le résultat est soustrait de l'image des résidus. On reprend alors le processus jusqu'à ce que l'image des résidus passe en dessous d'un certain seuil - usuellement lié au niveau de bruit - ou lorsqu'une limite d'itérations a été atteinte. L'image propre est alors une collection de sources ponctuelles, qu'on convolue par un "lobe propre" (typiquement une gaussienne de même taille que le lobe synthétisé) de façon à obtenir une image lisse et réaliste. On ajoute enfin à cette image propre celle des résidus, ce qui permet d'obtenir une estimation du rapport signal sur bruit de cette image. L'approche CLEAN ne permet cependant pas d'écrire explicitement la solution qu'elle fournit, et il est donc très difficile de faire une analyse de ses performances, par exemple en termes de bruit.

Les méthodes de maximum d'entropie (MEM)

En revanche, les méthodes de maximum d'entropie sélectionnent une image parfaitement bien déterminée, à savoir positive, compatible avec les données au bruit près, et dont l'entropie est maximale. Ici, l'entropie

¹³L'échelle de temps de ces variations est de l'ordre de la dizaine de secondes.

est une fonction sur l'image caractérisant sa plausibilité, qui prend la forme suivante

$$S(I) = - \int I \ln \left(\frac{I}{M} \right) = - \sum_k I_k \ln \left(\frac{I_k}{M_k} \right),$$

où M est une image modèle incluant les hypothèses *a priori*. Cette forme est égale à l'opposé de la pseudo-distance de Kullback de l'image I au modèle M (voir le chapitre **XVII**) et la procédure déterminant l'image propre consiste donc à minimiser cette distance, tout en imposant que les visibilitées théoriques restent proches¹⁴ des visibilitées mesurées. Pour cela, on inclut une contrainte de type χ^2 . À cela il faut ajouter qu'on a remarqué [Cornwell & Evans, 1985] qu'il était également nécessaire de contraindre les grandes échelles en imposant le flux total, car les espacements courts étant absents des données, ils ne permettent pas de contraindre l'image finale par le biais du χ^2 .

Comparaison des deux méthodes et alternatives multirésolution

Contrairement à CLEAN, les méthodes de maximum d'entropie ne sont pas spécifiques au domaine de la radioastronomie, car il ne s'agit ni plus ni moins que de méthodes bayésiennes de détermination d'un modèle "le plus probable" étant donné un ensemble d'observations, tandis que CLEAN fait implicitement l'hypothèse que l'image à reconstruire est un ensemble de sources ponctuelles. Par conséquent, les images d'émission étendue reconstruites par CLEAN sont souvent mauvaises, tandis que MEM échoue typiquement lorsque des sources ponctuelles sont superposées à un fond étendu.

Il existe de nombreux algorithmes hybrides entre CLEAN et MEM, ainsi que des méthodes fondées sur des principes différents, dont l'objectif est de permettre une déconvolution correcte des structures à toutes les échelles, puisque c'est justement dans ces situations que CLEAN et MEM se heurtent à des difficultés. Il existe donc des méthodes dites "multirésolution" faisant par exemple appel à des décompositions en ondelettes des images, de manière à déconvoluer séparément chaque plage d'échelles, avec des méthodes adaptées.

XIV.5.f Imagerie de raies spectrales

Les sources astronomiques peuvent présenter de l'émission et de l'absorption continuum, indépendante de la fréquence¹⁵, et des raies spectrales, en émission ou en absorption. Ces raies ne sont pas infiniment minces, elles sont élargies, par exemple par effet Doppler ou du fait des collisions entre émetteurs. Les récepteurs dont la bande passante peut être découpée en un certain nombre de sous-bandes appelées canaux permettent alors d'établir un ensemble de cartes bidimensionnelles des sources étudiées, à différentes fréquences, c'est-à-dire à différentes vitesses longitudinales. C'est ainsi qu'on obtient les cartes par canaux $T_k(\mathbf{X})$ décrites au chapitre **IX**, dont on essaie de tirer des informations quant à la structure en vitesse, aussi bien qu'en densité, de la source observée.

Dans tout ce qui va suivre, cependant, on ne se préoccupera pas de la vitesse, et l'on ne considérera que des structures bidimensionnelles telles qu'on peut en observer sur les cartes par canaux d'une observation interférométrique. L'objectif du reste de cette partie est de caractériser le filtrage interférométrique sur ces structures, à l'aide des outils introduits dans la deuxième partie.

□

¹⁴Au sens que la différence entre les deux est inférieure au niveau du bruit.

¹⁵En fait lentement variable, de sorte qu'on peut la considérer comme constante sur les plages de fréquences habituellement considérées.

CHAPITRE XV

Filtrage interférométrique des structures

XV.1 Introduction

On vient de voir que l’observation d’une source radioastronomique par un interféromètre fournit, au travers de mesures de la fonction de cohérence spatiale du champ électromagnétique, une image “sale” qui est égale au produit de convolution de la distribution de brillance réelle dans le ciel, à la fréquence considérée, par un noyau dépendant de l’ensemble des paramètres d’observation. Autrement dit, avant d’appliquer l’un des algorithmes classiques de déconvolution, les différentes cartes par canaux effectivement observées sont des versions dégradées de celles qu’on a définies au chapitre **IX**. Le schéma de la figure **XV.1** résume succinctement les différentes étapes du filtrage interférométrique, à la fois dans l’espace réel et dans l’espace de Fourier.

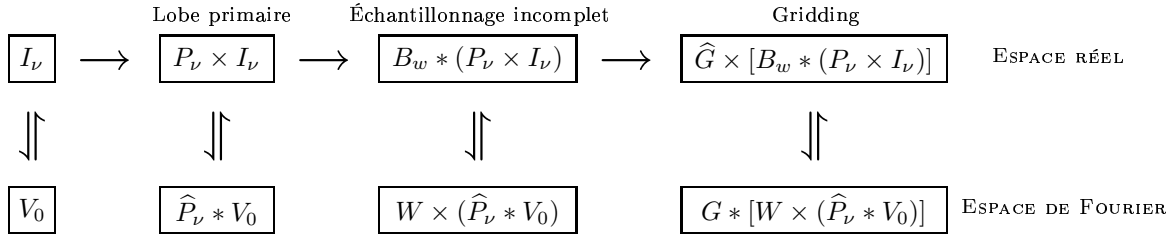


FIG. **XV.1** – Représentation schématique du filtrage interférométrique. La première ligne donne les étapes successives du filtrage de la brillance I_ν dans l’espace réel, la seconde donne les quantités correspondantes dans l’espace de Fourier.

Cette vue d’ensemble permet de remarquer que s’il est particulièrement ardu de remonter des visibilités effectivement observées jusqu’à la distribution de brillance réelle, il est en revanche, au moins théoriquement, beaucoup plus simple de faire le chemin inverse, c’est-à-dire de se donner un modèle de brillance et de calculer la carte sale qu’on devrait obtenir en sortie de l’instrument, étant donnés les paramètres d’observation. En effet, si l’on reprend un à un les divers filtrages appliqués, on voit que la donnée d’un modèle d’antenne et d’une fréquence d’observation suffisent à définir le lobe primaire¹, que d’autre part la couverture du plan (u, v) est déterminée par la position initiale de la source, la configuration du réseau d’antennes et la durée d’observation, et qu’enfin les autres étapes de filtrages (*gridding* et poids notamment) sont contrôlées par l’observateur. Seul le bruit, par son caractère aléatoire, peut venir altérer cette approche par ailleurs entièrement déterministe.

Il fait peu de doutes que le facteur essentiel du filtrage interférométrique décrit ici réside dans l’incomplétude de la couverture du plan (u, v) . Or, celle-ci se traduit naturellement par un défaut de mesure de certaines échelles spatiales, qui doivent donc être absentes des images sales obtenues en sortie. Cette idée suggère fortement d’étudier les effets du filtrage sur des objets possédant des structures sur une grande plage d’échelles, tels qu’on en observe dans le milieu interstellaire. Afin de procéder à cette étude, on a choisi de recourir à une approche numérique, en construisant un simulateur assez simple permettant d’obtenir rapidement des images sales à partir d’une distribution de brillance donnée et de paramètres observationnels qu’on précisera plus loin. Le choix de l’approche numérique est amplement justifié par la complexité du filtrage instrumental, d’autant plus importante que le nombre d’antennes, et donc de corrélations, est élevé.

¹On ne considérera que des antennes illuminées uniformément, de sorte que leur lobe sera supposé suivre exactement une fonction d’Airy.

XV.2 Le projet ALMA

XV.2.a Introduction

La nécessité de comprendre et d'optimiser le filtrage interférométrique dans le cas d'un grand nombre d'antennes est en effet une priorité actuelle de la communauté radioastronomique, dont l'un des projets majeurs pour le début du siècle est justement la construction d'un réseau d'une soixantaine d'antennes travaillant dans le domaine millimétrique. Cet interféromètre, fruit d'une collaboration entre les États-Unis, l'Europe et le Japon, et baptisé ALMA pour Atacama Large Millimeter Array, du nom du plateau andin où il sera installé, doit voir le jour en 2007, date à laquelle commenceront les premières opérations, avec un nombre limité d'antennes. Le réseau devra être complété au cours du temps et il est actuellement prévu que les dernières antennes soient livrées aux alentours de 2012.

In fine, le réseau sera composé de 64 antennes de 12 mètres de diamètre, qui devront être réparties sur 240 stations fixes, pour former diverses configurations dont les plus grandes lignes de base s'étaleront entre environ 150 mètres et 14 kilomètres. Le projet d'opération suggère de passer continûment d'une configuration à l'autre², de manière à ne pas interrompre l'exploitation de l'instrument le temps de déplacer l'ensemble des antennes. Le problème de la détermination des configurations "optimales" a été étudié par Boone [Boone, 2001, Boone, 2002] et on en dira quelques mots plus loin.



FIG. XV.2 – Le site choisi pour ALMA. Sur la carte du nord du Chili, à gauche, le plateau de Chajnantor est indiqué par un point bleu. La photographie de droite montre une vue du site.

XV.2.b Objectifs scientifiques

Les motivations scientifiques d'un tel projet sont multiples, et les performances attendues devront fournir à la communauté des astrophysiciens en général et non pas seulement des radioastronomes, des résultats dont l'importance justifie à elle seule les coûts de construction d'un tel instrument. ALMA permettra en effet de mieux comprendre le processus de formation stellaire dans les galaxies proches, ainsi que la naissance des quasars et des galaxies dans l'Univers lointain, par l'observation des raies spectrales de molécules interstellaires, de l'émission submillimétrique des poussières, de transitions atomiques, ou bien encore du fond diffus cosmologique (qui pique à environ 1 mm de longueur d'onde).

L'évolution du projet a connu de nombreuses étapes depuis les premières idées apparues au cours des années 1980. En résumé, ALMA peut être considéré comme la fusion de deux projets distincts, l'un américain, l'autre européen. Le projet américain MMA (pour MilliMeter Array) mettait l'accent sur la couverture en fréquence plus que sur la sensibilité et la résolution. Le projet européen LSA (Large Southern Array) optait quant à lui pour des antennes plus grandes et des configurations plus étendues, maximisant la sensibilité pour l'observation des sources de taille angulaire réduite. Ces choix reposaient sur des objectifs scientifiques différents, mais suffisamment proches pour qu'une fusion des deux concepts soit possible [Booth, 2000].

²Du moins pour les configurations les plus compactes.

XV.2.c Spécifications technologiques

En ce qui concerne les fréquences d'observation, l'altitude du site de Chajnantor sur le plateau de l'Atacama, qui est d'environ 5000 mètres³, ainsi que la faible quantité de vapeur d'eau atmosphérique sur le site permettent d'exploiter au mieux les fenêtres du domaine millimétrique et submillimétrique présentées sur la figure **XV.3**.

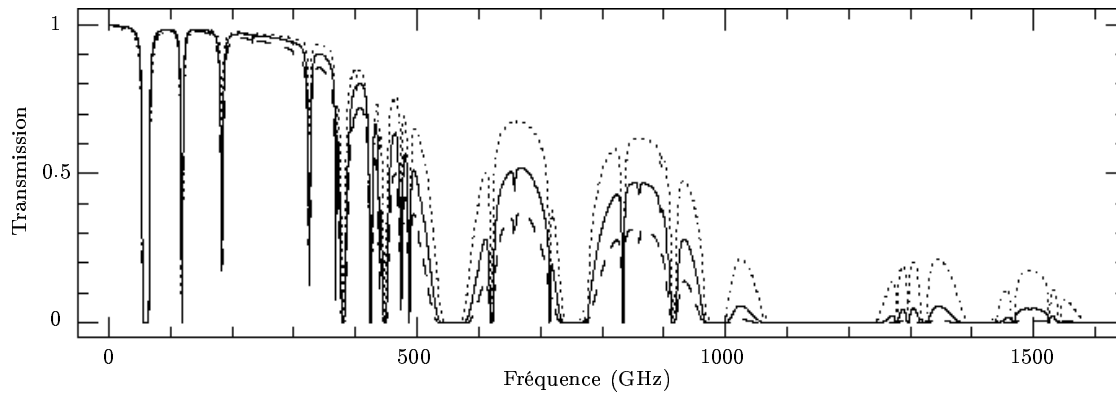


FIG. **XV.3** – Transmission atmosphérique calculée pour une observation au zénith sur différents sites et pour une quantité de vapeur d'eau correspondant au premier quartile des statistiques locales en hiver. Le trait plein correspond au site de Chajnantor, les tirets au Mauna Kea, à Hawaï, et les pointillés au Pôle Sud. Figure due à Juan Pardo [Pardo, 2000].

Les récepteurs construits pour ALMA sont en effet prévus pour fonctionner entre 30 GHz et 950 GHz, c'est-à-dire entre 0,3 mm et 10 mm de longueur d'onde. Le tableau 1, provenant de [Wootten *et al.*, 1998], résume les bandes passantes des différents récepteurs qui devront être installés aux foyers des antennes. Chaque bande de fréquence devra pouvoir être séparée en un grand nombre de canaux (de l'ordre de 1024), permettant d'atteindre une résolution en vitesse d'environ 0,05 km s⁻¹. Le nombre de récepteurs devra en outre tenir compte de la possibilité de traiter les deux polarisations séparément. Au total il faudra compter plus de 1300 récepteurs, ce qui constitue un défi majeur du point de vue technologique.

TAB. 1 – Les bandes de fréquence prévues pour ALMA

Numéro	ν_l (GHz)	ν_0 (GHz)	ν_u (GHz)
1	30	35	40
2	67	79	90
3	89	100	116
4	125	144	163
5	163	187	211
6	211	243	275
7	275	323	370
8	385	442	500
9	602	660	720
10	787	869	950

La surface collectrice totale avoisinant les 7000 m², la sensibilité d'ALMA sera inégalée dans son domaine de fréquences, d'autant qu'avec 64 antennes, l'instrument sera capable de mesurer 2016 lignes de base simultanément, ce qui, dans le cas des configurations compactes, permet d'obtenir une couverture "complète" du plan (u, v) en mode *snapshot*, comme on le verra plus loin. Par ailleurs, les grandes lignes de

³La difficulté logistique avec le manque d'oxygène suggère de procéder aux observations à distance, depuis une station scientifique située dans le village de San Pedro de Atacama.

base qui seront disponibles permettront d'atteindre des résolutions impressionnantes, jusqu'à moins d'une dizaine de milliseconde d'arc dans le cas de figure optimal (ligne de base de 14 kilomètres et fréquence d'observation 870 GHz). Notons qu'il s'agit là d'une limite théorique, car la résolution sera en pratique limitée du fait des fluctuations spatio-temporelles de la quantité de vapeur d'eau atmosphérique sur le site. Pour minimiser cet effet, il est possible de passer rapidement de l'observation de la source à celle d'un calibrateur selon une méthode nommée *fast switching*. Cependant, cette procédure requiert des antennes dont la conception peut s'avérer très coûteuse. Pour allonger le cycle d'observation entre la source et le calibrateur, les équipes de Cambridge et d'Onsala travaillent actuellement sur des radiomètres, prévus pour être installés sur chacune des antennes, permettant de mesurer les fluctuations de brillance grâce à la raie de H_2O à 183 GHz et d'en déduire les fluctuations de phase dans l'ouverture synthétisée par le réseau d'antennes.

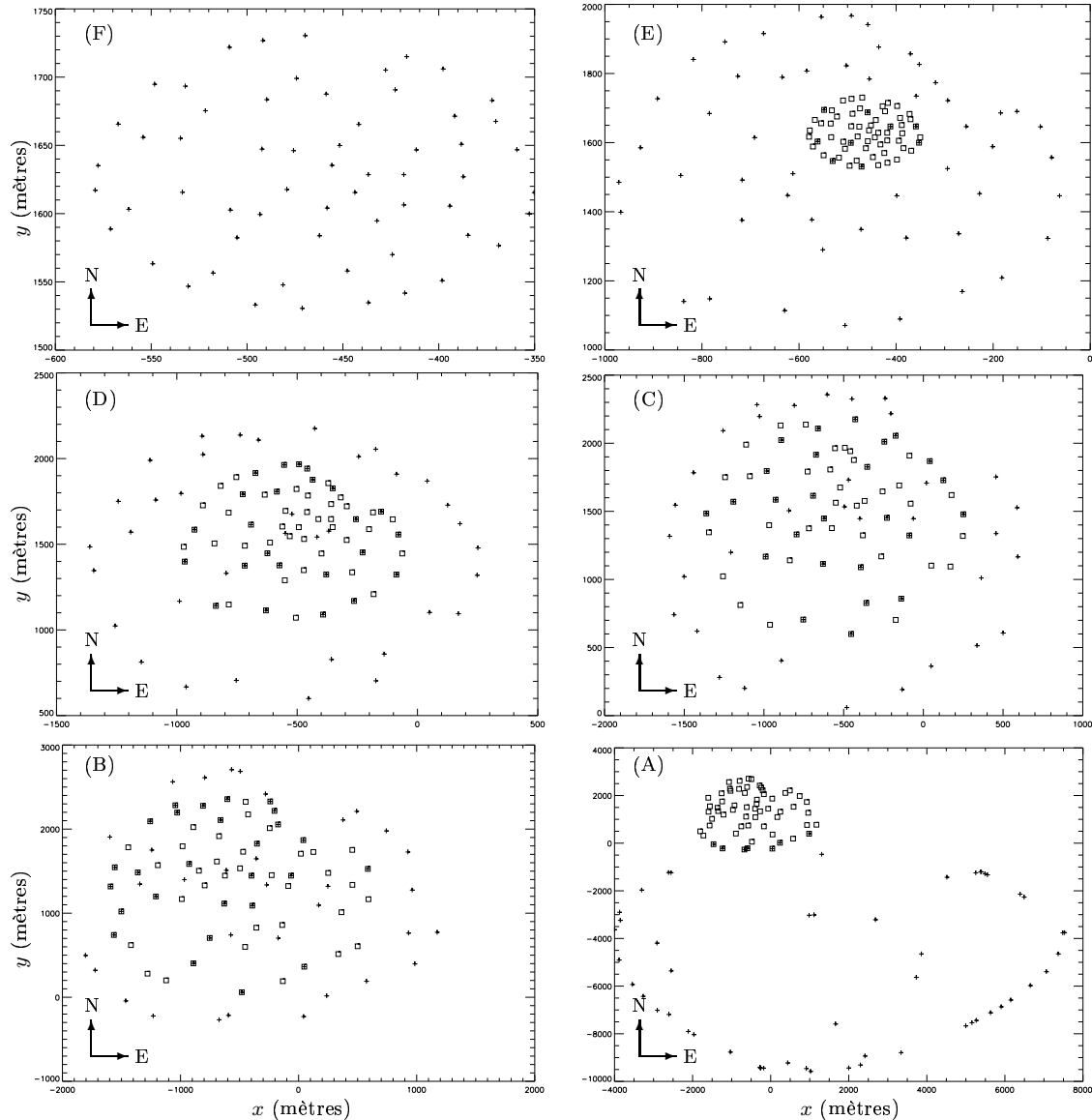


FIG. XV.4 – Configurations “optimales” calculées par Boone dans le cadre du projet ALMA. Chacune des configurations comporte soixante antennes, dont les positions sont repérées par les croix. La configuration A est la plus étendue, et la configuration F la plus compacte. Excepté pour cette dernière, on représente également, par des carrés, les positions des antennes dans la configuration précédente. On voit que certaines stations sont réutilisées d’une configuration à l’autre.

XV.2.d Le problème des configurations

Le choix des configurations de base de l'instrument a fait l'objet de nombreuses études (voir [Boone, 2001] et les références qu'il cite), et il faut bien comprendre qu'il n'existe pas de configuration optimale en soi, mais qu'on cherche à obtenir les meilleures solutions d'un problème dépendant évidemment de l'objectif scientifique recherché. On aura en effet plutôt intérêt à choisir une configuration compacte si l'on veut par exemple cartographier un nuage moléculaire proche, alors que l'observation de sources lointaines nécessitera une meilleure résolution et donc une configuration étendue. Comme le fait remarquer Boone [Boone, 2002], l'objectif scientifique peut ainsi se traduire par une distribution "idéale" des composantes de Fourier mesurées dans le plan (u, v) . Étant alors donnés les paramètres de l'instrument (nombre d'antennes et de stations), ceux du site (latitude, contraintes du terrain) et ceux de la source (position et durée d'observation), on est confronté à un problème d'optimisation qui est cette fois bien posé, puisqu'on sait qu'il s'agit d'approcher au mieux cette distribution idéale.

Pour résoudre ce problème, Boone [Boone, 2001] a développé un programme d'optimisation dont on va maintenant décrire le principe. On se place dans le cas idéalisé d'une observation instantanée d'une source au zénith. La fonction d'échantillonnage S définie au chapitre **XIV** est alors simplement l'autocorrélation de la fonction décrivant la position des antennes. Comme c'est la distribution de S dans le plan (u, v) qu'il s'agit d'optimiser, on pourrait penser qu'il suffit d'inverser l'autocorrélation en partant de la distribution idéale, mais cela n'est pas toujours possible⁴. La méthode proposée par Boone, à l'opposé, consiste à partir d'une configuration initiale et à la modifier progressivement de façon à ce que la distribution \mathcal{D} de la couverture S s'approche au mieux de la distribution idéale \mathcal{D}_0 . La modification de la configuration se fait en observant que le déplacement d'une antenne implique le déplacement de $2(N_a - 1)$ points de la couverture, où N_a est le nombre d'antennes, et qu'il existe une relation linéaire entre le déplacement de l'antenne et le mouvement de chaque point de mesure dans le plan (u, v) , relation qu'on peut inverser. Le gradient⁵ $\nabla(\mathcal{D} - \mathcal{D}_0)$ fournissant le déplacement souhaitable en moyenne pour les points de mesure, on obtient ainsi simplement la direction dans laquelle on doit déplacer l'antenne. On répète le processus de manière itérative pour toutes les antennes jusqu'à ce que la distribution \mathcal{D} converge⁶ vers la distribution cible \mathcal{D}_0 .

Il est également possible de prendre en compte les contraintes imposées par le terrain en interdisant par exemple aux antennes de se déplacer sur certaines zones, puis d'étendre l'optimisation au cas d'observations de durée finie, ainsi qu'aux problèmes du *mosaïcing* et des configurations multiples⁷. La figure **XV.4** montre le résultat de telles optimisations dans le cas de six configurations de taille croissante. Ce sont ces dernières que nous utiliserons dans la suite.

XV.3 Implémentation d'un simulateur d'instrument

XV.3.a Le choix de la simplicité

La mise en œuvre d'un outil permettant de simuler les observations qu'on peut attendre d'un instrument tel qu'ALMA peut se faire selon plusieurs niveaux de complexité, suivant les paramètres intervenant dans la formation des images sales qu'on choisit d'intégrer à la simulation. La prise en compte des configurations, de la position de l'instrument sur la Terre, de la position de la source dans le ciel, de la durée et de la fréquence d'observation forment sans doute une base incontournable, mais il est bien sûr possible d'inclure de nombreux autres paramètres. On pense notamment aux effets de l'atmosphère, au bruit des récepteurs, aux erreurs de pointage, à la possibilité d'utiliser des fonctions de *gridding* sophistiquées, à la déformation des antennes⁸ lorsque la source est basse sur l'horizon, aux effets de *shadowing* quand une antenne fait de l'ombre à une autre, ou encore au brouillage en fréquence et au moyennage temporel, dont on a parlé au chapitre **XIV**. On peut également inclure des procédures réalistes d'observation, en imposant par exemple

⁴Étant donnée une fonction quelconque Y , il n'existe pas nécessairement de fonction X telle que $Y = A_X$.

⁵Le calcul de ce gradient pose clairement des problèmes de définition, du fait de la discrétisation de la couverture.

⁶Comme la distribution idéale n'est pas nécessairement une autocorrélation, le critère de convergence ne doit pas être trop strict. Boone discute d'ailleurs de ce problème [Boone, 2001].

⁷Le coût de construction des stations étant élevé, cette extension du problème revient à imposer de réutiliser le plus grand nombre de stations d'une configuration à l'autre.

⁸Qui implique une modification du lobe ainsi que des erreurs de pointage.

que les antennes pointent régulièrement un calibrateur, ou encore que l'étendue du champ observé nécessite la construction d'une mosaïque.

Cependant, si l'on souhaite modéliser un grand nombre de ces paramètres, il faut le payer en temps de programmation, et également en temps de calcul, et quant à savoir lesquels de ces paramètres doivent être inclus en premier, il n'est pas clair qu'un consensus soit arrêté. Pour ma part, j'ai choisi l'option de construire un simulateur extrêmement simple, dont je vais maintenant décrire le fonctionnement.

XV.3.b La construction de couvertures (u, v)

Comme on l'a dit, certaines des caractéristiques du simulateur sont incontournables, car celui-ci doit absolument permettre de calculer une couverture (u, v) étant donnés les paramètres de l'instrument et de l'observation. Les positions des antennes au sol ont été fournies par Frédéric Boone sous forme de fichiers de configuration comprenant 9 colonnes. Pour chaque ligne, la première colonne donne le numéro de la station. Les deux suivantes repèrent la position de celle-ci au sol, en mètres, respectivement vers le sud et vers l'est. Enfin, les six dernières colonnes correspondent aux six configurations et indiquent si la station en question accueille ou non une antenne⁹. La figure **XV.4** présente les positions des antennes dans les six configurations de l'instrument.

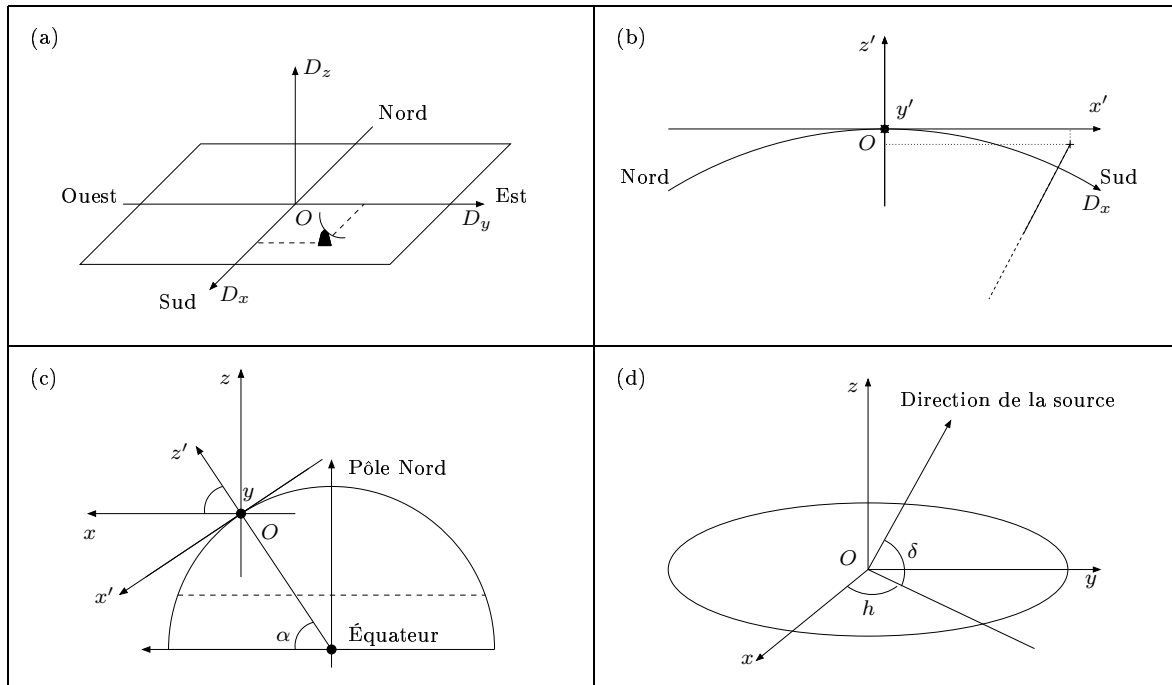


FIG. **XV.5** – Représentations schématiques des différents systèmes de coordonnées utilisés pour passer des positions des antennes au sol aux coordonnées (x, y, z) apparaissant dans l'équation (83). La latitude du site de l'interféromètre est notée α . L'angle horaire et la déclinaison de la source sont notés h et δ , respectivement.

On notera D_x la distance parcourue au sol vers le sud, et D_y la distance au sol vers l'est, comptées à partir du barycentre O des positions des antennes, comme le schématise la figure **XV.5(a)**. Ce sont les positions lues dans le fichier de configuration. À partir d'elles, on peut calculer les coordonnées des différentes antennes dans le repère orthonormé $(Ox'y'z')$ représenté sur la figure **XV.5(b)** et défini de la manière suivante : le plan (Ox', Oy') est le plan tangent à la Terre en O et les directions Ox' et Oy' pointent respectivement vers le sud et vers l'est. Étant données les courtes distances au sol mises en jeu, la courbure de la Terre est négligeable et on peut en fait écrire $x' = D_x$, $y' = D_y$ et $z' = 0$. Numériquement, l'erreur relative commise en faisant cette approximation est inférieure à 10^{-7} .

⁹La valeur stockée dans le fichier est un dans le premier cas, zéro dans l'autre.

Le repère $(Ox'y'z')$ est également représenté sur la figure **XV.5(c)**, où l'on peut le comparer au repère $(Oxyz)$ qu'on utilisera dans la suite. L'axe Oy est confondu avec Oy' , tandis que Ox et Oz sont déduits respectivement de Ox' et Oz' par rotation autour de la direction Oy , de telle sorte que Oz soit parallèle à l'axe de rotation de la Terre. Les positions des antennes dans le repère $(Oxyz)$ sont soustraites deux à deux pour obtenir les coordonnées des différentes lignes de base. À l'aide de la déclinaison δ et de l'angle horaire h de la source, on passe alors dans l'espace (u, v, w) par application de la transformation linéaire suivante [Thompson *et al.*, 1991],

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin h & \cos h & 0 \\ -\sin \delta \cos h & \sin \delta \sin h & \cos \delta \\ \cos \delta \cos h & -\cos \delta \sin h & \sin \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (83)$$

La déclinaison de la source est inchangée au cours de la rotation terrestre, mais il n'en va pas de même de l'angle horaire, de sorte que le point représentant une ligne de base donnée se déplace dans le plan (u, v) , comme on l'a déjà remarqué sur la figure **XIV.6**. La durée totale de l'observation et le temps d'intégration τ_i séparant deux mesures successives complètent le jeu des paramètres permettant de construire la couverture associée à cette observation simulée. La figure **XV.6** montre le résultat du calcul de six couvertures (u, v) exemplaires, construites à partir de trois des configurations de la figure **XV.4**. On remarque notamment le manque de mesures aux plus petites lignes de base.

XV.3.c Le *gridding*

Les couvertures (u, v) ainsi obtenues correspondent aux fréquences spatiales de la source qui seront effectivement mesurées par l'instrument au cours de l'observation. Or, les champs modèles que nous allons introduire en entrée du simulateur seront échantillonnés sur une grille régulière orthonormée, et pour les raisons qu'on a déjà évoquées au chapitre **XIV**, il est recommandé de ne travailler qu'avec des tableaux réguliers de données, de façon à pouvoir utiliser les algorithmes de transformation de Fourier rapide, ce qui se justifie, en termes de temps de calcul, dès que la taille des images et le nombre de visibilité augmentent. Dans le cas d'ALMA, le seul fait de disposer de 2016 lignes de base simultanément impose de passer par une étape de *gridding*.

Le choix le plus simple pour la fonction de *gridding* G consiste, on l'a dit au chapitre **XIV**, à prendre une fonction nulle en dehors d'un petit rectangle de taille $(\delta u, \delta v)$ centré sur l'origine du plan (u, v) et prenant une valeur constante non nulle à l'intérieur de ce rectangle. C'est ce choix qui a été fait pour le simulateur. Dès lors, il se pose la question de savoir quelle taille de support choisir pour cette fonction de *gridding*. Pour y répondre, il faut prendre en considération plusieurs éléments. Tout d'abord, cette taille ne doit pas être trop petite, sous peine d'obtenir une couverture sur-échantillonnée, avec de nombreux trous. D'autre part, plus les cellules sont petites, plus les images sont grandes, ce qui peut devenir gênant pour la rapidité du simulateur. Inversement, si la taille des cellules est trop grande, on se retrouve avec une couverture sous-échantillonnée, des trous significatifs du plan (u, v) ayant été remplis artificiellement par la convolution. Autrement dit, si la fonction de *gridding* a un support trop grand, on va combiner des visibilité relativement éloignées les unes des autres et donc *a priori* indépendantes, et ainsi fausser la représentation de la brillance. En effet, lorsqu'on corrèle des signaux issus de deux antennes de diamètre d uniformément illuminées, les composantes de Fourier mesurées sont moyennées sur un disque de rayon d . Plus précisément, le poids qui est affecté à une visibilité dépend linéairement de la distance au centre du disque, de sorte que la taille de l'intervalle d'échantillonnage effectif est de l'ordre de d . Le critère de Nyquist impose alors de mesurer les visibilité avec une résolution dans l'espace (u, v) meilleure que $d/2$. En pratique, pour utiliser les algorithmes de déconvolution, on se place souvent à $d/3$ ou mieux.

Ceci est à relier au problème de l'*aliasing*, puisque si l'intervalle d'échantillonnage est trop grand, les différentes répliques de l'image vont se recouvrir. Or, le champ de vue est inversement proportionnel au diamètre d d'une antenne unique, donc la taille "optimale" des cellules dans l'espace doit être de l'ordre de d , et plutôt inférieur à cette valeur pour limiter l'*aliasing*. On a choisi de prendre ici $\delta u = \delta v = d/2$. La figure **XV.7** montre les résultats obtenus pour les deux couvertures correspondant à la première ligne de la figure **XV.6**. Dans le cas de cette configuration compacte, l'échantillonnage est presque parfait sur une grande plage de fréquences spatiales même sans utiliser la rotation terrestre pour effectuer une synthèse d'ouverture.

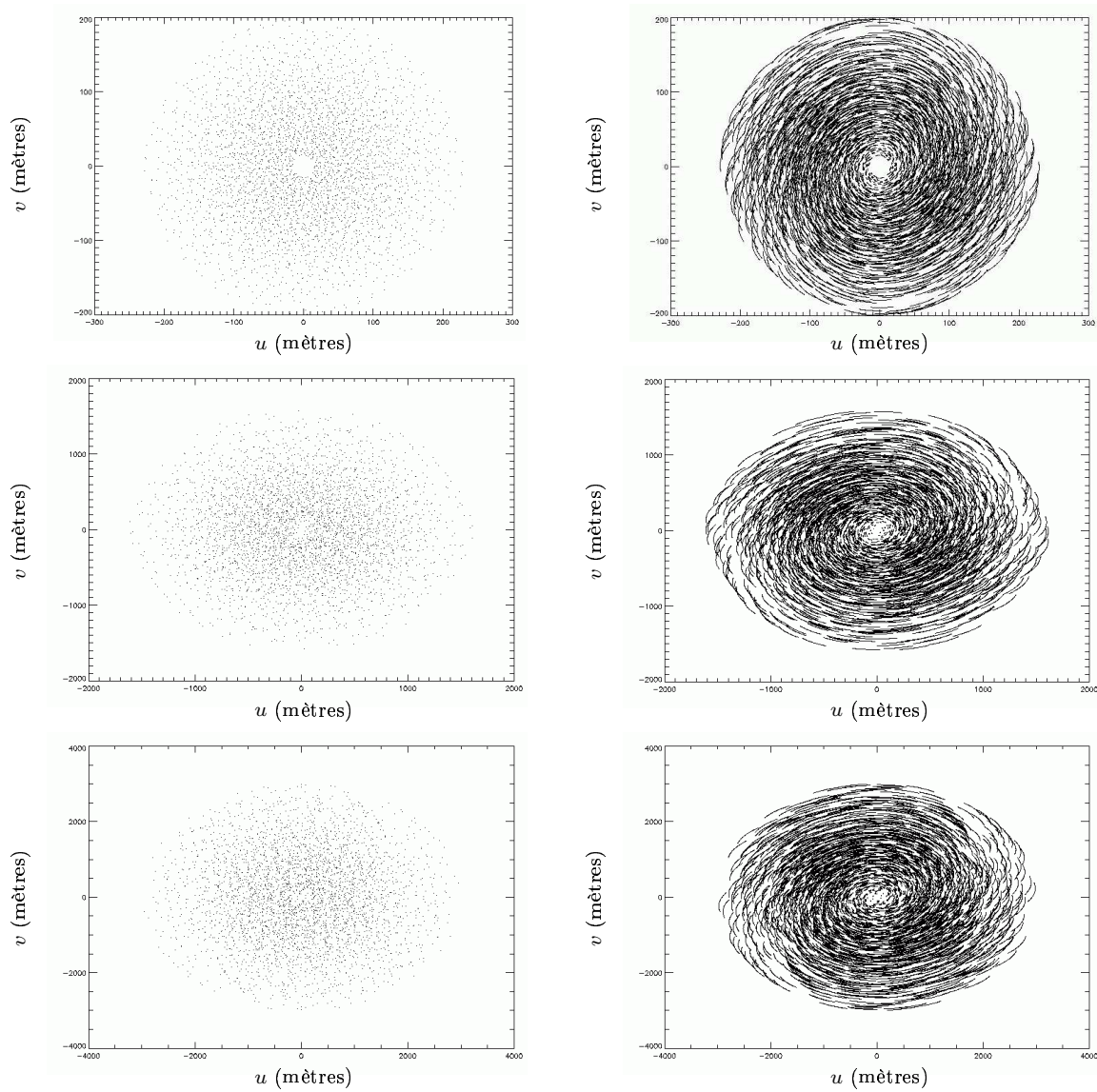


FIG. XV.6 – Exemples de couvertures (u, v) calculées par le simulateur. Dans tous les cas, la source est à une déclinaison $\delta = -23^\circ$. La colonne de gauche montre une observation instantanée et celle de droite une observation d'une durée de 100 minutes. Les trois lignes correspondent à trois configurations différentes de la figure XV.4, à savoir, de haut en bas, les configurations F, D et B. L'angle horaire initial est choisi égal à $h_0 = -5^\circ$. On note les échelles très différentes entre ces trois configurations.

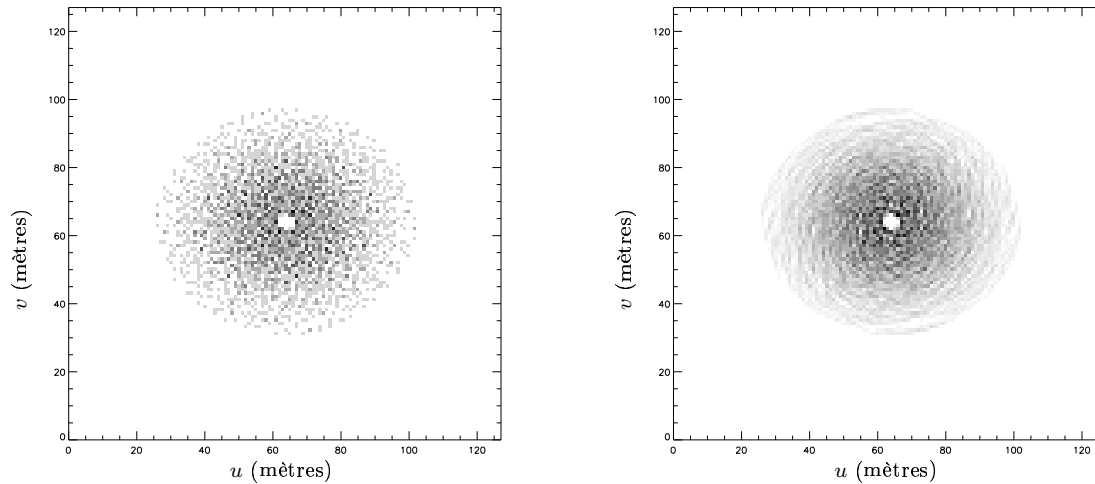


FIG. XV.7 – Couvertures (u, v) rééchantillonnées sur une grille orthonormée. Il s’agit des couvertures illustrées sur la première ligne de la figure XV.6. La taille des cellules dans les deux directions u et v est égale au rayon d’une antenne.

XV.3.d Simulation des observations

Maintenant qu’on dispose de couvertures (u, v) et de leurs versions rééchantillonnées, il s’agit de passer à la simulation des observations. Les distributions de brillance modèles introduites en entrée du simulateur seront des champs browniens fractionnaires, tels qu’on les a définis au chapitre VII. Si l’on devait respecter la méthode de simulation à la lettre, il faudrait, pour chaque vecteur d’onde \mathbf{k} mesuré, se donner une visibilité exacte dont l’amplitude serait déterminée selon une loi de puissance dépendant du module de \mathbf{k} , et dont la phase serait choisie aléatoirement dans une distribution uniforme entre 0 et 2π , puis rééchantillonner ces visibilités sur la même grille orthonormée. Le problème de cette méthode, c’est qu’assez paradoxalement, elle rend moins bien compte des phases des composantes de Fourier qui sont les mieux mesurées. En effet, la valeur assignée à une cellule donnée est égale à la moyenne¹⁰ des visibilités tombant dans cette cellule, qui sont des nombres complexes dont les phases sont complètement décorrélées et les amplitudes sensiblement identiques. En somme, la valeur rééchantillonnée sera un complexe dont l’amplitude sera en moyenne égale au rapport de l’amplitude d’une seule visibilité à la racine carrée du nombre de visibilités tombant dans cette cellule¹¹. En revanche, on ne saurait donner la phase de cette visibilité rééchantillonnée. D’un autre côté, si l’on se donne ces visibilités “brutes”, et si l’on souhaite avoir une image de la distribution de brillance modèle, on est confronté au même problème de temps de calcul que celui mentionné plus haut, et donc obligé de rééchantillonner.

La solution de ce problème, c’est probablement de le contourner. Puisque c’est le caractère aléatoire des phases au sein d’une même cellule de l’espace de Fourier qui pose problème, supprimons-le. Cela revient à considérer que les phases des visibilités tombant dans la même cellule sont toutes identiques, et prennent une valeur aléatoire, toujours choisie dans la même distribution. En somme, ce qu’on fait là, c’est considérer que la phase est plus lisse dans l’espace de Fourier que ne le suggère le modèle mathématique, ce qui est parfaitement raisonnable physiquement. En ce qui concerne les amplitudes, rien n’empêche *a priori* de les construire comme on l’a suggéré plus haut avant de les rééchantillonner, cependant il est beaucoup plus simple de supposer que l’amplitude est aussi constante sur une cellule donnée, de sorte qu’on peut se donner les distributions de brillance modèle directement sur la grille régulière, comme sont construits les champs browniens fractionnaires du chapitre VII. Dans cette approximation, la simple multiplication de la transformée de Fourier de l’image par la couverture rééchantillonnée W donne les composantes de Fourier de l’image sale. La notation W n’est pas innocente. Elle fait référence au fait que la couverture présentée

¹⁰On considère une fonction de poids uniforme.

¹¹Qu’on se représente une visibilité tombant dans la cellule considérée comme un pas d’une marche aléatoire dans \mathbb{R}^2 , chaque pas étant de même longueur. La valeur rééchantillonnée est égale à la position finale du marcheur par rapport à son point de départ, divisée par le nombre de pas.

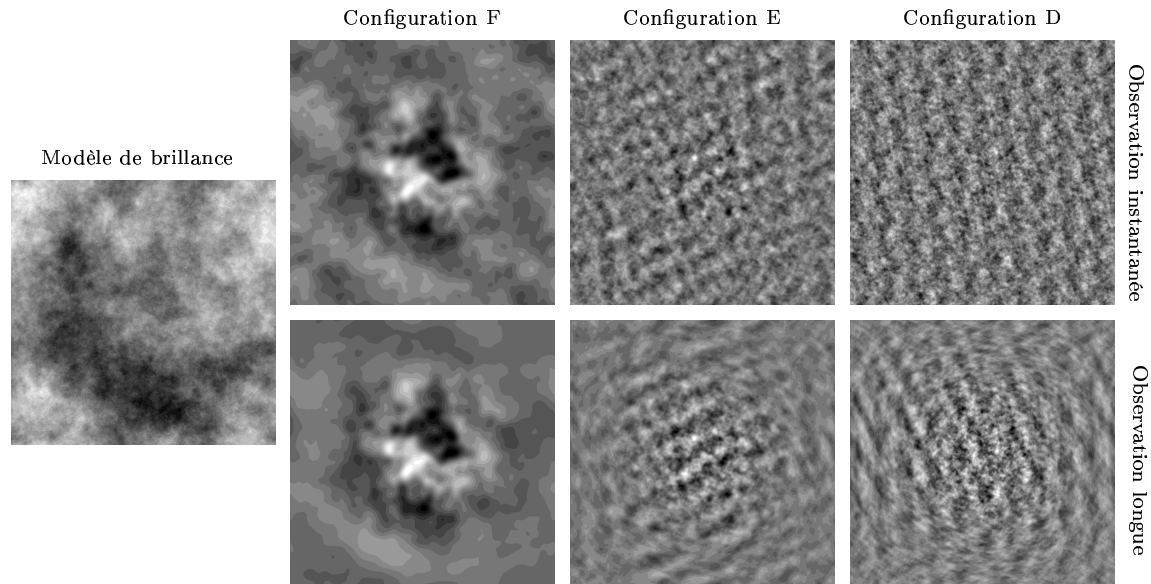


FIG. XV.8 – Exemples de filtrage interférométrique d'une distribution de brillance complexe. L'image de départ est un champ brownien fractionnaire d'indice spectral $\beta = 3$ et de taille 1024×1024 , représenté à l'extrême gauche. Les six autres figures montrent les images sales obtenues dans divers cas. La première ligne correspond au cas d'une observation de type *snapshot*, la seconde à une observation de durée 100 minutes. Chaque colonne correspond à l'une des trois configurations les plus compactes montrées sur la figure XV.4. Dans tous les cas, on a utilisé les poids naturels. La taille du champ est de 51 secondes d'arc dans chaque direction.

sur la figure XV.7 inclut les poids naturels affectés aux données, puisque la valeur de chaque cellule est égale au nombre de visibilité qu'elle contient. Si l'on désire les composantes de Fourier de l'image sale dans le cas des poids uniformes, il faut prendre comme filtre non plus W mais son support W_0 , c'est-à-dire l'image valant un là où W est non nulle et zéro partout ailleurs.

Il est un dernier point à aborder avant de montrer des exemples du filtrage interférométrique de structures complexes et de passer à l'analyse quantitative. La taille des pixels dans l'espace (u, v) est fixée arbitrairement, on l'a vu, et reste identique d'une configuration à l'autre. Seulement, lorsqu'on éloigne les antennes les unes des autres, il en résulte une augmentation de la taille des tableaux représentant les couvertures, et donc de celle des images. Or on voudrait n'avoir qu'une seule taille d'image de façon à pouvoir comparer les résultats obtenus d'une configuration à l'autre, sur la même distribution de brillance. Il suffit en fait pour cela de plonger les couvertures correspondant aux configurations les plus compactes dans des tableaux plus grands, ce qui ne pose pas de problème puisque justement les pixels ont toujours la même taille. La seule limitation est qu'avec des tableaux très grands le temps de calcul devient prohibitif, de sorte qu'on se limitera aux trois configurations les plus compactes, et à des images de taille 1024×1024 .

La figure XV.8 montre, pour ces trois premières configurations, l'exemple d'un champ brownien fractionnaire filtré par le simulateur, dans le cadre d'une observation instantanée et d'une observation de 100 minutes, en utilisant les poids naturels. On voit notamment que le trou central de la couverture (u, v) supprime les plus grandes structures, et que la taille caractéristique des structures présentes dans les images sales diminue avec l'étendue de la configuration. D'autre part, on remarque peu de différences entre le *snapshot* et l'observation de longue durée, ce qui correspond au fait que la couverture instantanée des configurations compactes est déjà pratiquement complète, et que par conséquent la synthèse d'ouverture par utilisation de la rotation terrestre n'est pas fondamentalement nécessaire.

Ceci étant posé, on va s'intéresser maintenant aux diagnostics du filtrage interférométrique ainsi simulé en utilisant les divers outils de caractérisation des structures introduits au chapitre V.

□

CHAPITRE XVI

Diagnostics de l'effet du filtrage

XVI.1 Introduction

Le simulateur décrit au chapitre **XV** va nous permettre d'étudier les effets du filtrage interférométrique sur des distributions de brillance complexes, telles qu'ALMA pourra en observer dans le milieu interstellaire, et de déterminer les différentes réponses qu'apportent à ce filtrage les outils de caractérisation des structures introduits dans la deuxième partie. Dans l'idéal, ceux-ci devraient être suffisamment robustes pour que leur utilisation sur les distributions de brillance modèles et sur les cartes sales fournissent les mêmes valeurs, ou qu'à défaut la relation entre les deux soit univoque et bien calibrée. On pourra alors dire que l'outil en question permet de remonter aux propriétés des distributions de brillance sans passer par une étape de déconvolution.

Comme on l'a déjà annoncé au chapitre précédent, les champs synthétiques que nous allons "observer" au travers du simulateur instrumental seront des browniens fractionnaires bidimensionnels. Le fait qu'ils possèdent de la structure à toutes les échelles constitue une propriété particulièrement intéressante dans l'optique du filtrage interférométrique, puisque celui-ci est essentiellement de nature spatiale. On a d'ailleurs déjà pu constater visuellement, sur la figure **XV.8**, la dégradation causée par le simulateur sur ce type de champ. De plus, en ce qui concerne les outils de caractérisation des structures, les browniens fractionnaires présentent l'intérêt d'être entièrement déterminés par l'exposant de leur spectre de puissance et par leur carte de phases. Comme le lecteur s'en apercevra, ce chapitre traitera essentiellement de la question de l'indice spectral, le problème des phases étant abordé au chapitre **XVII**.

Ainsi, l'objectif de ce chapitre consiste à évaluer le comportement, vis-à-vis du filtrage interférométrique, des différents outils introduits dans la deuxième partie, à savoir le spectre de puissance, les fonctions de structure, la Δ -variance ou encore la dimension fractale, et à déterminer lesquels sont les plus aptes à fournir des estimations fiables de l'indice spectral des distributions de brillance modèles. Plus précisément, on essaiera de séparer les effets de l'incomplétude de la couverture (u, v) de ceux induits par le lobe primaire, et on introduira également un bruit heuristique de façon à tester plus avant la fiabilité des méthodes de caractérisation choisies.

XVI.2 Les modèles de distribution de brillance

Concernant l'implémentation pratique de cette étude, comme on l'a déjà expliqué au chapitre précédent, on se limitera aux trois configurations les plus compactes de la figure **XV.4** et on utilisera, comme champs modèles, des browniens fractionnaires de taille 1024×1024 , d'indice spectral compris entre 2 et 4. Plus précisément, on se donne 21 valeurs de cet indice, régulièrement espacées, et on construit 21 browniens fractionnaires, représentés sur la figure **XVI.1**, correspondant chacun à un indice spectral différent. Notons que les cartes de phase utilisées pour chacun de ces champs sont toutes différentes, ce qui ne pose pas de problème, comme on le verra dans la suite de ce chapitre.

Pour chacun de ces champs, on applique en premier lieu l'atténuation due au lobe d'antenne. Dans le cas d'une antenne ayant une ouverture de diamètre $d = 12$ m illuminée uniformément, ce lobe est une fonction d'Airy dont la largeur à mi-hauteur est d'environ 27 secondes d'arc, en se plaçant à une longueur d'onde $\lambda = 1,3$ mm. Le champ de vue, lui, fait un peu plus de 51 secondes d'arc dans chaque direction, la taille d'un pixel étant de 0,05 seconde d'arc. La figure **XVI.2** montre ainsi l'exemple du champ correspondant à $\beta = 3,1$. Le fait que l'on ait choisi ce champ plutôt qu'un autre n'a pas de signification particulière. Le lecteur doit bien être conscient qu'on obtient des résultats semblables avec les autres champs de la figure **XVI.1**.

À partir de ces images propres atténuées par le lobe primaire, on construit ensuite six images sales, correspondant aux deux fonctions de poids (naturel et uniforme) et aux trois configurations les plus compactes

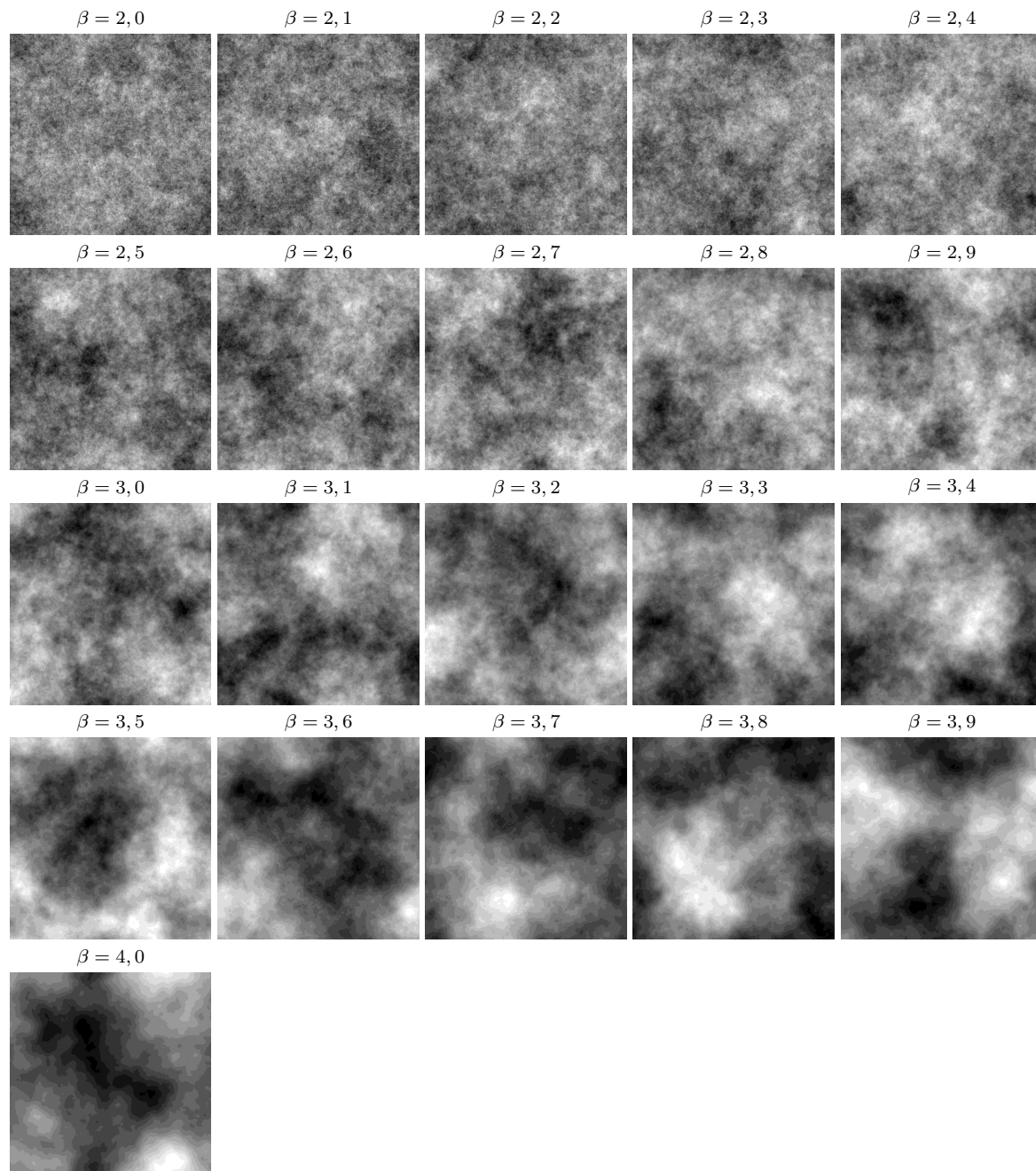


FIG. XVI.1 – Modèles de distribution de brillance utilisés en entrée du simulateur. L'indice spectral de chacun de ces champs est indiqué sur chaque sous-figure. Les cartes de phase ne sont pas conservées d'un modèle à l'autre.

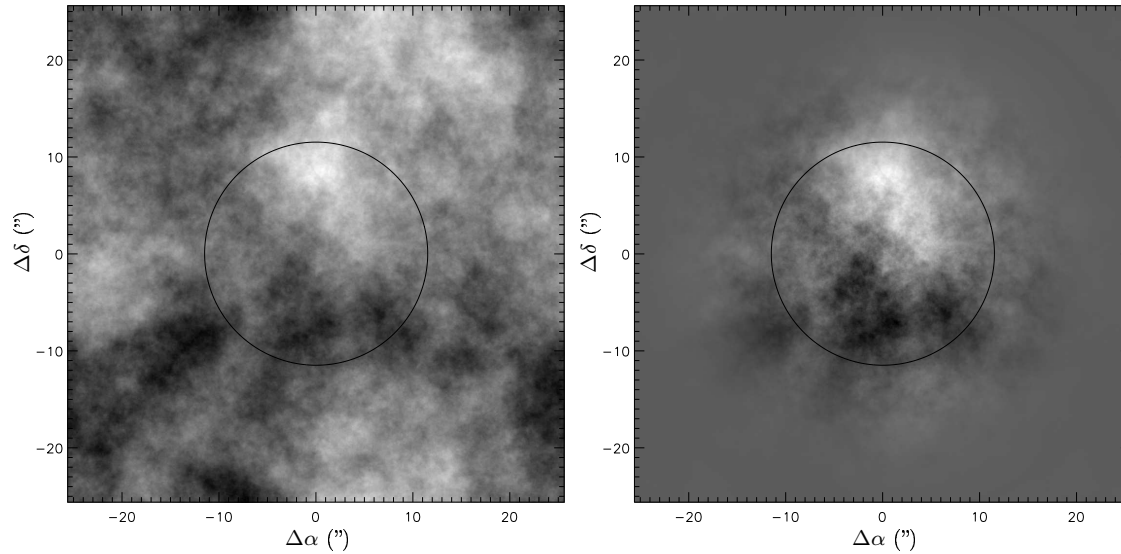


FIG. XVI.2 – Atténuation par le lobe primaire. La distribution de brillance d'indice spectral $\beta = 3,1$ est représentée sur la figure de gauche. À droite, on peut voir la distribution obtenue après multiplication par le lobe primaire, celui-ci étant caractérisé par une largeur à mi-hauteur de $27''$, indiquée par le cercle noir sur chacune des deux figures. Les axes sont gradués en secondes d'arc par rapport au centre de pointage. La taille d'un pixel est de $0,05'' \times 0,05''$.

(F, E et D) de la figure XV.4. Dans tous les cas, l'observation se fait en mode *snapshot*, c'est-à-dire sans utiliser la rotation terrestre pour remplir le plan (u, v) , et en supposant que le centre de pointage se trouve à la position $\alpha = -5^\circ$ et $\delta = -23^\circ$. On a vu très qualitativement, à la fin du chapitre précédent, que la synthèse d'ouverture par ce biais n'apportait pas grand chose de plus dans le cas des configurations compactes d'ALMA. La figure XVI.3 présente les images sales obtenues de cette manière dans le cas de la distribution de brillance déjà représentée sur la figure XVI.2 et correspondant à $\beta = 3,1$. Les remarques essentielles concernant cette figure sont les mêmes que celles qu'on a faites à propos de la figure XV.8.

En ce qui concerne l'introduction de bruit dans les données, on en discutera plus loin, sachant bien entendu que celui-ci modifiera les cartes sales de la figure XVI.3. Dans tout ce qui suit, on notera X les modèles de distribution de brillance, et Y les images sales en sortie du simulateur.

XVI.3 Spectre de puissance

XVI.3.a Effet attendu

Comme on l'a dit, l'une des propriétés essentielles des champs browniens fractionnaires introduits en entrée du simulateur est le fait que leur spectre de puissance suit une loi de puissance sur l'ensemble des échelles échantillonnées dans l'image, et l'exposant de cette loi est donc une caractéristique de la distribution de brillance que l'on va chercher à retrouver à partir des images sales. Dans ce contexte, il est logique de commencer par étudier l'effet du filtrage sur le spectre de puissance lui-même.

Le spectre de puissance brut, c'est-à-dire non moyenné azimutalement, est égal, en chaque point du plan (u, v) , au carré du module de la transformée de Fourier du champ. Par conséquent, le diagnostic du spectre de puissance doit être évalué dans l'espace des visibilité plutôt que dans l'espace image.

Les spectres de puissance de l'image modèle et de l'image sale obtenue dans une simulation donnée, notés respectivement \mathcal{P}_X et \mathcal{P}_Y , sont alors

$$\mathcal{P}_X = |V_0|^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_Y = |W(\widehat{P}_\nu * V_0)|^2 = |W|^2 \times |\widehat{P}_\nu * V_0|^2,$$

en rappelant que cette écriture est une version simplifiée de celle de la figure XV.1, en ce sens qu'elle suppose le *gridding* déjà inclus dans les images modèles, ce qu'on a discuté au chapitre précédent, et qu'elle ignore

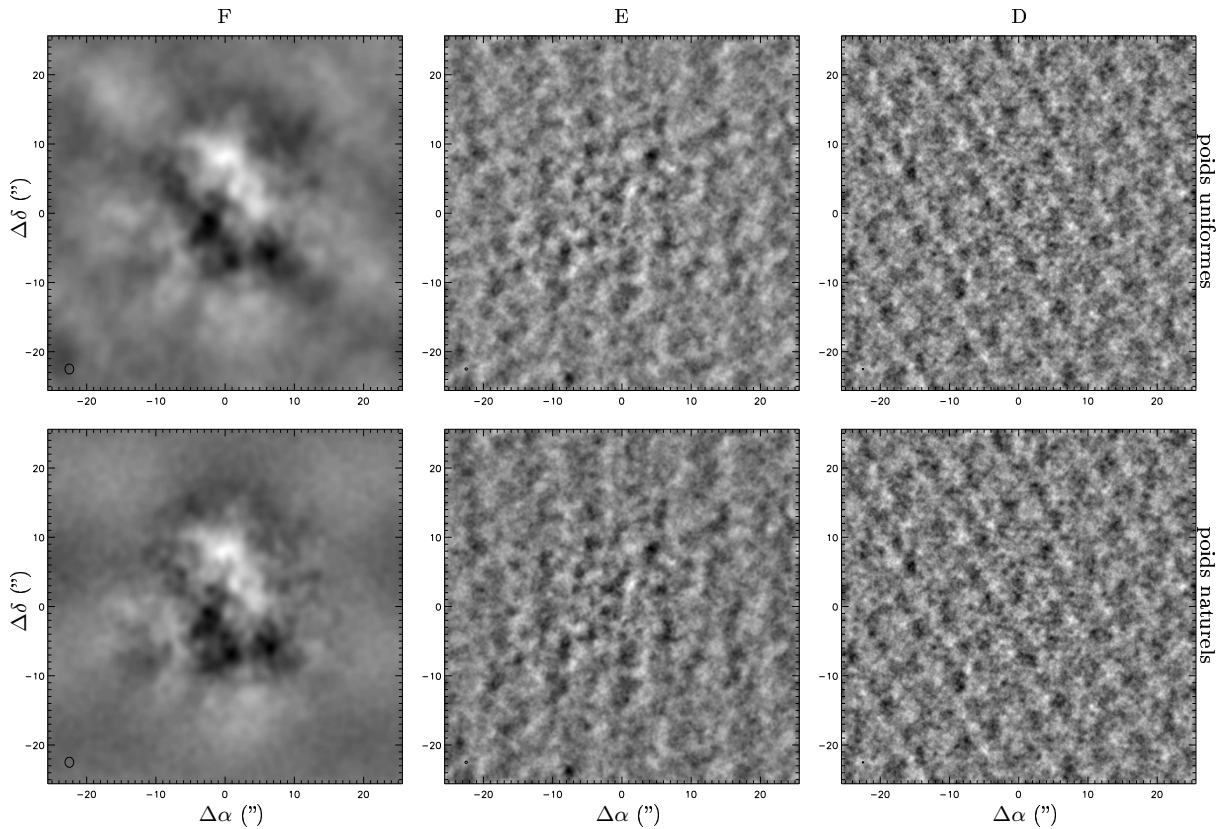


FIG. XVI.3 – Images sales obtenues en sortie du simulateur, correspondant au modèle de distribution de brillance caractérisé par un indice $\beta = 3, 1$, représenté sur la figure XVI.2. Chaque colonne correspond à l'une des trois configurations F, E ou D, et chaque ligne à l'une des deux fonctions de poids. La taille du lobe synthétisé (FWHM) est indiquée en bas à gauche de chaque sous-figure (difficilement visible dans le cas des configurations E et D).

la réplication due au rééchantillonnage. On a justifié cette dernière approximation au chapitre précédent en disant que l'atténuation par le lobe primaire permettait *a priori* d'éviter que l'*aliasing* ne se fasse sentir¹. Aux points du plan (u, v) effectivement mesurés, c'est-à-dire où la couverture W est non nulle, le rapport du spectre de puissance \mathcal{P}_Y au carré du module de celle-ci donne une première estimation du spectre de puissance de l'image modèle. Notons que dans le cas où l'on utilise une fonction de poids uniforme, cette estimation est directement fournie par \mathcal{P}_Y .

Il subsiste le problème posé par le lobe primaire, dont l'effet est une convolution dans l'espace de Fourier. Le noyau de cette convolution est une fonction triangle² relativement étroite, et ce d'autant plus que le lobe primaire couvre une plus grande partie du champ. Étant données les valeurs qu'on a prises ici, à savoir un champ de $51, 2'' \times 51, 2''$ et un lobe primaire dont la largeur à mi-hauteur vaut environ $27''$ pour $\lambda = 1, 3$ mm, la taille du noyau de convolution appliqué aux vraies visibilitées est de l'ordre de deux pixels. Par conséquent, l'approximation consistant à écrire $\mathcal{P}_Y \simeq |W|^2 \mathcal{P}_X$ est amplement justifiée, ce qui montre qu'on doit pouvoir retrouver directement la statistique de l'image modèle à partir de celle de l'image sale.

XVI.3.b Approche numérique

Les simulations faites sur les champs browniens fractionnaires de la figure XVI.1 permettent de vérifier ces idées. En ce qui concerne l'influence du lobe primaire, on montre, sur la figure XVI.4, et toujours dans le cas $\beta = 3, 1$, les spectres de puissance de l'image de départ, ainsi que le spectre brut et le spectre moyenné

¹Ce qu'on peut remettre en question, par exemple s'il existe une source dans l'un des lobes secondaires du lobe d'antenne. Il est alors possible que l'émission de cette source soit repliée dans le lobe primaire.

²Transformée de Fourier d'une fonction d'Airy.

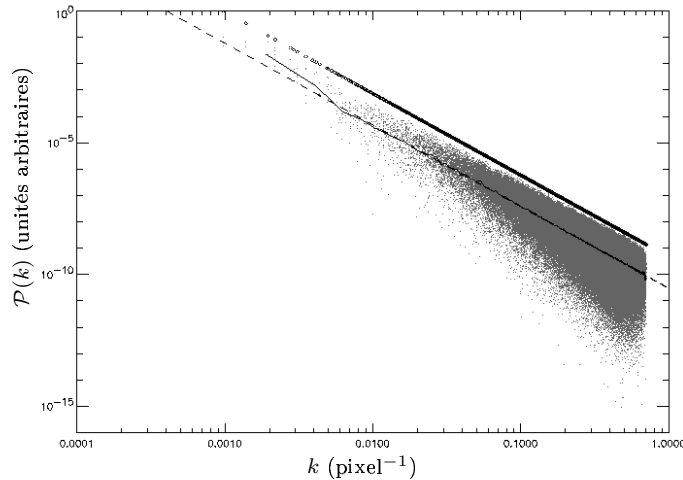


FIG. XVI.4 – *Effet du lobe primaire sur le spectre de puissance. Le spectre correspondant à l'image initiale est représenté par les losanges, et il suit une loi de puissance d'exposant $-3,1$. Les points gris représentent quant à eux le spectre de puissance brut de l'image atténuée par le lobe primaire, et le trait continu en est la moyenne azimutale, dont on montre qu'elle suit également une loi de puissance, de même indice que la loi initiale (tirets).*

azimutalement de l'image atténuée par le lobe primaire.

On voit notamment que si la convolution des visibilitées V_0 par la fonction \hat{P}_v altère sensiblement le spectre de puissance brut, en introduisant une dispersion d'autant plus forte qu'on se place aux grands nombres d'onde, on retrouve néanmoins le comportement en loi de puissance lorsqu'on applique une moyenne azimutale. Par ailleurs, le fait que le spectre de puissance de l'image atténuée soit systématiquement inférieur à celui de l'image initiale peut s'interpréter en remarquant qu'effectuer la convolution correspondant à la multiplication par le lobe d'antenne dans l'espace réel revient à moyenner localement les visibilitées. Comme on en a déjà discuté au chapitre précédent, cela a pour effet de diminuer l'amplitude des visibilitées, ce qu'on observe directement sur le spectre de puissance.

En ce qui concerne le filtrage spatial par la couverture incomplète W , on observe bien l'effet attendu. La figure XVI.5 montre ainsi les spectres de puissance des images sales associées aux configurations F et E, dans le cas d'une fonction de poids uniforme. Comme on l'a dit, on s'attend à ce que le spectre de puissance brut des images sales soit alors simplement un sous-ensemble du spectre de puissance de l'image de départ, correspondant aux points effectivement mesurés dans le plan (u, v) . C'est ce qu'on voit sur la figure. Si les spectres de puissance bruts des images sales ne s'alignent pas sur la droite du spectre de l'image initiale, c'est qu'il faut prendre en compte l'effet du lobe. En effet, si l'on ne prend pas en compte cette atténuation et qu'on effectue simplement le filtrage spatial, on obtient un spectre parfaitement aligné avec celui d'origine, comme le montre la figure. Dans le cas "réaliste", la moyenne azimutale suffit à redonner une loi de puissance de même exposant que le spectre de puissance de la distribution de brillance modèle. Le cas des poids naturels est présenté sur la figure XVI.6. On voit notamment, dans le cas de la configuration F, que le spectre de puissance, qu'il soit brut ou moyenné azimutalement, présente une pente différente de celle du spectre de puissance de la distribution de brillance originale, qu'on a représentée par le trait en pointillés. En corrigeant des poids, c'est-à-dire en divisant le spectre par le carré de la couverture, on retombe bien sur la loi de puissance attendue. Le cas de la configuration E est également intéressant parce que le spectre de puissance non corrigé est identique au spectre corrigé, ce qu'on interprète simplement par le fait que dans cette configuration, il existe au plus une visibilité tombant dans une cellule donnée.

L'ajustement d'une loi de puissance sur le spectre de puissance, moyenné azimutalement, des images sales correspondant aux poids uniformes préalablement atténuées par le lobe primaire, semble donc redonner l'indice spectral de la distribution de brillance modèle. Pour vérifier cette hypothèse, on montre, sur la figure XVI.7, le résultat de tels ajustements³ effectués d'une part pour chaque configuration séparément

³Les résultats sont présentés en termes d'exposants de Hurst, pour permettre la comparaison avec les diagnostics qui suivront.

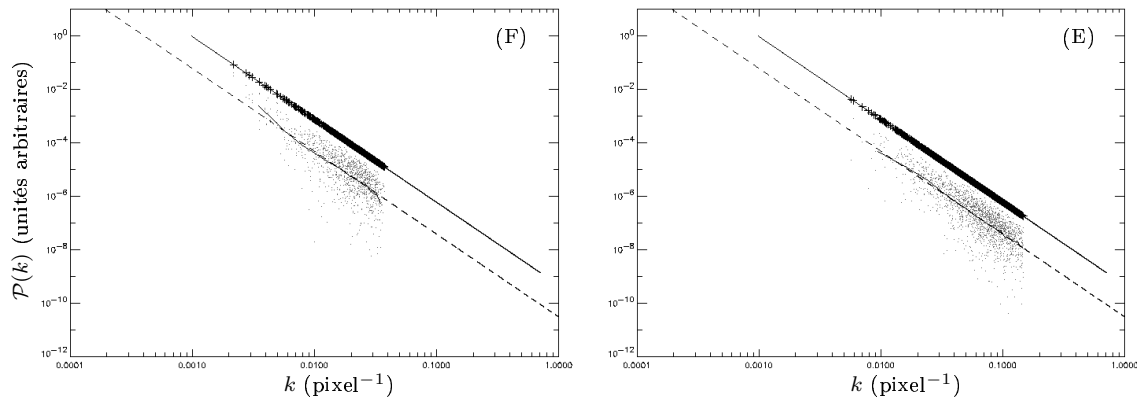


FIG. XVI.5 – Effet du filtrage spatial dans le cas d’une fonction de poids uniforme. La figure de gauche correspond à la configuration *F*, celle de droite à la configuration *E*. Le spectre de puissance des images sales est représenté par le nuage de points gris. La moyenne azimuthale de ce spectre brut est le trait plein qui traverse ce nuage. Pour comparaison, on montre le spectre de puissance de l’image originale (droite en trait plein) et le spectre de puissance brut d’une image filtrée mais non atténuée par le lobe primaire (croix). Les tirets, représentant une loi de puissance de même exposant que le spectre de puissance de départ, montrent que la moyenne azimuthale du spectre de puissance de l’image sale permet de remonter à l’indice spectral initial.

et d’autre part sur la combinaison des trois spectres de puissance correspondant aux trois configurations. On observe qu’il existe des écarts entre les mesures et les valeurs théoriques, mais que ces écarts sont relativement faibles, et surtout qu’il n’existe pas d’erreur systématique comme on en verra dans la suite. Par ailleurs, lorsqu’on combine les mesures faites dans les trois configurations en un seul jeu de données, les ajustements obtenus sont encore améliorés. Notons enfin que les écarts observés sont entièrement attribuables à l’effet du lobe primaire. En effet, si l’on considère les images sales non atténuées par celui-ci, les indices spectraux obtenus par ajustement redonnent exactement les indices des distributions de brillance initiales.

XVI.4 Δ -variance

XVI.4.a Quelques remarques préliminaires

On a introduit, au chapitre **V**, les notions de variance d’Allan et de Δ -variance, en remarquant notamment qu’elles sont étroitement liées au spectre de puissance \mathcal{P}_X , puisqu’on peut écrire leurs valeurs à une échelle donnée comme une intégrale de ce spectre, pondérée par une fonction filtre $\mathcal{P}_{G_{n,\rho}}$ dépendant de l’échelle considérée, ce qu’exprime l’équation (10), qu’on réécrit ici par commodité,

$$\sigma_{\Delta}^2(2\rho) = \frac{1}{2\pi} \int \mathcal{P}_X(\mathbf{k}) \mathcal{P}_{G_{2,\rho}}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad \text{en se plaçant en dimension 2.}$$

L’application de cette méthode aux champs browniens fractionnaires bidimensionnels (voir le chapitre **VII**) a d’ailleurs permis de montrer qu’on pouvait déduire l’indice spectral β à partir du comportement de la Δ -variance en fonction de l’échelle, puisque $\sigma_{\Delta}^2(\rho) \propto \rho^{\beta-2}$.

L’utilité de cet outil se manifeste en pratique par le fait qu’on peut la calculer de la même façon sur des champs périodiques et non périodiques [Bensch *et al.*, 2001, Ossenkopf & Mac Low, 2002], alors que ce dernier cas de figure pose des difficultés lorsqu’on cherche à calculer le spectre de puissance⁴. Dans notre cas, la question ne se pose pas ainsi, puisque les modèles de distribution de brillance sont par construction

⁴Les méthodes de transformée de Fourier rapide font l’hypothèse implicite que le champ est périodique. S’il ne l’est pas, on est confronté à des effets de discontinuité qui perturbent donc le calcul du spectre de puissance.

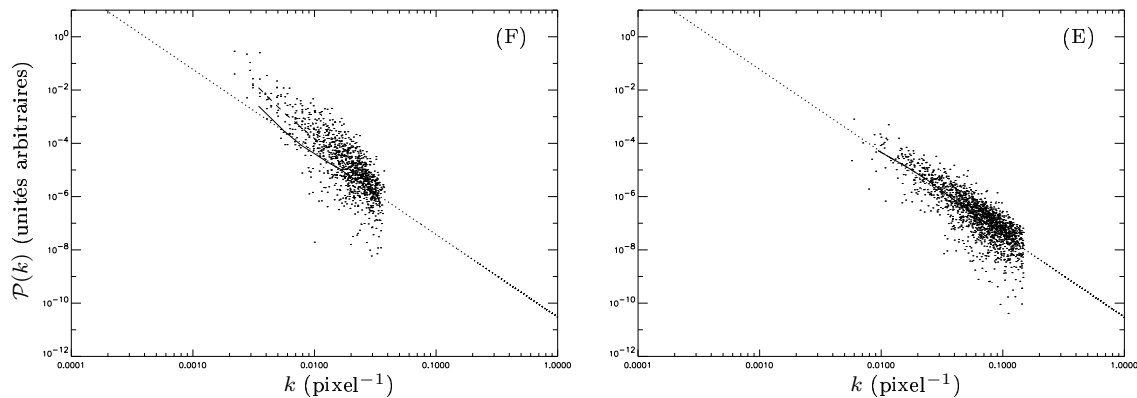


FIG. XVI.6 – Effet du filtrage spatial dans le cas d’une fonction de poids naturelle. La figure de gauche correspond à la configuration *F*, celle de droite à la configuration *E*. Le spectre de puissance des images sales, non corrigé de la couverture, est représenté par le nuage de points et la courbe en tirets, qui correspond à la moyenne azimutale du spectre brut. La courbe en trait plein représente le spectre de puissance moyenné azimutalement, après correction des poids. Pour comparaison, on présente également une loi de puissance de même exposant que le spectre de puissance de départ (pointillés).

périodiques et qu’il en va donc de même des images en sortie du simulateur. Il ne faudrait pas en conclure que l’étude de l’effet du filtrage interférométrique sur le diagnostic de la Δ -variance n’a alors pas d’intérêt, car dans le cas de l’imagerie directe d’une distribution de brillance réelle, non-périodique, c’est cet outil, plus que le calcul direct du spectre de puissance, qui fournit les estimations les plus fiables de l’indice spectral [Bensch *et al.*, 2001]⁵.

XVI.4.b Effet du lobe primaire

Que peut-on s’attendre à observer en calculant la Δ -variance d’une image sale ? Comme pour le spectre de puissance, séparons le raisonnement concernant l’effet du lobe primaire de celui concernant le filtrage spatial proprement dit. On a dit à la section précédente que le spectre de puissance de l’image multipliée par le lobe primaire devait s’interpréter à la lumière de la convolution équivalente dans l’espace de Fourier. Dans notre cas, le noyau de cette convolution est très étroit, étant donnée la grande taille du lobe primaire. Lorsqu’on se place à des échelles ρ relativement petites, la fonction filtre ne présente que des variations lentes avec la fréquence spatiale, de sorte qu’on peut la considérer comme presque constante. La Δ -variance est alors simplement proportionnelle à l’intégrale, sur tout l’espace de Fourier, du spectre de puissance de l’image atténuée. En intégrant d’abord sur l’angle, on a déjà vu que la moyenne azimutale de ce spectre redonnait la loi de puissance de la distribution de brillance de départ. On s’attend donc à ce que la Δ -variance des images atténuées par le lobe primaire suive le même comportement que celle des images initiales, tout au moins aux échelles suffisamment petites. C’est ce que montre effectivement la figure XVI.8. En raisonnant dans l’espace direct, on peut dire plus simplement que les échelles notablement plus petites que le lobe ne sont pas affectées, puisque ce dernier est quasi-constant.

La Δ -variance mesurée sur l’image atténuée par le lobe primaire suit effectivement la même loi de puissance que lorsqu’on la calcule sur la distribution de brillance modèle, sauf aux échelles supérieures à environ $3''$, soit 60 pixels ou encore 6% de la taille de la carte. Le fait que la Δ -variance soit plus petite dans le cas atténué correspond au fait que le spectre de puissance est lui aussi plus faible. Le comportement au-delà de l’échelle limite est en revanche difficile à expliquer.

⁵Notons que dans ce qui suit, c’est l’algorithme “PIX” de [Bensch *et al.*, 2001] qui est utilisé pour calculer la Δ -variance. On pourra se reporter au chapitre V pour plus de précisions.

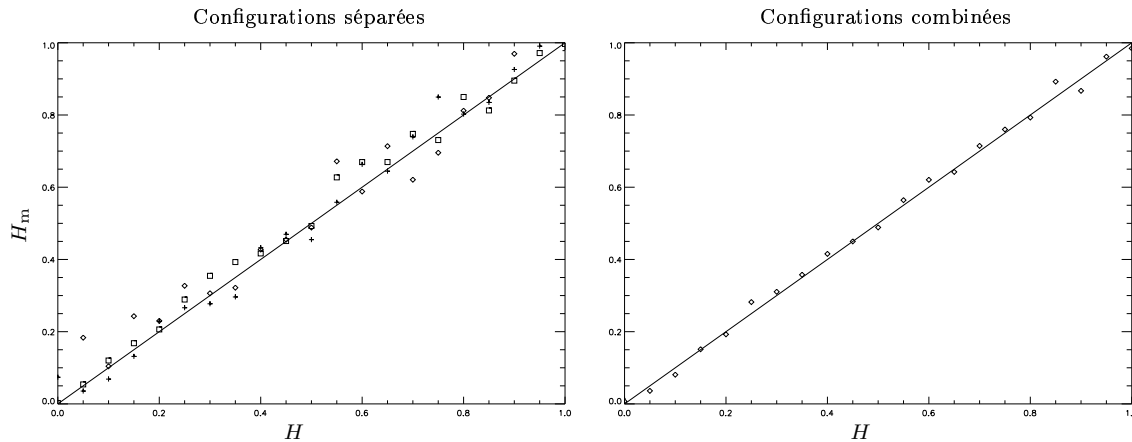


FIG. XVI.7 – Évolution de l'exposant de Hurst mesuré H_m à partir d'un ajustement des spectres de puissance des cartes sales, moyennés azimutalement, en fonction de l'exposant théorique H . La figure de gauche montre les résultats obtenus en séparant les données correspondant aux configurations F (losanges), E (croix) et D (carrés), tandis que la figure de droite montre les ajustements obtenus en combinant les trois spectres de puissance.

XVI.4.c Effet du filtrage spatial

Premières observations

La fonction filtre $\mathcal{P}_{G_{2,\rho}}$ est une fonction positive, comme le montre son expression (11). Par conséquent, l'absence de mesure en certains points de l'espace de Fourier, qu'on peut concevoir comme l'annulation des composantes correspondantes, doit aboutir à une diminution de la valeur de la Δ -variance mesurée pour chaque échelle. Inversement, si l'on se place dans le cas d'une fonction de poids naturelle et de la configuration la plus compacte, certaines composantes de Fourier dans le voisinage de l'origine $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ sont renforcées par l'accumulation des visibilités dans les cellules de l'espace (u, v) . Les valeurs de la Δ -variance mesurées aux échelles correspondantes, c'est-à-dire aux plus grandes échelles, devraient donc être plus importantes sur l'image filtrée que sur l'image initiale.

C'est ce qu'on observe immédiatement sur la figure XVI.9, qui montre la Δ -variance mesurée sur les images filtrées par l'interféromètre dans les trois configurations considérées, sans atténuation préalable par le lobe primaire. La distribution de brillance modèle est toujours celle d'indice spectral $\beta = 3, 1$, mais les résultats sont semblables pour les autres images initiales. On voit notamment que les mesures effectuées sur les images filtrées sont systématiquement inférieures à celles portant sur le modèle de départ, sauf dans le cas de la configuration F et de la fonction de poids naturelle. D'ailleurs, comme on l'avait remarqué à propos du spectre de puissance, le choix des poids n'a en fait pas d'incidence sur la Δ -variance dans le cas des configurations E et D. D'autre part, les chutes observées aux petites et aux grandes échelles correspondent aux rayons limites des couvertures dans le plan (u, v) .

On pourrait hâtivement en conclure, d'après le cas des poids uniformes, que seule la configuration la plus compacte possède une couverture complète sur une certaine plage de nombres d'onde, du fait que les valeurs de la Δ -variance mesurées entre les échelles $\rho = 1, 8''$ et $\rho = 3''$ redonnent les valeurs de la carte initiale. C'est oublier qu'un trou dans la couverture (u, v) se fait sentir sur une grande plage d'échelles, comme le montre la figure XVI.10, qui présente la Δ -variance mesurée sur une image filtrée par une couverture complète sauf en un point⁶, rapportée à la Δ -variance de l'image de départ. Les valeurs affectées par cette incomplétude ne sont pas parfaitement localisées, du fait de l'intégration sur l'espace de Fourier et de la largeur finie de la fonction filtre. Ainsi, les configurations E et D peuvent parfaitement comporter des plages de nombres d'onde entièrement mesurées, sans que l'on dispose pour autant d'une plage d'échelles sur laquelle la Δ -variance ne serait pas affectée.

⁶Ce cas de figure est purement académique. Dans le cas d'une observation interférométrique réelle, s'il manque un point de mesure, il en manque au moins $2(N_a - 1)$, où N_a est le nombre d'antennes.

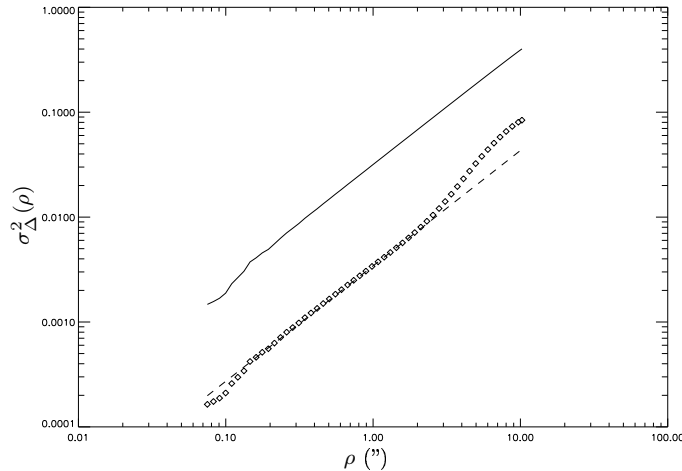


FIG. XVI.8 – Effet du lobe primaire sur la Δ -variance. Les losanges correspondent aux mesures faites sur la distribution de brillance repérée par $\beta = 3,1$, atténuée par le lobe primaire. À titre de comparaison, la Δ -variance mesurée sur l'image non atténuée est représentée par le trait plein, et les tirets correspondent à une loi de puissance d'indice 1,1.

“Reconstruction” de la Δ -variance

L'observation de la figure XVI.9 semble indiquer que l'évolution de la Δ -variance des images filtrées en fonction de l'échelle ne fournit pas directement l'indice spectral de la distribution de brillance initiale. En effet, à part pour la configuration F dans le cas d'une fonction de poids uniforme, on ne voit pas clairement de comportement en loi de puissance. Il est donc important de se demander s'il est possible, à l'aide de manipulations simples des données, de remonter à cet indice spectral à partir de la Δ -variance mesurée sur une image filtrée. Pour aborder ce problème, remarquons que celle-ci est reliée au spectre de puissance par l'équation (10), dont la forme discrète est

$$\sigma_{\Delta}^2(2\rho) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{9}{8}\right)^2 \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{P}_X(\mathbf{k}) |W|^2(\mathbf{k}) \left[\frac{J_1(2\pi k\rho)}{\pi k\rho} - \frac{J_1(6\pi k\rho)}{3\pi k\rho} \right]^2 \Delta k^2, \quad (84)$$

en explicitant le spectre de puissance (11) de la fonction filtre, et où Δk est la taille d'un pixel dans l'espace de Fourier. On rappelle que l'effet du lobe primaire n'est pas pris en compte ici, ce qui permet d'écrire $\mathcal{P}_Y = \mathcal{P}_X |W|^2$. Ainsi, et sans surprise, la contribution d'un pixel \mathbf{k}_0 à la Δ -variance à une échelle donnée est entièrement déterminée par la valeur du spectre de puissance \mathcal{P}_X en ce point. La déformation des courbes de la figure XVI.9, par rapport au cas sans filtrage, s'interprète en disant que certaines de ces contributions sont manquantes, étant bien entendu que ces dernières correspondent aux trous de la couverture (u, v) . Si l'on veut retrouver le comportement en loi de puissance, il faut donc nécessairement faire une hypothèse sur la valeur du spectre de puissance aux points non mesurés⁷.

Dans le cadre de nos simulations, il suffit cependant de supposer que le champ observé est isotrope, au sens où le spectre de puissance ne dépend que du nombre d'onde k et non de la direction du vecteur d'onde \mathbf{k} . Cette hypothèse va nous permettre de retrouver un comportement en loi de puissance sur une certaine plage d'échelles, en se fondant simplement sur les visibilitées. Pour simplifier, on se place dans le cas d'une fonction de poids uniforme, mais le raisonnement peut s'appliquer, sous réserve de quelques modifications, au cas des poids naturels. Les points non mesurés dans le plan (u, v) peuvent être considérés comme appartenant à un anneau caractérisé par des rayons intérieur et extérieur égaux à $k \pm \Delta k/2$. Si l'on ne se place pas à des fréquences spatiales trop petites ou trop grandes⁸, cet anneau contient alors un nombre p non nul de pixels où les visibilitées ont été mesurées, et un nombre q de pixels où elles ne l'ont pas été, comme le schématise la figure XVI.11.

L'hypothèse d'isotropie consiste à supposer que les amplitudes des coefficients de Fourier associés à ces $p+q$ pixels sont toutes identiques. Les poids étant uniformes, cela revient à supposer que les visibilitées mesurées

⁷Ce qui ne surprendra pas le lecteur familier des problèmes liés à la déconvolution.

⁸Les fréquences spatiales limites correspondent aux espacements minimal et maximal entre deux antennes.

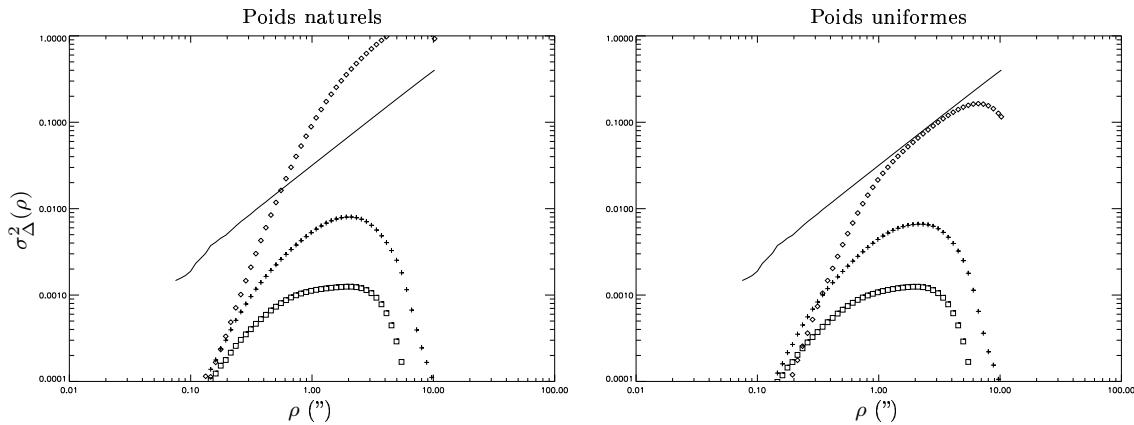


FIG. XVI.9 – Effet du filtrage spatial seul sur la Δ -variance. La figure de gauche correspond à une fonction de poids naturelle, celle de droite à une fonction de poids uniforme. Sur chaque figure, on présente les mesures faites sur les images filtrées par les trois configurations les plus compactes, F (losanges), E (croix) et D (carrés). La Δ -variance associée à la distribution de brillance initiale, qui est toujours celle correspondant à $\beta = 3, 1$, est présentée en trait plein.

en ces points sont toutes égales, ce qui doit pouvoir être vérifié tout au moins sur les p mesures disponibles. La contribution de ces p pixels à la Δ -variance calculée sur les images filtrées est connue, puisqu'elle est donnée par le biais de l'équation (84). Il suffit de la multiplier par le facteur de normalisation $(p + q)/p$ et d'additionner les contributions des différents anneaux pour construire la Δ -variance associée à une image filtrée par une couverture complète entre les deux fréquences spatiales limites⁹. C'est ce que montre la figure XVI.12. On voit qu'en comparant les reconstructions obtenues pour les différentes configurations, on peut retrouver, sur une plage non négligeable d'échelles, l'évolution de la Δ -variance du modèle de distribution de brillance, et donc l'indice spectral β de cette dernière.

Prise en compte des effets combinés du lobe primaire et du filtrage spatial

Les images en sortie du simulateur sont affectées par les deux effets discutés précédemment. La figure XVI.13 montre l'évolution avec l'échelle de la Δ -variance calculée sur les différentes images filtrées. On remarque que les courbes ont sensiblement la même forme que sur la figure XVI.9, mais qu'elles sont globalement décalées vers le bas, comme on peut le comprendre en observant l'effet du lobe primaire sur la figure XVI.8. La reconstruction dans le cas des poids uniformes est quant à elle présentée sur la figure XVI.14. On y observe également, comme sur la figure XVI.12, le comportement en loi de puissance permettant de remonter à l'indice spectral de la distribution de brillance initiale.

XVI.4.d Quelques critiques

Manifestement, cette méthode de détermination de l'indice spectral est moins efficace que celle fondée directement sur le spectre de puissance, puisqu'il est nécessaire de faire une hypothèse sur ce dernier pour retrouver le comportement en loi de puissance de la Δ -variance permettant de remonter à β . L'intérêt de cette approche, comparée au calcul du spectre de puissance, réside pour les observateurs dans le fait qu'elle n'impose pas de transformation de Fourier sur des cartes non-périodiques. Or ce problème ne se pose pas dans nos simulations, puisque les modèles de distribution de brillance sont précisément périodiques, et il ne se pose en fait pas dès qu'il s'agit d'interférométrie, étant donné que l'on travaille directement dans l'espace de Fourier. On aurait plutôt tendance à penser que c'est en passant dans l'espace réel qu'on se heurte à des difficultés, liées au problème de la déconvolution. C'est d'ailleurs ce à quoi nous avons été

⁹En pratique, comme les différents pixels appartenant à un anneau donné ne sont pas tous à la même distance de l'origine, les valeurs du spectre de puissance sont légèrement différentes d'un pixel à l'autre. On affecte alors aux pixels non mesurés la moyenne des valeurs mesurées.

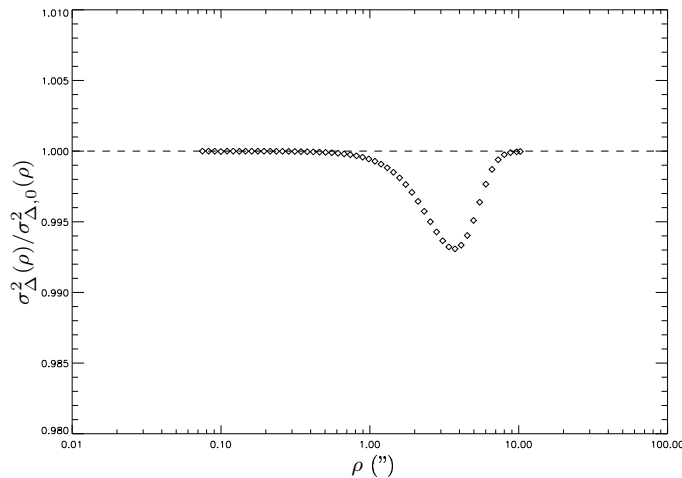


FIG. XVI.10 – Rapport des Δ -variances mesurées d'une part sur la distribution de brillance $\beta = 3,1$ filtrée par une couverture complète sauf en un point, et d'autre part sur l'image initiale.

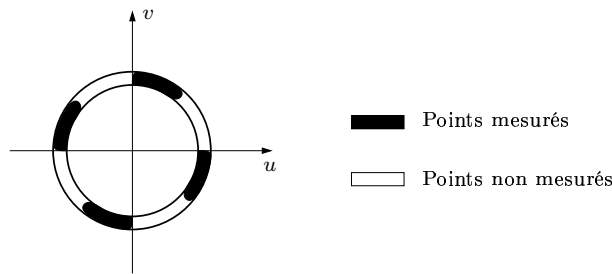


FIG. XVI.11 – Schéma du principe de la méthode de renormalisation décrite dans le texte. L'anneau compris entre les nombres d'onde $k - \Delta k/2$ et $k + \Delta k/2$ est séparé en régions pour lesquelles on dispose de mesures de visibilité (en noir) et pour lesquelles on n'a pas d'information (en blanc). Dans le cadre de l'hypothèse d'isotropie, la contribution de l'ensemble de l'anneau à la Δ -variance de l'image non dégradée est proportionnelle à sa contribution à la Δ -variance de l'image filtrée, le facteur de proportionnalité étant le rapport de l'aire totale de l'anneau à l'aire des régions noires.

confrontés dès lors qu'il a fallu remplir les trous de la couverture (u, v) . Inversement, il suffit de moyenner azimuthalement les visibilités¹⁰ pour obtenir une estimation fiable de l'indice spectral, comme l'a montré la section XVI.3.b. On peut donc en conclure que, dans le cadre de l'interférométrie, la Δ -variance n'apporte rien de plus que les visibilités, en ce qui concerne la détermination des propriétés structurelles des champs observés.

XVI.5 Les fonctions de structure

XVI.5.a Introduction

Étant donné que la définition des champs browniens fractionnaires, qui nous servent ici de modèles de distribution de brillance, fait intervenir la fonction de structure d'ordre deux, il n'est pas déraisonnable de chercher à évaluer cet outil de caractérisation des structures dans le cadre du filtrage interférométrique. Comme l'a montré l'étude des implémentations numériques de ces champs au VII.4.c, les fonctions de structures grossières d'ordre deux (voir le V.6.b) donnent bien un comportement en loi de puissance, l'exposant étant légèrement différent de l'exposant de Hurst attendu (voir les figures VII.5 et VII.6). La question qui se pose bien entendu ici est de savoir comment se comportent les fonctions de structure

¹⁰Après avoir divisé par la fonction de poids.

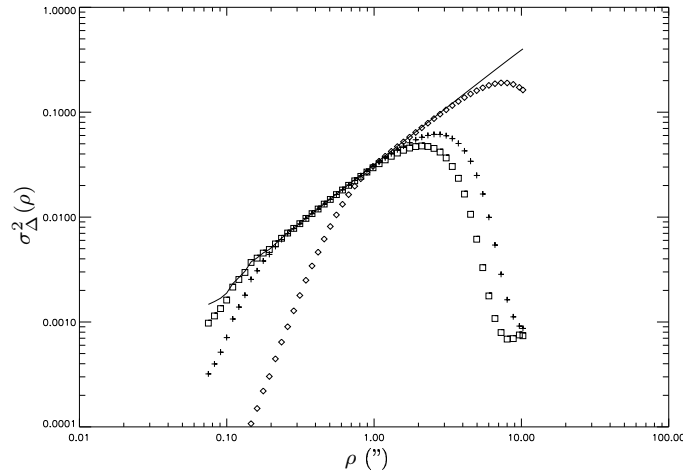


FIG. XVI.12 – “Reconstruction” de la Δ -variance de l’image initiale par la procédure de renormalisation décrite dans le texte. Les différentes courbes correspondent aux images filtrées spatialement par l’instrument dans les configurations F (losanges), E (croix) et D (carrés). La courbe en trait plein montre l’évolution de la Δ -variance du modèle de distribution de brillance.

grossières quand on les applique aux images filtrées par l’interféromètre, et si l’on peut remonter à l’exposant de Hurst par cette voie, quitte à devoir calibrer numériquement la relation entre celui-ci et l’exposant mesuré, comme le suggère en définitive la figure VII.6.

Cependant, le temps de calcul de l’estimation numérique des fonctions de structure pour l’ensemble des images filtrées est absolument prohibitif, du fait de la grande taille des champs considérés. Pour s’en tirer, il est possible de considérer des versions des images sales qui soient plus manipulables, et qu’on obtient en effectuant un rééchantillonnage des cartes sur des grilles plus petites, de taille 256×256 . La figure XVI.15 montre que, ce faisant, on ne perd pas l’information essentielle fournie par la fonction de structure d’ordre deux. En considérant la distribution de brillance associée à l’indice spectral $\beta = 3, 1$, et en calculant la fonction de structure grossière d’ordre deux, d’une part sur l’image complète et d’autre part sur sa version rééchantillonnée, on obtient le même comportement en loi de puissance. En fait, tenant compte de la taille réelle des pixels, on voit qu’on retrouve les mêmes valeurs, ce qui n’est pas surprenant, étant donné que les fonctions de structure grossières sont justement calculées à chaque échelle en rééchantillonnant les images sur des grilles de plus en plus petites. Par ailleurs, même si l’on n’observait pas cette identité, il ne serait pas insensé de calculer les fonctions de structure sur les versions modifiées des cartes sales, à condition de garder à l’esprit qu’il faudrait alors nécessairement voir les résultats obtenus comme une calibration numérique de cette méthode, les exposants de Hurst théoriques étant connus par construction.

En définitive, il est donc parfaitement justifié de se fonder sur les versions rééchantillonnées des images initiales et des images sales pour étudier les propriétés des fonctions de structure vis-à-vis du filtrage interférométrique.

XVI.5.b Étude numérique

Pour chacune des images filtrées, correspondant aux 21 indices spectraux considérés, aux trois configurations et aux deux fonctions de poids, on construit la fonction de structure grossière d’ordre deux, telle qu’on l’a décrite au V.6.b. À titre d’exemple des résultats obtenus, la figure XVI.16 montre le cas de la distribution de brillance associée à $\beta = 3, 1$. On remarque notamment que les valeurs calculées en considérant la configuration la plus compacte sont plus élevées dans le cas des poids naturels que dans le cas des poids uniformes, ce qu’on avait déjà observé dans le cadre de l’étude de la Δ -variance et du spectre de puissance. Les courbes associées aux configurations E et D sont, elles, pratiquement indépendantes du choix de la fonction de poids, comme on l’a expliqué plus haut. Quant au lobe primaire, son effet est clairement d’abaisser les valeurs des fonctions de structure d’ordre deux, ce qui s’interprète également à partir de ce qui a déjà été dit, en notant que celles-ci sont liées linéairement aux fonctions d’autocorrélation et donc aux spectres de puissance.

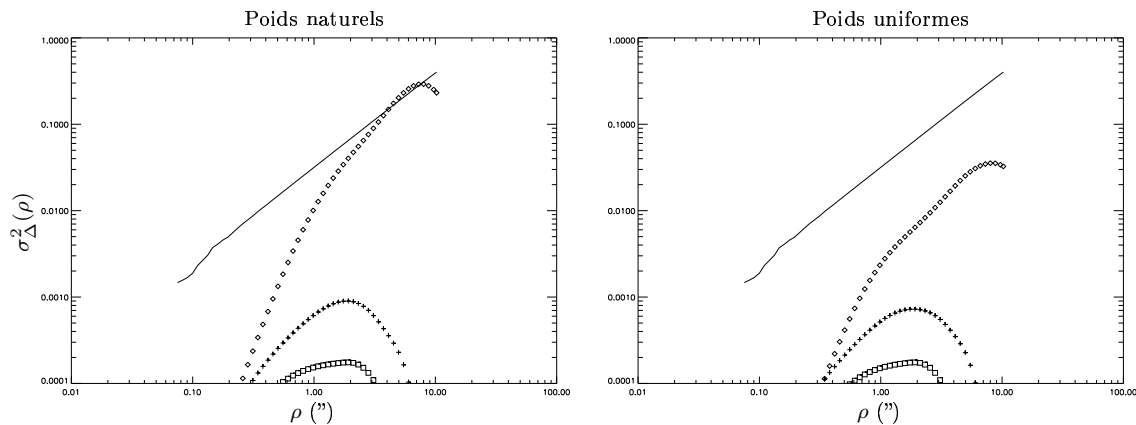


FIG. XVI.13 – Effets combinés du lobe primaire et du filtrage spatial sur la Δ -variance. La figure de gauche correspond à une fonction de poids naturelle, celle de droite à une fonction de poids uniforme. Les notations sont les mêmes que celles de la figure XVI.9.

En ce qui concerne l'évolution de ces fonctions de structure d'ordre deux avec l'échelle spatiale, il est difficile de distinguer un domaine sur lequel on observerait un comportement en loi de puissance, en particulier lorsqu'on s'intéresse aux configurations les moins compactes, E et D, car le manque de mesures aux espacements courts, et donc aux grandes échelles, se traduit par une cassure des courbes laissant peu de marge pour un ajustement fiable. Inversement, la configuration la plus compacte est défaillante aux plus petites échelles, ce qui apparaît notamment sur le panneau de la figure XVI.16 correspondant au cas des poids uniformes et sans atténuation par le lobe primaire. L'accentuation de la pente aux petites échelles s'interprète ainsi comme l'effet d'une cassure due au manque d'information sur ces échelles. Si l'on souhaite obtenir un exposant de Hurst expérimentalement malgré ces difficultés, il faut donc restreindre la plage d'échelles sur laquelle on fait un ajustement de loi de puissance, en fonction de la configuration considérée. Étant donné ce qu'on observe sur la figure XVI.16, il semble raisonnable de se limiter aux échelles comprises entre 0,5'' et 2'' pour la configuration F, et aux échelles inférieures à 1'' et à 0,5'', respectivement, pour les configurations E et D. Cette même figure montre d'ailleurs les ajustements obtenus, ainsi que les exposants de Hurst qu'on en déduit.

En procédant de cette façon pour l'ensemble des images filtrées par l'interféromètre, on construit, sur la figure XVI.17, l'évolution des exposants de Hurst H_m mesurés, en fonction de l'exposant théorique H , lequel est relié à l'indice spectral par $\beta = 2H + 2$ en dimension deux. On remarque notamment que les courbes associées aux différents cas de figure considérés présentent toutes le même défaut, à savoir que les exposants sont systématiquement surestimés lorsque H est *grosso modo* inférieur à 0,5 et systématiquement sous-estimés lorsque H est supérieur à 0,5. Le premier effet doit être attribué à la limite de résolution des observations, qui impose une taille minimale des structures observables et donc une limite inférieure à l'exposant de Hurst. Le second a déjà été observé sur les champs modèles, comme on peut le voir sur la figure VII.6. D'autre part, il apparaît que plus une configuration est compacte, plus les valeurs mesurées de l'exposant de Hurst sont importantes, ce qu'on peut comprendre en disant que ces configurations mesurant moins bien les petites échelles, elles ont tendance à fournir des images plus lisses et donc des exposants de Hurst plus élevés. Cet effet est flagrant dans le cas d'une fonction de poids naturelle, qui donne plus d'importance encore aux espacements les plus courts. Réciproquement, le passage à une fonction de poids uniforme ne modifie que peu les courbes associées aux configurations moins compactes E et D. La prise en compte de l'atténuation par le lobe primaire ne semble en revanche pas modifier globalement les courbes, mais elle les affecte de façon plus chaotique, ce qui rend l'interprétation difficile.

XVI.5.c Conclusions

À la vue de l'étude précédente, il semble par conséquent que l'utilisation des fonctions de structure, en tant qu'outil de détermination directe de l'indice spectral d'une distribution de brillance observée par un

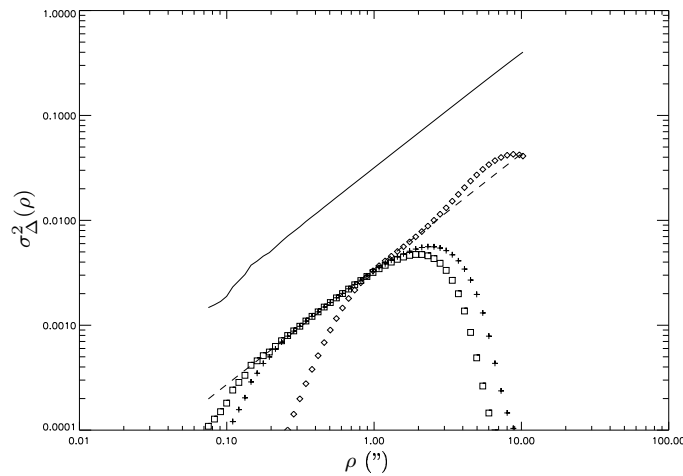


FIG. XVI.14 – “Reconstruction” de la Δ -variance de l’image initiale par la procédure de renormalisation décrite dans le texte. Les différentes courbes correspondent aux images atténuées par le lobe primaire puis filtrées spatialement par l’instrument dans les configurations F (losanges), E (croix) et D (carrés), et en utilisant une fonction de poids uniforme. La courbe en trait plein montre l’évolution de la Δ -variance du modèle de distribution de brillance, qui est toujours celui associé à $\beta = 3, 1$, et les tirets représentent une loi de puissance d’exposant 1,1, comme celle attendue théoriquement.

interféromètre, soit peu fiable, étant donnés les écarts observés entre les exposants de Hurst mesurés sur les différentes images sales et les valeurs théoriques. On peut cependant envisager d’utiliser les courbes de la figure XVI.17 comme abaques numériques, pour déduire indirectement l’indice spectral des cartes observées. Il faut cependant remarquer que ces courbes ne représentent qu’une petite partie des paramètres observationnels possibles, ne serait-ce que parce que les configurations réelles des instruments ne sont *a priori* pas celles utilisées ici, que les lobes d’antenne ont des tailles variables suivant la longueur d’onde, ou encore que les fonctions de poids peuvent être différentes. Il ne paraît donc pas particulièrement utile de poursuivre l’étude dans cette direction.

XVI.6 La dimension fractale

XVI.6.a Nécessité d’un rééchantillonnage des images

Dans la deuxième partie, on a parlé du concept d’ensemble fractal et on a remarqué que les structures complexes observées dans le milieu interstellaire pouvaient être étudiées par ce biais, en leur attribuant une dimension fractale. On a notamment vu, au VII.4.c, que les isocontours des champs browniens fractionnaires possédaient une dimension $D = n - H$ où n est la dimension de l’espace dans lequel ils sont définis. Le calcul de cette dimension fractale, dans le cas bidimensionnel, par la méthode périmètre-surface décrite également au VII.4.c, doit donc *a priori* permettre de remonter à l’exposant de Hurst et par conséquent à l’indice spectral des structures observées. Cependant, comme c’était déjà le cas à la section précédente, le calcul de la dimension fractale d’une image 1024×1024 est beaucoup trop long¹¹ pour envisager de le faire tel quel sur l’ensemble des 126 images sales dont on dispose. On peut contourner cette difficulté de la même façon, en rééchantillonnant les images sur des grilles plus petites, de taille 128×128 , et en utilisant ces versions “dégradées” pour calculer les dimensions fractales auxquelles on s’intéresse. Le gain de temps est significatif¹² et rend ainsi possible cette étude.

Il faut néanmoins vérifier auparavant qu’on ne perd pas d’information en procédant de cette manière. C’est ce que montre la figure XVI.18 en comparant les périmètres et les aires des “nuages” obtenus par seuillage sur la distribution de brillance associée à l’indice spectral $\beta = 3, 1$ et sur la version rééchantillonnée de cette même image. On constate que les points correspondant à ces deux cas suivent chacun une loi de

¹¹ Environ quatorze heures sur un portable équipé d’un processeur à 2 GHz et de 470 Mo de mémoire, en activant l’ensemble des options du calcul et avec cinquante niveaux de seuillage.

¹² Dans les mêmes conditions que précédemment, le temps de calcul est ramené à cinq minutes. Cette différence suggère d’ailleurs que l’algorithme est probablement loin d’être optimal.

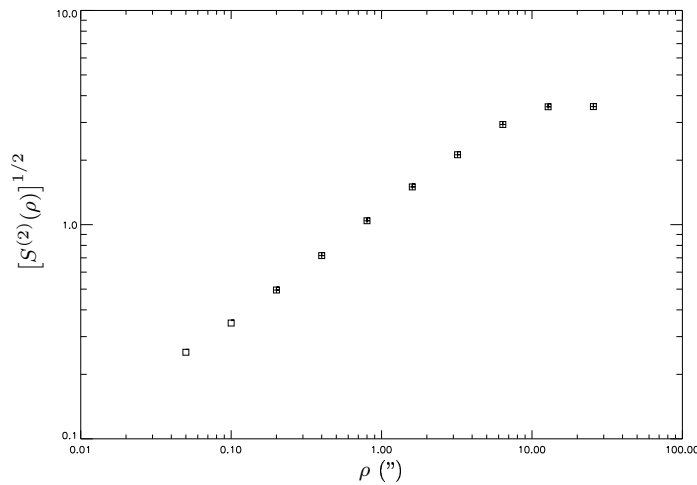


FIG. XVI.15 – Comparaison des fonctions de structure grossières d'ordre deux calculées sur la version originale 1024×1024 (carrés) de la distribution de brillance associée à $\beta = 3,1$ et sur la version rééchantillonnée 256×256 (croix) de cette même distribution de brillance.

puissance, dont les exposants respectifs donnent des dimensions fractales sensiblement identiques. Ce qui peut sembler plus étonnant à première vue, c'est que les deux nuages de points ne sont pas alignés l'un avec l'autre, alors qu'on s'attendrait à ce que ce soit le cas. C'est oublier que la propriété des isocontours fractals est d'avoir un périmètre qui augmente "plus vite que prévu" lorsqu'on se place à une résolution plus fine. L'exemple de l'île de von Koch (voir la figure VI.3), dont le périmètre tend vers l'infini tandis que l'aire reste finie, est en cela typique. Il n'est donc pas surprenant qu'à une aire donnée, on trouve un périmètre en moyenne plus grand pour la version 1024×1024 que pour la version 128×128 . Cette remarque étant faite, il convient avant tout de noter que la propriété souhaitée, à savoir la conservation de la dimension fractale lors du rééchantillonnage, est bien vérifiée, ce qui permet d'étudier numériquement l'effet du filtrage sur cet outil de caractérisation des structures.

XVI.6.b Étude numérique systématique

On calcule ainsi les dimensions fractales D de l'ensemble des images sales obtenues en sortie du simulateur, et on en déduit des exposants de Hurst expérimentaux $H_m = 2 - D$, à comparer aux valeurs théoriques des distributions de brillance initiales. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure XVI.19, regroupés suivant la présence ou non d'atténuation par le lobe primaire et la fonction de poids utilisée.

Ce qu'on remarque immédiatement sur ces figures, c'est l'échec complet des configurations les moins compactes, E et D, quand on se place à des exposants de Hurst théoriques relativement éloignés de zéro. Si l'on essaie de déterminer cet exposant à partir de ces configurations, on obtiendra systématiquement une valeur faible, même si l'exposant de Hurst initial est en fait proche de l'unité. Ceci s'explique par le trou dans la couverture (u, v) que ces configurations laissent au voisinage de l'origine du plan de Fourier. L'inspection visuelle des images obtenues dans ces conditions de filtrage, comme on en a présenté sur la figure XVI.3, montre d'ailleurs que les seules structures restantes sont de petite taille caractéristique, de sorte que, du point de vue de la dimension fractale, la distribution de brillance en sortie présente des isocontours très découpés, de dimension proche de 2, d'où un exposant de Hurst expérimental toujours proche de zéro. On note d'ailleurs, comme on l'avait déjà remarqué au sujet des fonctions de structure grossières d'ordre deux, que les exposants de Hurst mesurés sont d'autant plus grands que la configuration considérée est plus compacte.

En ce qui concerne plus particulièrement la configuration F, qui est la plus compacte, on observe le même genre de défaut que pour la distribution de brillance initiale, à savoir une surestimation de l'exposant de Hurst lorsque celui-ci tend vers zéro et, inversement, une sous-estimation systématique quand l'exposant de Hurst théorique tend vers un. Ces effets ont déjà été discutés plus haut, et on rappelle qu'il faut y voir respectivement la manifestation de la finitude des rayons extérieur et intérieur de la couverture (u, v) . Enfin, il semble que l'atténuation par le lobe primaire se traduise, comme dans le cas de l'utilisation des fonctions de structure, par un bruit difficilement interprétable.

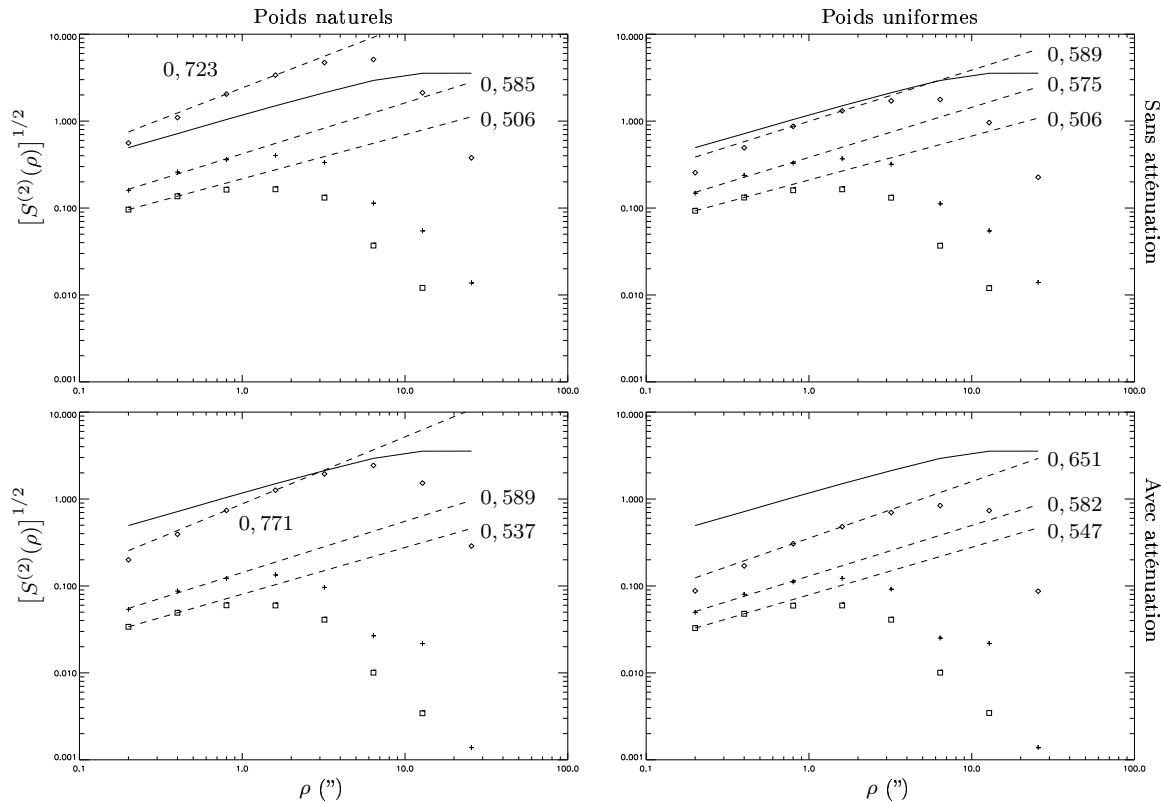


FIG. XVI.16 – Fonctions de structure grossières d’ordre deux calculées sur les images filtrées obtenues à partir de la distribution de brillance modèle $\beta = 3,1$. La première ligne correspond au cas sans atténuation par le lobe primaire, la seconde au cas où cette atténuation est prise en compte. Les deux colonnes correspondent aux deux fonctions de poids, comme indiqué. En ce qui concerne les configurations, les notations sont identiques à celles de la figure XVI.14, à savoir des losanges pour la configuration F, des croix pour la configuration E et des carrés pour la configuration D. La courbe en trait plein représente la fonction de structure calculée sur la distribution de brillance initiale. Les tirets indiquent les ajustements de lois de puissance décrits dans le texte. Les exposants de Hurst correspondants sont indiqués en regard.

XVI.6.c Conclusions

La détermination de la propriété essentielle des distributions de brillance modèles introduites en entrée du simulateur interférométrique, à savoir l’indice spectral β ou, de manière équivalente, l’exposant de Hurst H , ne semble pas être facilitée par l’utilisation de la dimension fractale, telle qu’employée ici. En effet, de manière encore plus flagrante que ce qu’on avait remarqué au sujet des fonctions de structure grossières d’ordre deux, on observe des écarts importants entre les valeurs mesurées et les valeurs théoriques, et ce d’autant plus que la configuration instrumentale considérée est étendue, car les grandes structures éventuellement présentes dans les cartes initiales¹³, sont alors complètement filtrées. En cela, la dimension fractale ainsi calculée est même moins efficace encore que les fonctions de structure de la section précédente, car ces dernières permettaient une estimation, même grossière, de l’exposant de Hurst quelle que soit la configuration du réseau d’antennes, ce que ne semble pas permettre la relation périmètre-surface dans le cas des configurations les moins compactes, qui donnent systématiquement une valeur de H_m inférieure à 0,3 environ. Il apparaît donc également difficile de poursuivre l’étude du filtrage interférométrique en se fondant sur la dimension fractale.

¹³Structures qui sont essentielles à la détermination de la dimension fractale, puisqu’elles fournissent les “nuages” de grand périmètre et de grande aire.

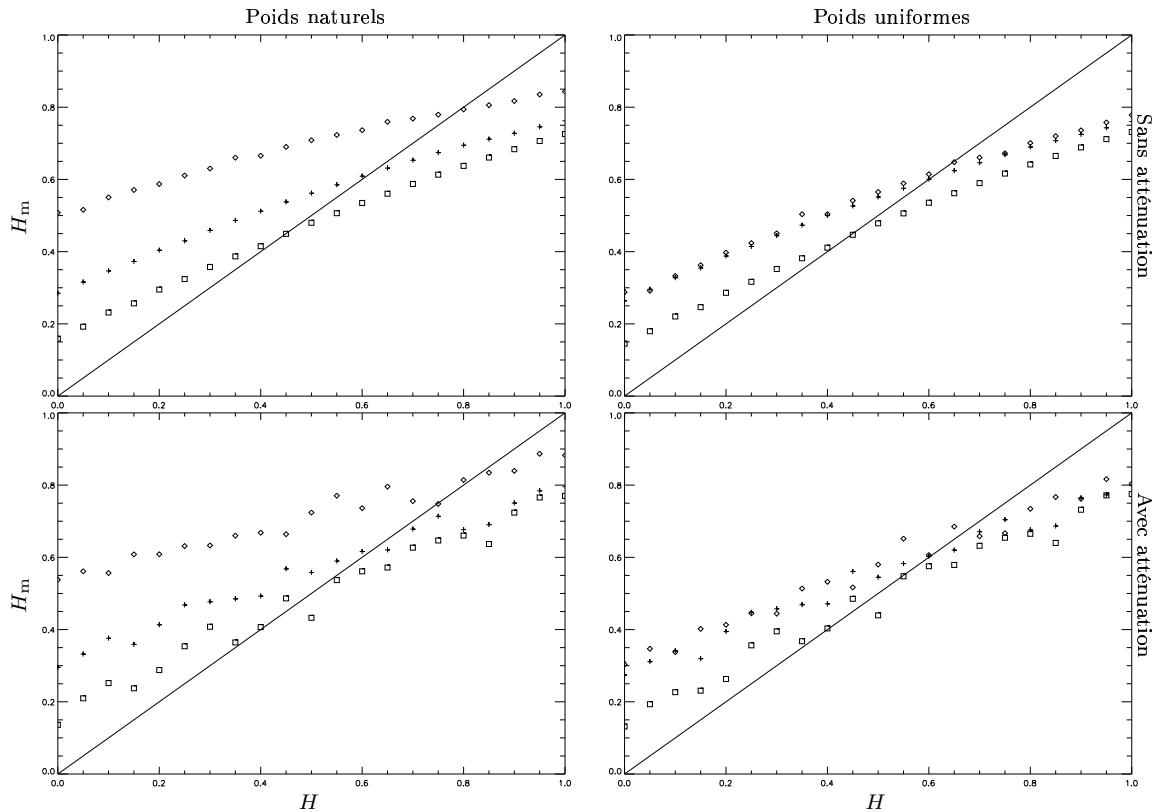


FIG. XVI.17 – Évolution des exposants de Hurst H_m mesurés par les fonctions de structure grossières d'ordre deux, en fonction des valeurs théoriques. La disposition des sous-figures ainsi que les symboles utilisés sont les mêmes que sur la figure XVI.16.

XVI.7 Retour sur le spectre de puissance : le cas bruité

XVI.7.a Introduction de bruit

En définitive, la détermination la plus efficace de l'indice spectral de la distribution de brillance initiale est également la plus simple, puisqu'il suffit d'effectuer un ajustement en loi de puissance sur la moyenne azimutale du spectre de puissance des cartes sales, qu'on obtient à partir du rapport des visibilitées à la fonction de poids. Dans les conditions utilisées ici, l'effet du lobe primaire est suffisamment localisé dans l'espace de Fourier pour ne pas perturber cette approche, comme on l'a montré sur la figure XVI.5. Ceci étant établi, il convient maintenant de se pencher sur la fiabilité de cet outil vis-à-vis des perturbations qu'on peut introduire dans la chaîne de filtrage. Autrement dit, il s'agit en pratique de déterminer quel est le niveau de bruit maximal permettant malgré tout de remonter à l'indice spectral β par le biais du spectre de puissance des cartes sales.

La modélisation réaliste du bruit affectant les données interférométriques mériterait qu'on s'y attarde longuement, mais nous nous contenterons d'en discuter certains aspects, avant de l'introduire de façon extrêmement simplifiée dans nos simulations. Comme on l'a dit au XIV.5.d, le bruit sur les visibilitées peut se modéliser par une contribution multiplicative et une contribution additive, en écrivant que les visibilitées observées V' sont reliées aux vraies visibilitées V par $V' = \epsilon_m V + \epsilon_a$. Bien entendu, cela ne suffit pas à préciser la forme du bruit, et il faut se donner les propriétés de ϵ_m et de ϵ_a . Initialement, le bruit introduit dans la chaîne de filtrage l'est au niveau des signaux encore non corrélés [Massi & Comoretto, 1990], de sorte qu'on doit en fait écrire que la visibilité observée V'_{ij} correspondant à la ligne de base entre les antennes i et j est reliée à la vraie visibilité V_{ij} par

$$V'_{ij} = \epsilon_i \epsilon_j V_{ij} + \sigma_{ij},$$

où ϵ_i et ϵ_j sont des complexes dont l'amplitude est une variable aléatoire de moyenne 1 et dont la phase est

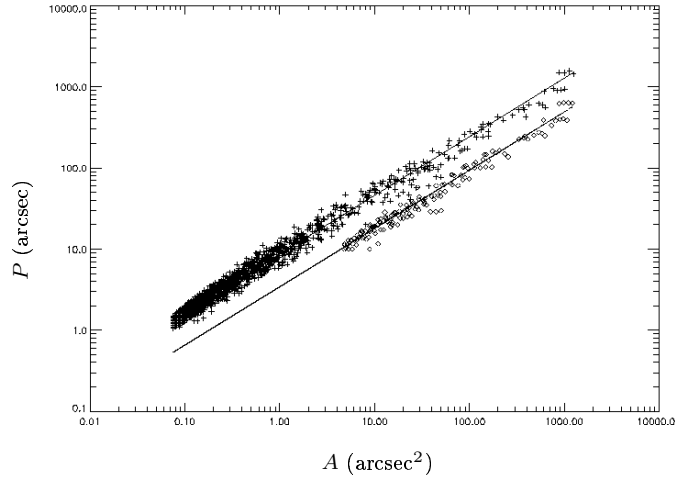


FIG. XVI.18 – Relations périmètre-aire établies pour la distribution de brillance associée à l'indice spectral $\beta = 3,1$ (croix) et pour sa version rééchantillonnée sur une grille 128×128 (losanges). Les dimensions fractales mesurées sont respectivement égales à $1,445 \pm 0,012$ et $1,437 \pm 0,019$.

également aléatoire. Le terme additif σ_{ij} représente quant à lui le bruit thermique, également complexe. Ainsi, une modélisation réaliste du bruit devrait affecter les signaux avant corrélation, antenne par antenne. Or, la façon dont est construit notre simulateur ne donne pas accès à cette étape de l'observation, puisqu'on part directement des visibilitées dans l'espace (u, v) sans passer par les signaux de chaque antenne. La réécriture du simulateur ne pourrait d'autre part se faire qu'au prix de gros efforts de calcul, car il est loin d'être trivial d'introduire cette étape de la chaîne de réception, surtout lorsqu'il s'agit de considérer 64 antennes. En conséquence, nous avons choisi d'introduire un bruit *ad hoc* dans le simulateur.

En se fondant sur l'équation $V' = \epsilon_m V + \epsilon_a$, il faut donc préciser les formes des bruits ϵ_m et ϵ_a . L'hypothèse la plus simple consiste à supposer qu'il n'existe en fait pas de bruit multiplicatif, soit $\epsilon_m = 1$, et que toutes les sources de bruit peuvent être modélisées par un simple bruit additif ϵ_a dont on va supposer qu'il s'agit d'une variable aléatoire gaussienne complexe. Autrement dit, la distribution en probabilité de l'amplitude de ϵ_a est une gaussienne centrée en zéro. La phase de ϵ_a est également aléatoire, et distribuée uniformément¹⁴ sur $[0, \pi]$. Le seul paramètre restant encore à déterminer est la largeur de la densité de probabilité de l'amplitude. Classiquement, le bruit affectant une cellule de l'espace (u, v) diminue lorsque le nombre de visibilitées tombant dans cette cellule augmente. Plus précisément, si l'on écrit explicitement la visibilité mesurée V' comme une somme de p visibilitées V'_k tombant dans la même cellule, on a, en notant V_k les visibilitées vraies et ϵ_k le bruit sur chacune d'elles,

$$V' = \sum_{k=1}^p V'_k = \sum_{k=1}^p (V_k + \epsilon_k) = V + \epsilon_a \quad \text{avec} \quad \epsilon_a = \sum_{k=1}^p \epsilon_k.$$

On sait qu'alors le bruit ϵ_a constitué de la somme des bruits indépendants ϵ_k - dont on suppose que les propriétés statistiques sont toutes les mêmes - a une amplitude en moyenne \sqrt{p} fois plus grande que celle de chaque ϵ_k . Par conséquent, lorsqu'on s'intéresse aux images obtenues en utilisant une fonction de poids uniforme, comme on le fera dans la suite, le bruit affectant chaque visibilité est distribué selon une gaussienne bidimensionnelle dont la largeur est inversement proportionnelle à la racine carrée des poids naturels. On jouera sur la constante de proportionnalité de façon à ajuster le rapport signal sur bruit¹⁵. La figure XVI.20 montre quelques exemples d'images bruitées construites par cette approche, en fonction de η et de la couverture (u, v) considérée. On remarque notamment que la taille caractéristique des structures de la carte de bruit, qu'on peut observer dans le cas $\eta = 0, 1$, dépend de la configuration, ce qui était attendu. Quand le rapport signal sur bruit augmente, les cartes bruitées tendent vers les cartes non bruitées, telles qu'on peut les voir sur la figure XVI.3.

¹⁴Sur $[0, \pi]$ plutôt que sur $[0, 2\pi]$ car on a pris une distribution de l'amplitude autorisant des valeurs négatives.

¹⁵Le rapport signal sur bruit η est défini dans l'espace image, comme le rapport entre les écarts-type respectifs de l'image non bruitée, à laquelle on a bien entendu accès, et de l'image du bruit seul.

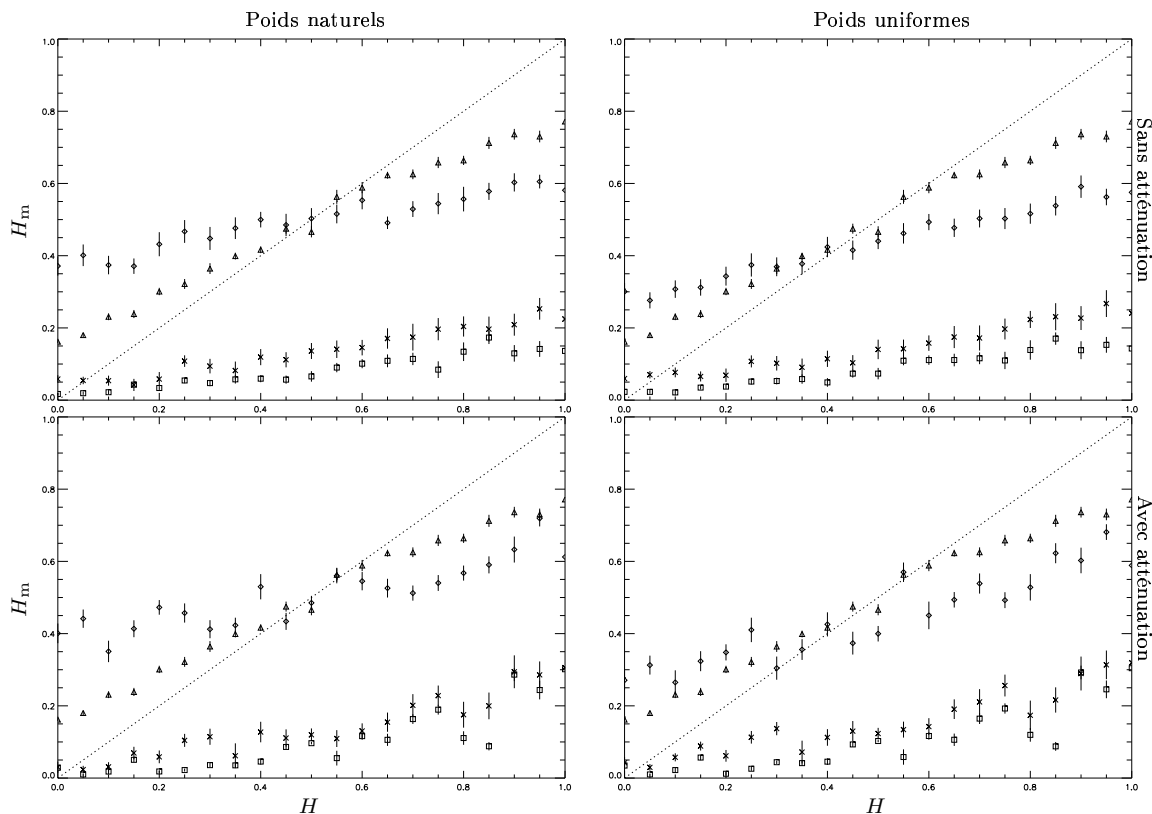


FIG. XVI.19 – Évolution des exposants de Hurst H_m mesurés par le biais de la dimension fractale, en fonction des valeurs théoriques. La disposition des sous-figures est la même que sur la figure XVI.17. Les différents symboles correspondent aux distributions de brillance initiales (triangles), aux images filtrées par la configuration F (losanges), par la configuration E (croix) et par la configuration D (carrés). La ligne pointillée représente l'identité entre les exposants théorique et expérimental. Chaque valeur mesurée est affectée d'une incertitude indiquée par des barres verticales.

XVI.7.b Effets sur le spectre de puissance

La figure XVI.21 montre les effets de différents niveaux de bruit sur les spectres de puissance des images correspondant aux deux configurations instrumentales les plus compactes. Dans tous les cas, on part de la distribution de brillance associée à l'indice spectral $\beta = 3,1$, atténuée par le lobe primaire, et on utilise les poids uniformes. On voit notamment que l'effet du bruit tend à aplatir le spectre de puissance aux plus petites échelles dans la carte, ce qui peut se comprendre en considérant les cartes de la figure XVI.20. Les structures qui apparaissent lorsque le bruit se met à dominer le signal sont effectivement plus petites que les structures de ce dernier. L'interprétation classique de cet effet consiste à remarquer que le bruit possède une distribution spectrale plate, son amplitude étant indépendante du vecteur d'onde. Lorsque le niveau du bruit augmente, c'est d'abord aux plus grands nombres d'onde, et donc aux plus petites échelles, que sa puissance devient plus importante que celle du signal, puisque celle-ci décroît lorsque k augmente. Lorsque le rapport signal sur bruit devient suffisamment grand, on retrouve, sur une plage d'échelles assez grande, un comportement en loi de puissance permettant de remonter à l'indice spectral de la distribution de brillance initiale. Sur la figure XVI.21, un rapport signal sur bruit $\eta = 8$ semble suffisant pour procéder ainsi, couverture par couverture, car en considérant la valeur immédiatement inférieure, soit $\eta = 4$, on ne dispose pas, dans le cas de la configuration F , d'échelles immunisées vis-à-vis du bruit. En ajustant une loi de puissance, on trouve ainsi une valeur de β égale à 2,6, sensiblement plus faible que la valeur cherchée. Comme on l'avait remarqué dans le cas non bruité, on obtient de bien meilleurs résultats en combinant les observations faites dans les trois configurations considérées. La figure XVI.22 montre ainsi les spectres de puissance des images bruitées regroupés non plus selon la couverture, mais selon le rapport signal sur

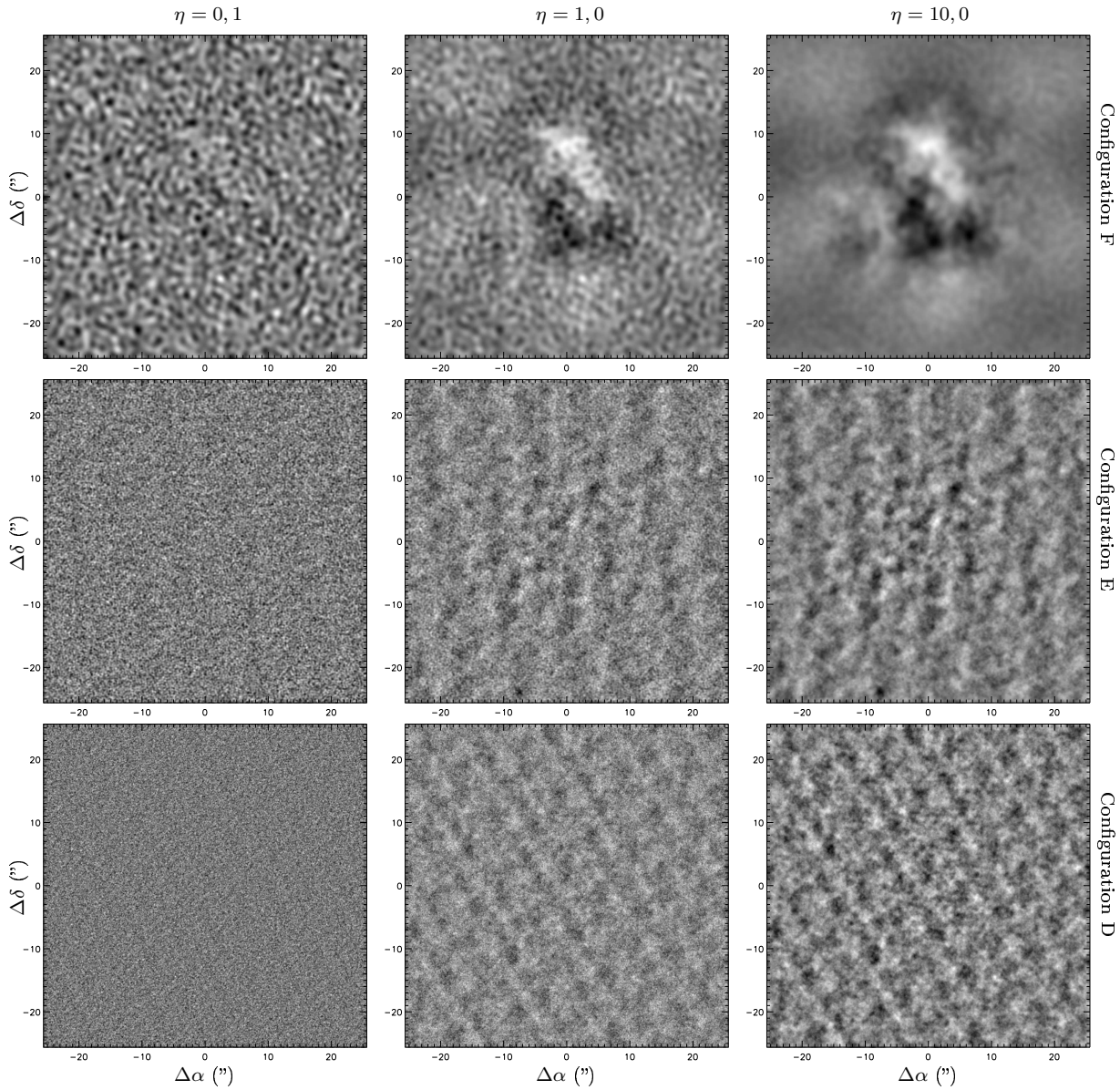


FIG. XVI.20 – Exemples de cartes bruitées obtenues par la méthode décrite dans le texte. Le rapport signal sur bruit est constant le long d'une colonne, et sa valeur est indiquée en haut de la figure. Chaque ligne correspond à une configuration instrumentale différente et la distribution de brillance initiale est celle associée à l'indice spectral $\beta = 3,1$.

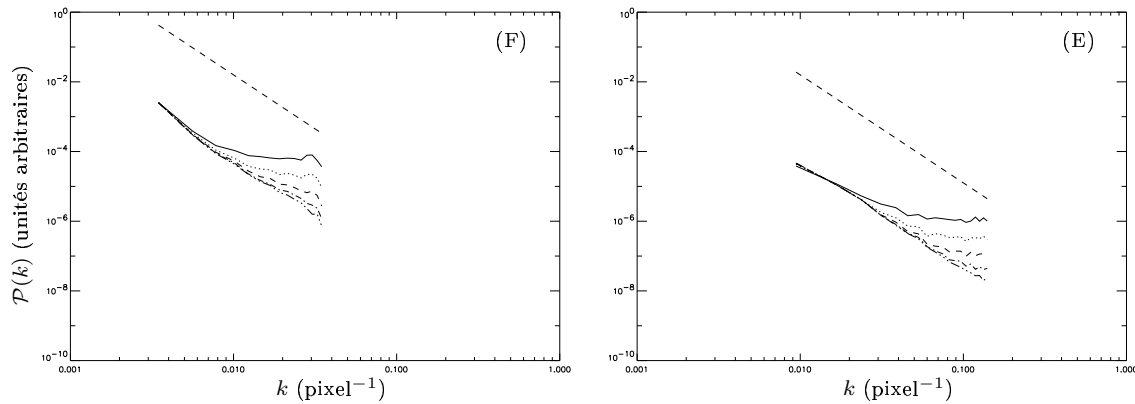


FIG. XVI.21 – Spectres de puissance des images bruitées correspondant à la distribution de brillance $\beta = 3,1$ atténuée par le lobe primaire, à la fonction de poids uniforme et aux configurations F (à gauche) et E (à droite). Les différents rapports signal sur bruit sont égaux à $\eta = 1$ (trait plein), $\eta = 2$ (pointillés), $\eta = 4$ (tirets), $\eta = 8$ (trait mixte) et $\eta = 16$ (trait mixte avec trois pointillés successifs). La droite en tirets montre une loi de puissance d'exposant $-3,1$.

bruit, compris entre $\eta = 1$ et $\eta = 8$. L'effet du bruit ne se manifeste pas aux mêmes échelles suivant la configuration considérée, car le rapport signal sur bruit dépend en fait de cette configuration puisqu'il est calculé sur les images sales. Par conséquent, lorsqu'on se fixe une certaine valeur de η , on a en fait des niveaux absolus de bruit différents sur chaque carte. Ceci ne retire rien à l'intérêt de l'analyse qui va suivre, car les cartes correspondant aux différentes configurations relèvent d'observations différentes, dont on peut régler le niveau de bruit en en choisissant la durée. Si l'on souhaite diminuer le bruit, il est *a priori* possible de le faire en observant plus longtemps, de sorte que la couverture soit mieux échantillonnée, et qu'ainsi plus de visibilités tombent dans chaque cellule. Le bruit est alors atténué d'un facteur inversement proportionnel à la racine carrée des poids naturels, comme on l'a déjà fait remarquer. On peut donc s'arranger pour que les niveaux de bruit absolus dans chaque configuration correspondent au même rapport signal sur bruit. L'étude de la figure XVI.22 montre alors qu'en superposant les spectres de puissance, moyennés azimutalement, des différentes images sales et en ignorant, sur chacun d'eux, les remontées dues au bruit, on retrouve un comportement en loi de puissance avec un exposant proche de l'indice spectral d'origine, et ce pour un rapport signal sur bruit égal à $\eta = 4$ ou plus. En ignorant complètement la configuration F, on peut même éventuellement considérer que le cas $\eta = 2$ est encore favorable. Il s'avère donc qu'on peut se contenter d'un rapport signal sur bruit assez faible, de l'ordre de quatre, pour retrouver l'indice spectral de la distribution de brillance en entrée du simulateur, à partir des cartes sales, à condition de combiner les données issues des différentes configurations, et en se restreignant aux nombres d'onde pour lesquels le bruit a une influence négligeable.

XVI.8 Conclusions

Ce chapitre a permis d'aborder la question de la réponse d'un interféromètre à un milieu complexe, dont la distribution de brillance est fractale, en utilisant certains des outils de caractérisation des structures dont on a discuté au cours de la deuxième partie, à savoir le spectre de puissance, la Δ -variance, les fonctions de structure d'ordre deux et la dimension fractale. Plus spécifiquement, il s'agissait d'établir lesquels de ces outils permettent de remonter à l'indice spectral de la distribution modèle observée. Après étude dans le cas non bruité, on constate que l'outil le plus direct et le plus simple, à savoir le spectre de puissance, est également le plus fidèle, puisqu'il suffit de moyenner azimutalement les visibilités brutes, corrigées de la fonction de poids, pour obtenir une bonne estimation de l'indice spectral cherché. On remarque d'ailleurs qu'en l'absence d'atténuation par le lobe primaire, cette méthode donne le bon résultat de manière exacte. En ajoutant du bruit, on a ensuite estimé qu'un rapport signal sur bruit $\eta \simeq 8$ était nécessaire pour retrouver, par cette méthode et avec une seule configuration instrumentale, l'indice spectral de la distribution de brillance modèle. La combinaison des spectres de puissance des cartes sales obtenues

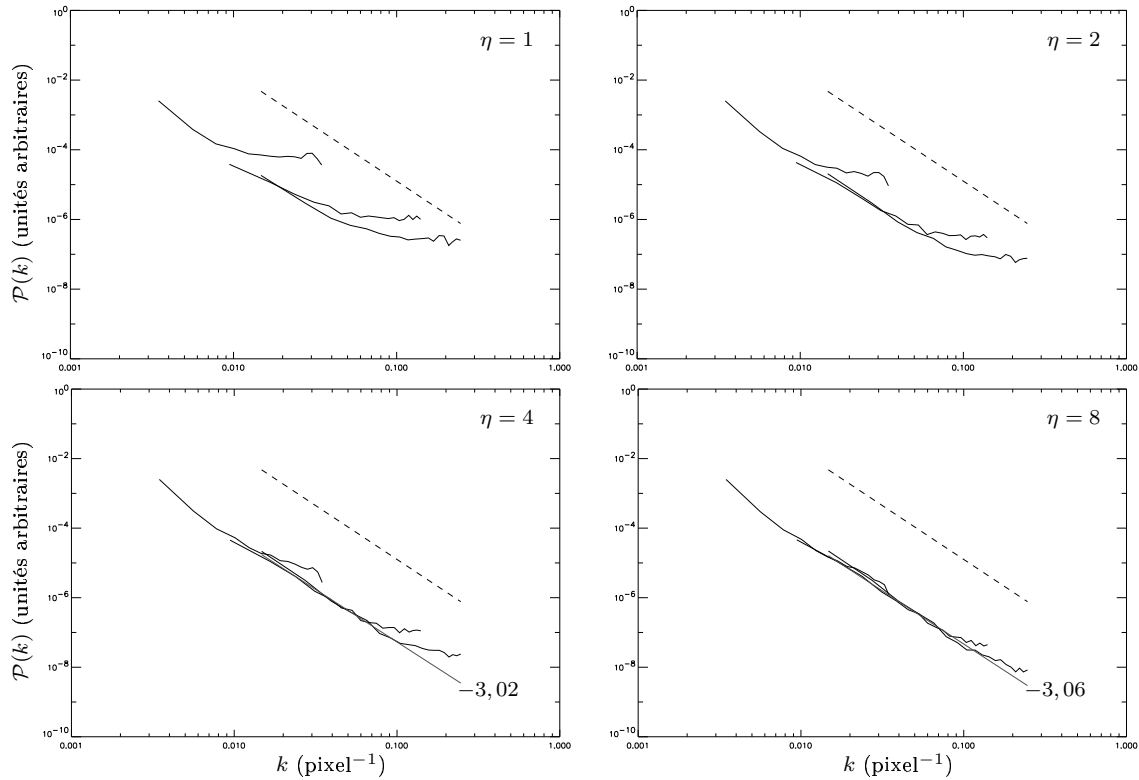


FIG. XVI.22 – Spectres de puissance des images bruitées, regroupés par valeur du rapport signal sur bruit, comme indiqué sur chaque sous-figure. Les courbes en trait plein représentent les spectres de puissance, moyennés azimutalement, des images sales construites à partir de la distribution de brillance $\beta = 3,1$ atténuée par le lobe primaire, en utilisant les configurations F , E et D , et une fonction de poids uniforme. La droite en tirets représente le comportement recherché, et sur les deux sous-figures du bas, on montre, par une droite grisée, l'ajustement obtenu selon la méthode décrite dans le texte. Les exposants de ces ajustements sont indiqués en regard.

en utilisant plusieurs configurations permet d'abaisser cette limite d'un facteur deux environ.

□

CHAPITRE XVII

Statistiques des incréments de phase

XVII.1 Mise en évidence du rôle de la phase

XVII.1.a Expérience numérique préliminaire

On a vu, dans le cadre de l'étude des centroïdes de vitesse et, à l'instant, du filtrage interférométrique, les outils statistiques généralement utilisés pour caractériser les structures présentes dans une image. On a d'ailleurs noté qu'ils étaient liés, en ce sens que, d'une part, la fonction d'autocorrélation et la fonction de structure d'ordre deux peuvent se déduire l'une de l'autre par une transformation linéaire, pourvu que le champ en question soit homogène, et d'autre part, le spectre de puissance est la transformée de Fourier de cette même fonction d'autocorrélation. Enfin, l'indice spectral β peut être relié de façon simple à l'exposant de la Δ -variance et à la dimension fractale. Ainsi, d'une manière ou d'une autre, ces outils sont tous fondés sur la mesure des amplitudes des coefficients de Fourier de l'image, en écartant l'information qui pourrait être présente dans leurs phases.

En réalité, cette approche est beaucoup trop limitative. En effet, chaque composante de Fourier représente une onde plane dans l'espace réel, et les structures effectivement observées sont issues de l'interaction de ces multiples ondes. Se contenter des outils tels que le spectre de puissance revient de fait à ignorer purement et simplement le phénomène d'interférence. On peut se convaincre aisément de l'importance des phases et de leur contenu informationnel, en considérant l'exemple présenté sur la figure **XVII.1**. On extrait d'abord l'amplitude et la phase d'un portrait de Joseph Fourier, en haut à gauche. On construit d'autre part une amplitude synthétique en loi de puissance dont l'exposant est obtenu par un ajustement du spectre de puissance de l'image de départ. Enfin, une phase synthétique est déduite de la phase originale par une redistribution spatiale des valeurs. Notons que cette redistribution se fait en assurant l'imparité de la carte de phase synthétique, de façon à ce que les images reconstruites soient réelles. À partir de ces deux amplitudes et de ces deux phases, on peut donc reconstruire quatre images, (a), (b), (c) et (d).

L'image (a), construite à partir de l'amplitude et de la phase originales, n'est autre que l'image de départ. L'image (b) est issue de la combinaison de la phase originale et de l'amplitude synthétique. On remarque que la structure de l'image originale y est très bien conservée, que ce soit aux grandes ou aux petites échelles. L'image (c), construite à partir de l'amplitude originale et de la phase synthétique, ne retient en revanche rien ou presque de la structure de départ, et est à peine distinguable de l'image (d), laquelle est entièrement synthétique.

XVII.1.b Importance de la distribution spatiale des phases

La comparaison des images (b) et (c) souligne l'importance de la phase dans la caractérisation des structures d'une image. Plus précisément, c'est la distribution spatiale de la phase qui semble contenir l'essentiel de l'information, puisque bien que les valeurs de la carte de phase synthétique soient strictement les mêmes que celles de la carte de phase originale, les images reconstruites à partir de la première ont perdu toute la structure d'origine. On voit d'ailleurs des structures cohérentes dans la carte de phase originale, structures qui sont bien entendu éliminées par la redistribution. C'est donc dans la distribution spatiale des phases qu'il faut chercher la caractérisation des structures, plutôt que dans la distribution des valeurs de ces phases. En fait, on peut voir sur la figure **XVII.2** que l'histogramme des phases du portrait de Fourier est très proche d'une distribution uniforme, et par conséquent indistinguable de l'histogramme des phases d'un champ brownien fractionnaire.

L'importance de la distribution spatiale des phases pour la caractérisation des structures n'est pas surprenante lorsqu'on se place à nouveau du point de vue de la superposition d'ondes planes. En un point \mathbf{k} de l'espace de Fourier, la composante $\hat{F}(\mathbf{k}) = A(\mathbf{k}) \exp[i\phi(\mathbf{k})]$ donne, dans l'espace réel, une onde plane de

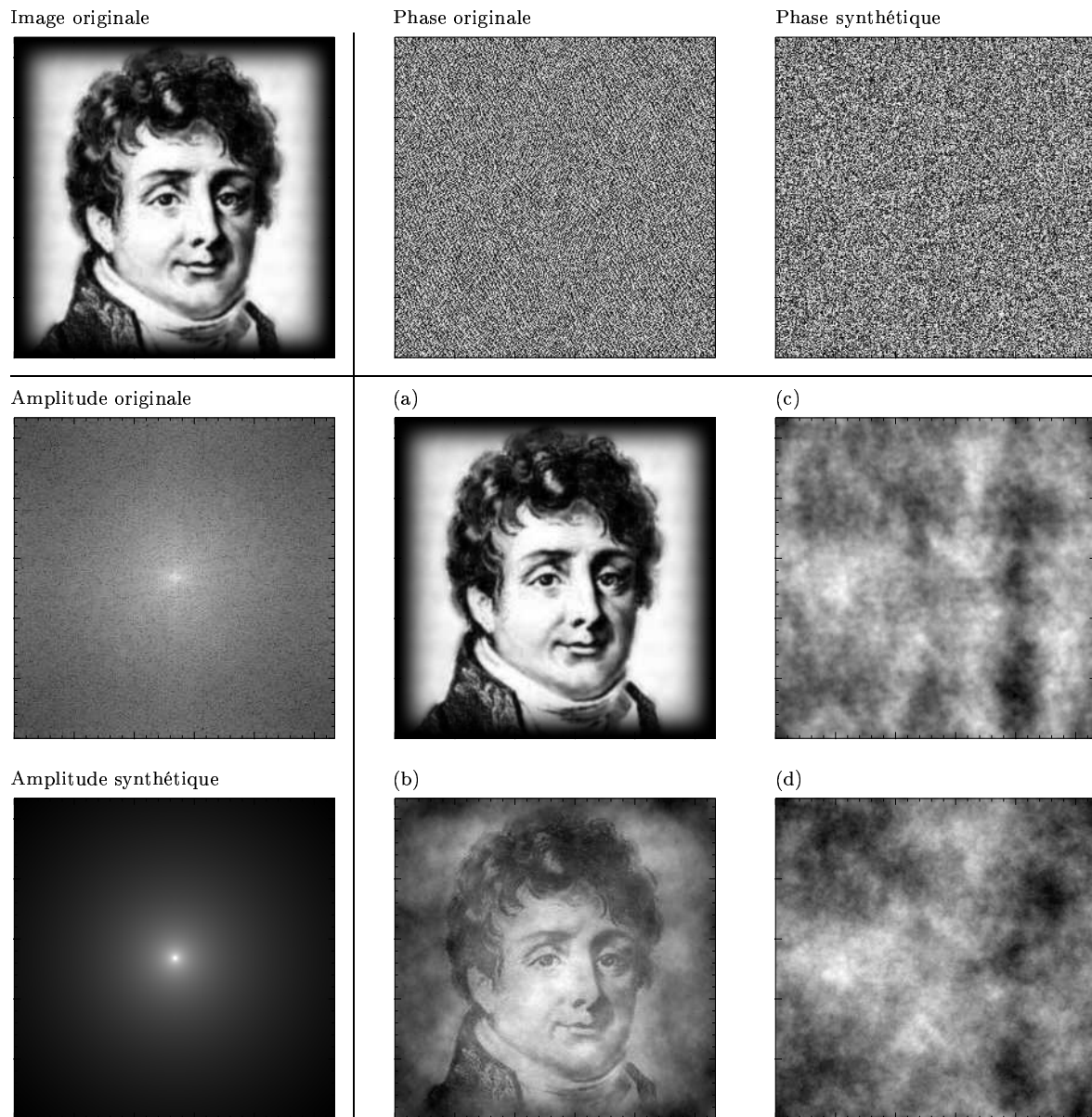


FIG. XVII.1 – Illustration de l'importance de la phase dans la structure d'une image. Les amplitudes sont représentées en échelle logarithmique, afin de faciliter la visualisation.

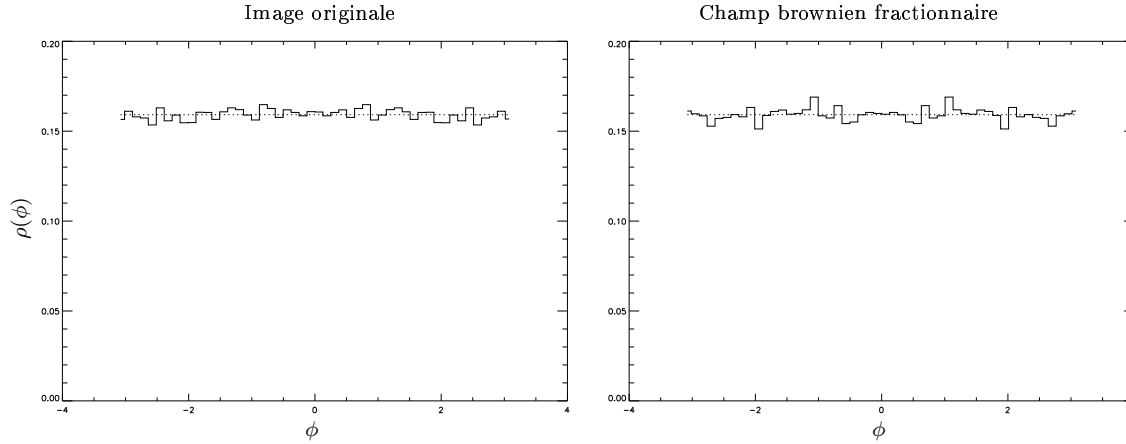


FIG. XVII.2 – Distribution des valeurs des phases dans le portrait de Fourier (à gauche) et dans un champ brownien fractionnaire de même taille (à droite). Le trait en pointillé représente la distribution uniforme sur $[-\pi, \pi]$.

vecteur d'onde \mathbf{k} , dont l'amplitude est $A(\mathbf{k})$ et dont la phase à l'origine des coordonnées est $\phi(\mathbf{k})$. L'image finale étant le résultat de l'interférence de toutes ces ondes, les relations entre les phases en deux points voisins ont une importance essentielle. En effet, en un point \mathbf{k}' proche de \mathbf{k} , les paramètres de l'onde (amplitude, direction, longueur d'onde) sont sensiblement les mêmes qu'en \mathbf{k} , à l'exception de la phase, laquelle peut varier brutalement, comme le montre la carte de la phase originale sur la figure XVII.1. Suivant alors que la différence des phases $\phi(\mathbf{k})$ et $\phi(\mathbf{k}')$ est plutôt proche d'un multiple pair ou impair de π , la structure dans l'image finale s'en trouvera respectivement fortement renforcée ou au contraire détruite. Comparativement, l'effet des ondes planes issues de régions plus éloignées de l'espace de Fourier est moins dépendant de la phase, soit parce que les échelles spatiales de variation sont très différentes, soit parce que les orientations des structures associées à ces ondes dans l'espace réel ne sont pas cohérentes.

XVII.2 Histogrammes des incréments de phase

XVII.2.a Introduction

Il ressort du paragraphe précédent qu'une caractérisation efficace des structures d'une image doit passer par une évaluation quantitative des propriétés de cohérence de la phase, par exemple au travers de ses incréments $\Delta\phi(\mathbf{k}; \delta)$ définis, pour un déplacement donné δ dans l'espace de Fourier, par

$$\Delta\phi(\mathbf{k}; \delta) = \phi(\mathbf{k} + \delta) - \phi(\mathbf{k}) \simeq \nabla_{\mathbf{k}}\phi \cdot \delta \quad \text{où } \nabla_{\mathbf{k}} \text{ est l'opérateur gradient dans l'espace de Fourier}$$

La dernière équation n'étant valable que pour des petits déplacements, dans l'approximation linéaire. Comme on peut le voir sur la figure XVII.3, la présence de structure dans la carte des phases se retrouve dans celles des incréments, et on peut espérer que les distributions des valeurs de ces cartes d'incréments nous renseigneront sur la présence de structure dans l'image de départ. Cette propriété a été remarquée pour la première fois par [Scherrer *et al.*, 1991], puis tout récemment étudiée par [Chiang & Coles, 2000], dans le cadre de l'étude du *clustering* à grande échelle sous l'effet de la gravité.

XVII.2.b Cas des champs browniens fractionnaires

Dans l'hypothèse où les valeurs des incréments de phase nous fourniraient un renseignement sur la structure d'une image, les champs browniens fractionnaires devraient *a contrario* être des champs tests sans structure, puisque leurs phases sont totalement aléatoires et indépendantes les unes des autres. Dans ce cas simple, on peut calculer explicitement la distribution $\rho(\Delta\phi)$ des incréments de phase, puisqu'il s'agit

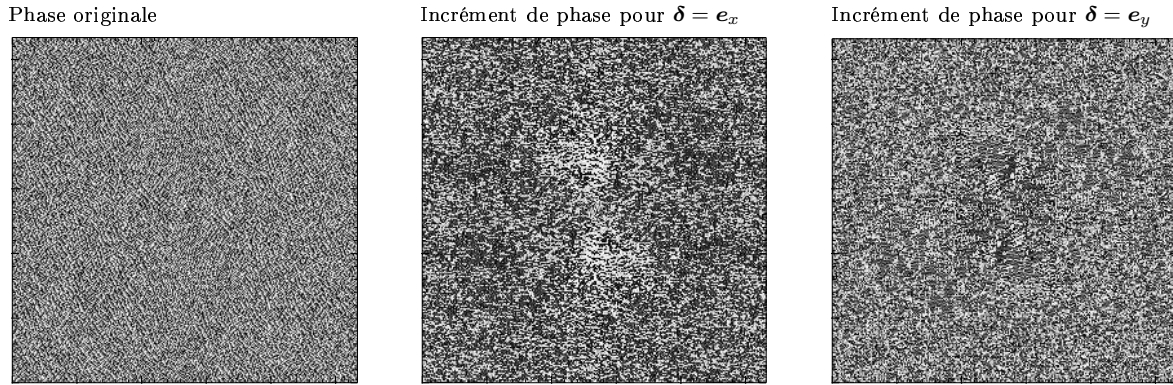


FIG. XVII.3 – Carte de la phase originale (à gauche) du portrait de Fourier et cartes des incréments de phase pour $\delta = e_x$ (au centre) et $\delta = e_y$ (à droite). Rappelons que les vecteurs e_x et e_y sont les vecteurs unitaires des axes de l'espace de Fourier.

de l'autocorrélation de la distribution $\rho_0(\phi)$ des phases, qui est uniforme,

$$\rho(\Delta\phi) = \iint_{\mathcal{D}_{\Delta\phi}} \rho_0(\phi_1)\rho_0(\phi_2)d\phi_1d\phi_2 = \int \rho_0(\phi_1)\rho_0(\phi_1 - \Delta\phi)d\phi_1 = \frac{1}{4\pi^2}(2\pi - |\Delta\phi|) \quad \text{avec} \quad \rho_0(\phi) = \frac{1}{2\pi}.$$

Dans cette équation, $\mathcal{D}_{\Delta\phi}$ désigne le domaine de $[-\pi, \pi]^2$ défini par $\phi_1 - \phi_2 = \Delta\phi$. Cette forme est cependant définie sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$, ce qui est incompatible avec le fait que les incréments de phase sont définis à 2π près. Ainsi, si l'incrément $\Delta\phi$ est compris entre -2π et $-\pi$, il doit être remplacé par son correspondant $\Delta\phi + 2\pi$. Réciproquement, s'il est compris entre π et 2π , il doit être remplacé par son correspondant $\Delta\phi - 2\pi$, suivant le schéma de la figure XVII.4. Par conséquent, la distribution réelle

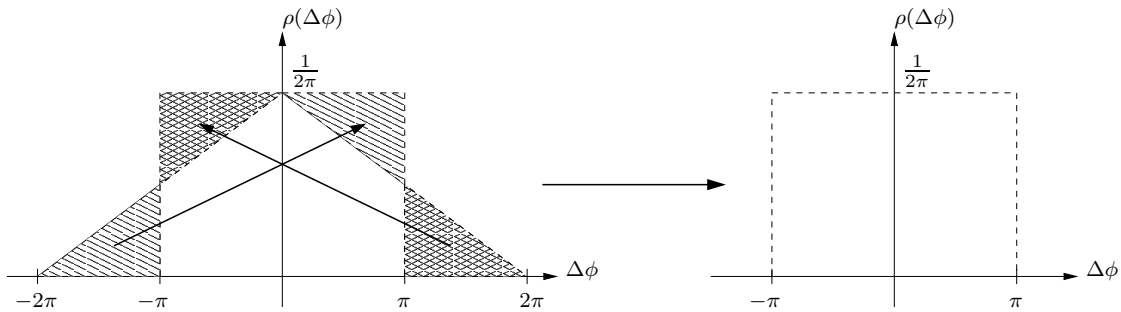


FIG. XVII.4 – “Renormalisation” de la distribution des incréments de phase d'un brownien fractionnaire.

des incréments de phase pour un champ brownien fractionnaire est uniforme entre $-\pi$ et π , et est donc identique à la distribution des phases elles-mêmes, quel que soit le déplacement δ . On peut le vérifier expérimentalement, sur la figure XVII.5, qui présente les histogrammes des incréments de phase d'un champ brownien fractionnaire pour $\delta = e_x$ et $\delta = e_y$. On voit que ces distributions sont uniformes, comme le suggérait le calcul précédent.

XVII.2.c Cas d'une image présentant de la structure

Si l'image considérée présente des structures, on peut s'attendre, du fait que les valeurs de la phase en des points voisins sont corrélées, à obtenir une distribution non uniforme des incréments de phase. On utilise comme image test la densité de colonne d'une simulation de turbulence compressible obtenue

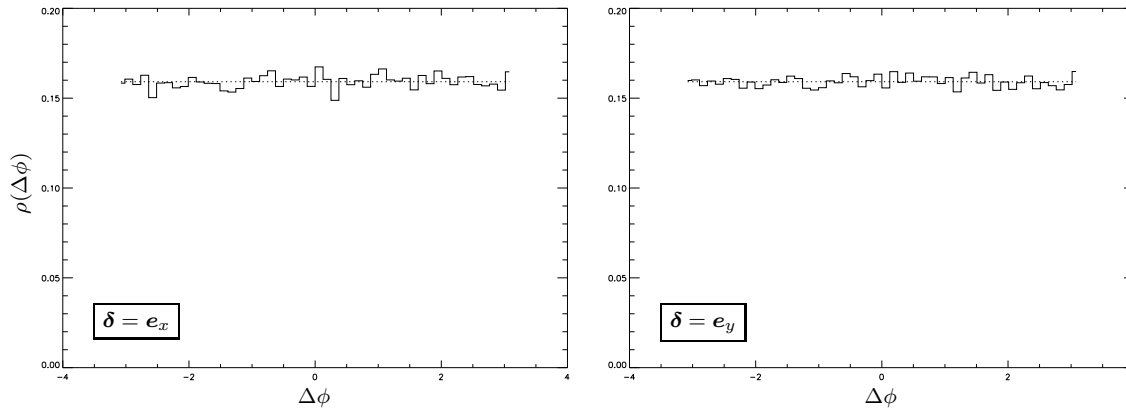


FIG. XVII.5 – Histogrammes des incréments de phase d'un brownien fractionnaire 512×512 .

par [Porter *et al.*, 1994], représentée sur la figure XVII.6. On y voit des structures filamenteuses assez grossières, mais qui n'ont pas de signature dans la distribution des valeurs des phases, également représentée sur la figure XVII.6. Ceci n'est pas étonnant, étant donné le cas du portrait de Fourier, lequel, bien que présentant une grande quantité de structures, possédait une distribution des phases uniforme (voir la figure XVII.2). La présence de structure a en revanche un effet sur les propriétés statistiques des incréments de phase, comme on peut s'en convaincre en considérant la deuxième ligne de la même figure XVII.6. On y voit les histogrammes des incréments de phase correspondant aux cas des déplacements $\delta = e_x$ et $\delta = e_y$. Leur écart à l'uniformité est flagrant, et est plus marqué dans le cas $\delta = e_x$, ce qu'on aurait tendance à interpréter comme la signature d'une anisotropie de l'image. On y reviendra dans la suite, après avoir introduit le concept d'entropie des incréments de phase, qui permet de quantifier la non-uniformité de ces distributions.

XVII.3 Entropie des incréments de phase et quantité de structure

XVII.3.a Introduction

Le concept d'entropie de phase a été introduit par [Polygiannakis & Moussas, 1995] dans le cadre de l'étude des variations du champ magnétique dans les plasmas cométaires et le vent solaire. Il a par la suite été réutilisé, par [Chiang & Coles, 2000] entre autres auteurs, pour étudier les propriétés de formation des grandes structures de l'Univers. Son intérêt principal, en ce qui concerne la caractérisation de la présence de structure dans une image, réside dans ses propriétés simples vis-à-vis des transformations courantes, comme on le verra plus loin. En particulier, c'est une mesure globale sur la distribution des incréments de phase, contrairement aux moments de la distribution, qui dépendent explicitement du centre de phase. En pratique, on définit l'entropie $\mathcal{S}(\delta)$ associée à une distribution d'incréments de phase $\rho[\Delta\phi(\mathbf{k}; \delta)]$ par

$$\mathcal{S}(\delta) = - \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\Delta\phi) \ln [\rho(\Delta\phi)] d\Delta\phi. \quad (85)$$

Cette définition est celle de l'entropie d'information de la densité de probabilité d'une variable aléatoire continue, dont le domaine de variation est ici limité à $[-\pi, \pi]$. En particulier, dans le cas des champs browniens fractionnaires, on a,

$$\mathcal{S}(\delta) = - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{2\pi} \right) d\Delta\phi = \ln(2\pi) = \mathcal{S}_0.$$

Quant aux distributions non uniformes, les propriétés classiques de l'entropie bien connues en physique statistique permettent d'affirmer que l'entropie $\mathcal{S}(\delta)$ d'une distribution d'incréments de phase est inférieure ou égale à \mathcal{S}_0 , quel que soit le déplacement δ . On peut donc introduire un nombre $\mathcal{Q}(\delta)$ positif, défini par $\mathcal{Q}(\delta) = \mathcal{S}_0 - \mathcal{S}(\delta)$, qui caractérisera d'une certaine façon la quantité de structure présente dans l'image, pour un déplacement δ donné.

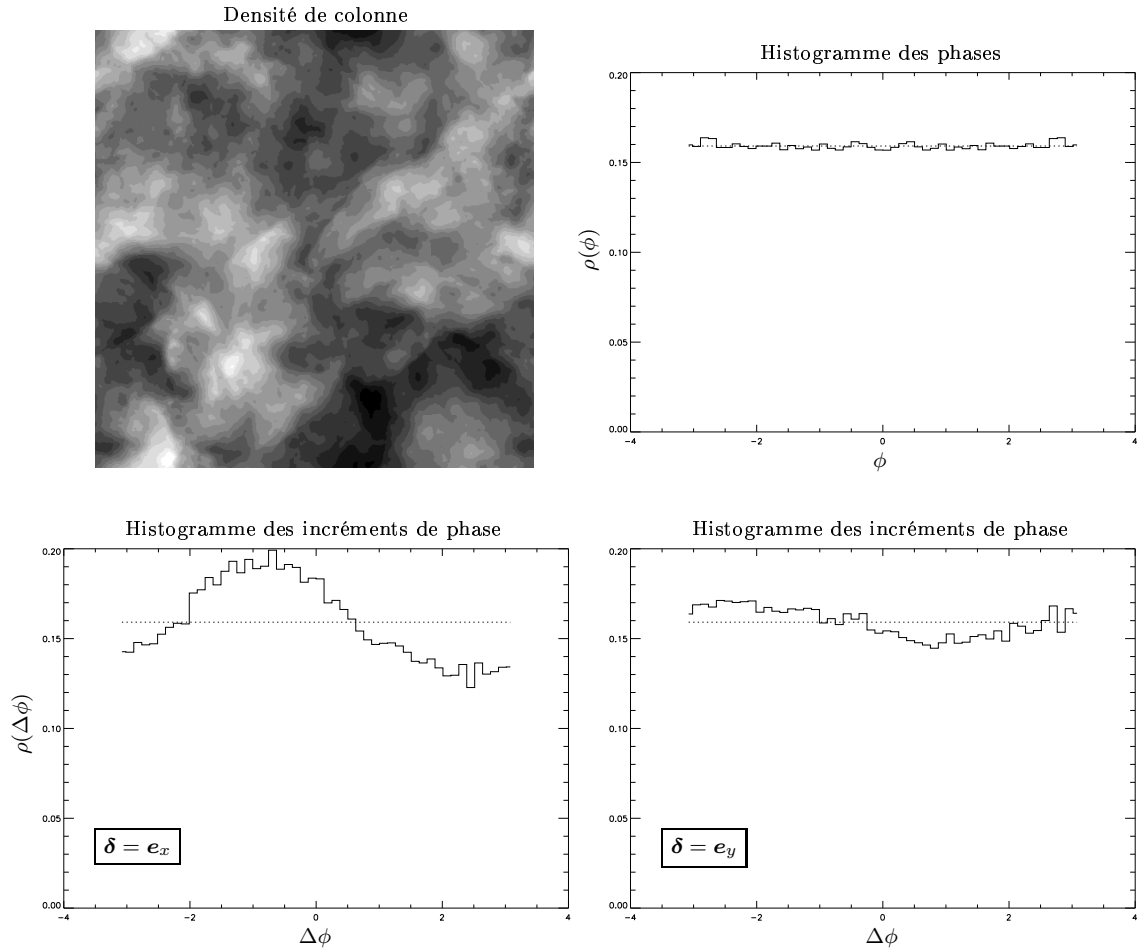


FIG. XVII.6 – Densité de colonne d'une simulation de turbulence compressible 512^3 (en haut à gauche) et histogramme de ses phases (en haut à droite) et de deux incréments de phase (en bas).

XVII.3.b Propriétés dans les transformations simples

Pour que l'entropie des incréments de phase soit un concept véritablement opérationnel, il faut qu'elle se comporte de manière simple lorsqu'on fait subir à l'image étudiée des transformations élémentaires, telles que translations, rotations et symétries.

Translation

Soit donc $F(\mathbf{r})$ une image dont on souhaite étudier la structure. On note $\mathcal{S}(\delta)$ l'entropie de ses incréments de phase pour un déplacement δ donné, et on introduit une translation $\mathbb{T}_{\mathbf{r}_0}$ de vecteur \mathbf{r}_0 transformant F en F' , de sorte que $F'(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$. La transformée de Fourier de F' est alors

$$\widehat{F}'(\mathbf{k}) = \iint F'(\mathbf{r}) \exp(-2i\pi\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} = \iint F(\mathbf{r}') \exp[-2i\pi\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0)] d^2\mathbf{r}' = \widehat{F}(\mathbf{k}) \exp[-2i\pi\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0].$$

La phase ϕ' de F' est donc liée à la phase ϕ de F par $\phi'(\mathbf{k}) = \phi(\mathbf{k}) - 2\pi\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0$, ce qui donne, pour les incréments de phase $\Delta\phi$ et $\Delta\phi'$, la relation

$$\Delta\phi'(\mathbf{k}; \delta) = \Delta\phi(\mathbf{k}; \delta) - 2\pi\delta\cdot\mathbf{r}_0, \quad (86)$$

où l'effet de la translation, contrairement au cas des phases, est cette-fois ci indépendant du vecteur d'onde \mathbf{k} . Remarquons que la formule précédente doit être corrigée pour tenir compte de la périodicité des incréments de phase. On a donc une translation globale de la distribution des incréments de phase, et l'entropie $\mathcal{S}(\delta)$ est par conséquent invariante dans une translation de l'image,

$$\boxed{F' = \mathbb{T}_{\mathbf{r}_0}(F) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{S}'(\delta) = \mathcal{S}(\delta)}. \quad (87)$$

On vérifie numériquement cette propriété, comme indiqué sur la figure **XVII.7**.

Rotation

On introduit une rotation R_θ , centrée sur l'origine O des coordonnées et d'angle θ , qui transforme l'image F en F' telle que $F'(\mathbf{r}) = \{R_\theta[F]\}(\mathbf{r}) = F[R_\theta^{-1}(\mathbf{r})]$, de sorte que dans l'espace de Fourier,

$$\widehat{F}'(\mathbf{k}) = \iint F[R_\theta^{-1}(\mathbf{r})] \exp(-2i\pi\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} = \iint F(\mathbf{r}') \exp[-2i\pi\mathbf{k}\cdot R_\theta(\mathbf{r}')] d^2\mathbf{r}' = \widehat{F}[R_\theta^{-1}(\mathbf{k})],$$

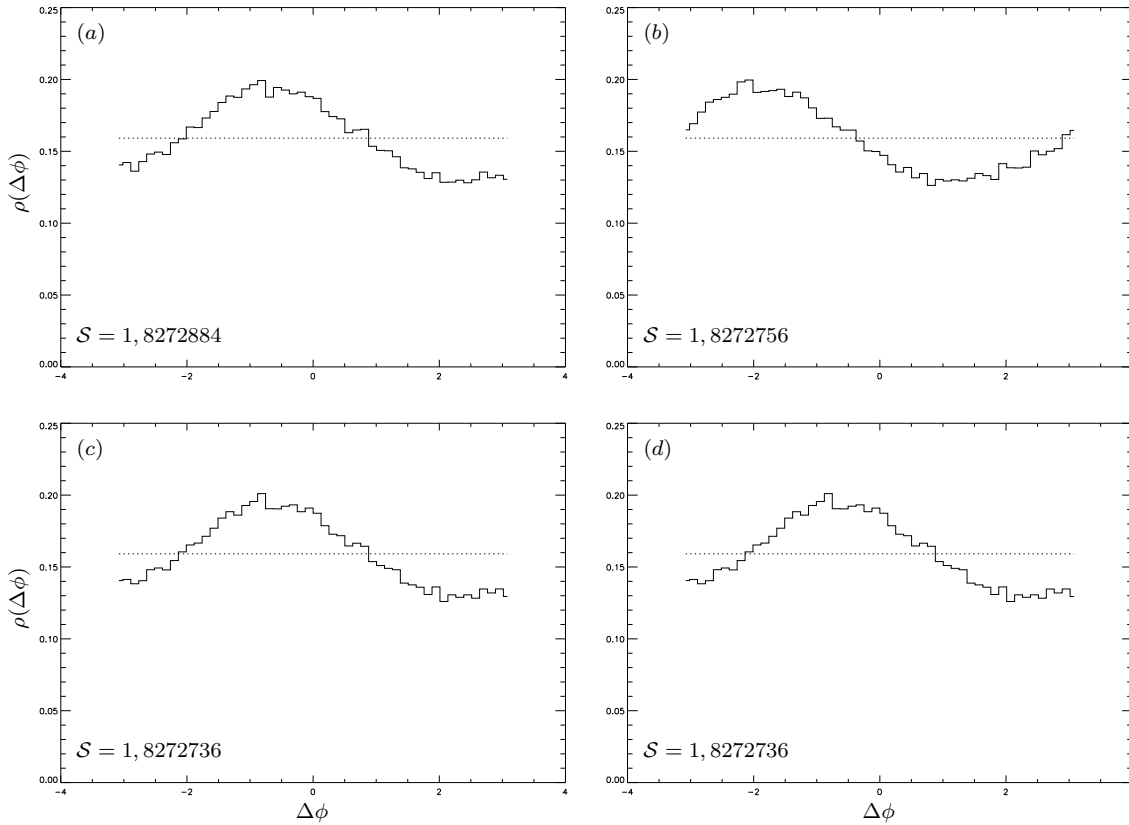


FIG. **XVII.7** – Illustration des effets des transformations élémentaires. La figure (a) représente l'histogramme des incréments de phase de la densité de colonne de la figure **XVII.6**, pour $\delta = e_x - e_y$, et constitue la référence. La figure (b) représente l'histogramme des incréments de phase, pour le même déplacement δ , d'une image obtenue par translation de vecteur $100e_x$. On remarque que l'histogramme est déplacé en bloc, sans modification sensible de sa forme. Les figures (c) et (d) correspondent quant à elles respectivement aux cas d'une rotation d'angle $\pi/2$, et d'une symétrie par rapport à l'axe Ox , et ce pour un déplacement $\delta = e_x + e_y$ dans les deux cas. Les histogrammes sont sensiblement identiques à celui de référence, comme le prévoit la théorie. Les entropies correspondantes sont indiquées dans le coin inférieur gauche de chaque figure et sont toutes égales, à 10^{-5} près.

en utilisant le fait que le Jacobien d'une rotation est égal à 1, ainsi que la relation $\mathbf{k}\cdot R_\theta(\mathbf{r}') = \mathbf{r}'\cdot R_\theta^{-1}(\mathbf{k})$. Il s'ensuit que les phases de l'image et de sa transformée par rotation sont liées par $\phi'(\mathbf{k}) = \phi[R_\theta^{-1}(\mathbf{k})]$ et les incréments de phase par

$$\Delta\phi'(\mathbf{k}; \delta) = \phi'(\mathbf{k} + \delta) - \phi'(\mathbf{k}) = \phi[R_\theta^{-1}(\mathbf{k} + \delta)] - \phi[R_\theta^{-1}(\mathbf{k})] = \Delta\phi[R_\theta^{-1}(\mathbf{k}); R_\theta^{-1}(\delta)].$$

On en conclut que l'entropie $S'(\delta)$ de l'image transformée est reliée à l'entropie $S(\delta)$ originale,

$$\boxed{F' = R_\theta(F) \quad \Rightarrow \quad S'(\delta) = S[R_\theta^{-1}(\delta)]}, \quad (88)$$

c'est-à-dire que la carte $\mathcal{S}'(\boldsymbol{\delta})$ se déduit de $\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$ par la rotation R_θ . Une vérification numérique rapide de cette égalité est présentée sur la figure **XVII.7**.

Symétrie

On considère ici une symétrie S_Δ par rapport à un axe Δ passant par O . La transformée F' de l'image de départ F est définie par $F'(\mathbf{r}) = \{S_\Delta[F]\}(\mathbf{r}) = F[S_\Delta(\mathbf{r})]$, d'où la relation dans l'espace de Fourier,

$$\widehat{F}'(\mathbf{k}) = \iint F[S_\Delta(\mathbf{r})] \exp(-2i\pi\mathbf{k}.\mathbf{r})d^2\mathbf{r} = \iint F(\mathbf{r}') \exp[-2i\pi S_\Delta(\mathbf{k}).\mathbf{r}']d^2\mathbf{r}' = \widehat{F}[S_\Delta(\mathbf{k})]$$

en utilisant le fait que le Jacobien d'une symétrie est égal à -1 , que la symétrie S_Δ est son propre inverse, et que $\mathbf{k}.S_\Delta(\mathbf{r}') = S_\Delta(\mathbf{k}).\mathbf{r}'$. Les phases ϕ et ϕ' sont alors reliées par $\phi'(\mathbf{k}) = \phi[S_\Delta(\mathbf{k})]$ et les incréments de phase par

$$\Delta\phi'(\mathbf{k}; \boldsymbol{\delta}) = \phi'(\mathbf{k} + \boldsymbol{\delta}) - \phi'(\mathbf{k}) = \phi[S_\Delta(\mathbf{k} + \boldsymbol{\delta})] - \phi[S_\Delta(\mathbf{k})] = \Delta\phi[S_\Delta(\mathbf{k}); S_\Delta(\boldsymbol{\delta})].$$

De la même manière que dans le cas des rotations, on en déduit que l'entropie des incréments de phase de la transformée de F dans une symétrie S_Δ est la transformée, par cette symétrie, de l'entropie des incréments de phase de F , soit

$$\boxed{F' = S_\Delta(F) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{S}'(\boldsymbol{\delta}) = \mathcal{S}[S_\Delta(\boldsymbol{\delta})]}. \quad (89)$$

On propose une vérification numérique de cette propriété sur la figure **XVII.7**.

Conclusions

Il apparaît donc que la carte d'entropie des incréments de phase $\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$, en tant que fonction du déplacement bidimensionnel $\boldsymbol{\delta}$, possède des propriétés simples vis-à-vis des transformations géométriques élémentaires qu'on peut appliquer à l'image considérée, et que ces propriétés s'interprètent bien en termes de conservation des notions intuitives de quantité de structure et d'anisotropie de l'image. Plus précisément, on comprend que la structure présente dans une image est invariante au cours d'une translation, et qu'il en va de même de l'anisotropie, puisque, par exemple, un filament est déplacé parallèlement à lui-même. Dans une rotation ou une symétrie, la quantité de structure est également conservée, mais les directions caractéristiques de l'anisotropie sont modifiées conformément à la transformation appliquée. Une mesure pertinente de la quantité de structure présente dans une image et de son anisotropie se doit donc de formaliser ces propriétés de symétrie. C'est le cas de la carte d'entropie des incréments de phase, comme le montrent les équations (87), (88) et (89).

XVII.4 Fiabilité de la méthode entropique pour la détection de structure

XVII.4.a Mise en évidence des variations d'histogrammes

L'examen attentif des exemples de la figure **XVII.7** montre que les histogrammes sont très légèrement modifiés par les transformations appliquées à l'image, alors que les calculs précédents suggèrent que les distributions parentes sont identiques. De même, les entropies correspondantes diffèrent les unes des autres, les variations étant de l'ordre de 10^{-5} . Ces différences peuvent se comprendre à partir de la méthode de calcul numérique des incréments de phase. En raison de la finitude de l'espace de Fourier accessible, il est nécessaire en effet, pour calculer l'incrément $\Delta\phi(\mathbf{k}; \boldsymbol{\delta})$, de se restreindre à un sous-ensemble où les phases $\phi(\mathbf{k} + \boldsymbol{\delta})$ et $\phi(\mathbf{k})$ sont toutes deux définies. Ce sous-ensemble dépendant du déplacement $\boldsymbol{\delta}$, les histogrammes (c) et (d) diffèrent nécessairement quelque peu de l'histogramme de référence. D'autre part, dans le cas de la translation, l'équation (86) montre que des incréments de phase comptés dans la même cellule dans l'histogramme correspondant à l'image d'origine, peuvent être séparés dans le cas de l'image translatée, comme on le représente schématiquement sur la figure **XVII.8**. Les histogrammes correspondant aux deux images sont donc en général légèrement différents¹,

¹Comme on le note en légende de la figure **XVII.8**, ils sont identiques si $-2\pi\boldsymbol{\delta}.\mathbf{r}_0$ est un multiple de la taille de la cellule.

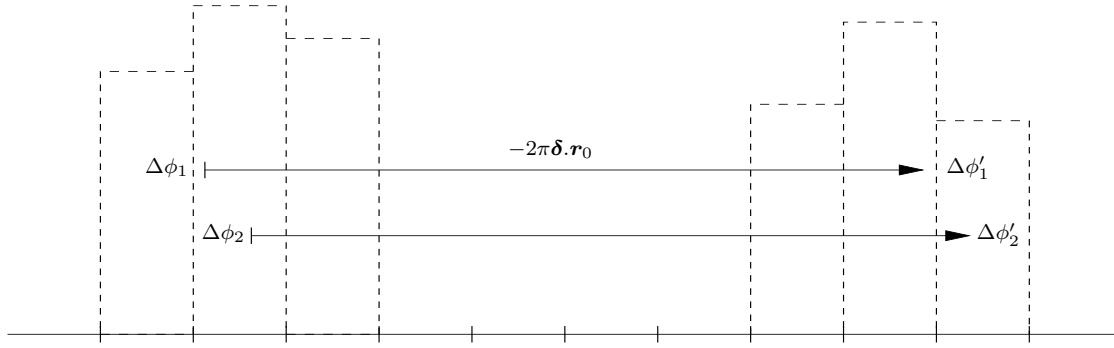


FIG. XVII.8 – Modification des histogrammes des incréments de phase $\Delta\phi(\mathbf{k}; \delta)$ sous l'effet de la translation $T_{\mathbf{r}_0}$. La quantité $-2\pi\delta \cdot \mathbf{r}_0$ n'étant a priori pas un multiple de la taille de la cellule, les incréments $\Delta\phi_1$ et $\Delta\phi_2$ sont séparés par la translation.

Il apparaît donc nécessaire de s'interroger sur la précision du calcul de l'entropie des incréments de phase en fonction des paramètres principaux que sont la taille de l'image et l'échantillonnage des histogrammes. En particulier, puisque l'absence de structure se caractérise théoriquement par une entropie maximale $S_0 = \ln(2\pi)$, il s'agit de savoir quel est le seuil de la quantité $\mathcal{Q}(\delta)$ permettant d'affirmer qu'une image possède effectivement de la structure.

XVII.4.b Estimation analytique

Approche à partir des moments

Les variations des histogrammes illustrées sur la figure XVII.7 se traduisent naturellement par des variations de l'entropie des incréments de phase, qu'on a déjà notées sur la même figure XVII.7. Étant donné que les variations des histogrammes sont faibles, on peut d'ailleurs calculer explicitement la variation de l'entropie. On considère pour cela une image F comportant N_0 pixels, la carte de phase $\phi(\mathbf{k})$ de l'image étant alors de même taille. La carte des incréments de phase $\Delta\phi(\mathbf{k}; \delta)$ est en revanche plus petite, d'après la remarque faite au paragraphe précédent. On note $N < N_0$ le nombre d'incréments de phase pris en compte, lequel dépend de la valeur du déplacement δ . On choisit alors un échantillonnage caractérisé par un nombre de cellules n , de sorte que la cellule i contienne un nombre N_i d'incréments de phase. Le calcul de l'entropie se fait en transformant (85) en somme discrète,

$$\mathcal{S} = - \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\Delta\phi) \ln[\rho(\Delta\phi)] d\Delta\phi \approx - \sum_{i=1}^n h_i \ln(h_i) \frac{2\pi}{n} = - \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N} \ln\left(\frac{nN_i}{2\pi N}\right), \quad (90)$$

où $h_i = N_i/N$ est la valeur de l'histogramme pour la $i^{\text{ème}}$ cellule. Lorsque les valeurs des histogrammes varient de δh_i , l'entropie varie d'une quantité $\delta\mathcal{S}$ qu'on calcule explicitement selon

$$\delta\mathcal{S} = \frac{2\pi}{n} \sum_{i=1}^n [h_i \ln(h_i) - (h_i + \delta h_i) \ln(h_i + \delta h_i)] = \frac{2\pi}{n} \sum_{i=1}^n \delta\mathcal{S}_i,$$

où $\delta\mathcal{S}_i = h_i \ln(h_i) - (h_i + \delta h_i) \ln(h_i + \delta h_i)$ peut être réécrit en utilisant la propriété du logarithme,

$$\delta\mathcal{S}_i = -(h_i + \delta h_i) \ln\left(1 + \frac{\delta h_i}{h_i}\right) - \delta h_i \ln(h_i) = -\delta h_i \ln(h_i) - (h_i + \delta h_i) \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{p+1} \left(\frac{\delta h_i}{h_i}\right)^{p+1},$$

en faisant appel au développement de $\ln(1+x)$ en série entière. Dans l'optique de donner un ordre d'idée de l'intervalle des valeurs d'entropie pour lequel il est raisonnable de conclure à l'absence de structure, on se place dans le cas où l'histogramme de référence est uniforme, soit $h_i = 1/(2\pi)$. Alors,

$$\delta\mathcal{S}_i = \delta h_i \ln(2\pi) - \frac{1}{2\pi} (1 + 2\pi\delta h_i) \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{p+1} (2\pi\delta h_i)^{p+1},$$

qu'on peut réorganiser pour obtenir finalement la variation de l'entropie sous la forme

$$\delta\mathcal{S} = \frac{2\pi}{n} [\ln(2\pi) - 1] \sum_{i=1}^n \delta h_i - \frac{1}{n} \sum_{q \geq 2} \frac{(-1)^q}{q(q-1)} \sum_{i=1}^n (2\pi \delta h_i)^q = - \sum_{q \geq 2} \frac{(-1)^q}{q(q-1)} (2\pi)^q \mu_q = -\mathcal{Q}(\delta). \quad (91)$$

en introduisant les moments μ_q de l'échantillon $\{\delta h_i\}$ et en utilisant la condition de normalisation des histogrammes, qui implique que $\mu_1 = 0$. La dernière égalité exprime le fait que la quantité de structure $\mathcal{Q}(\delta)$ est égale à $\mathcal{S}_0 - \mathcal{S}(\delta)$ et est donc l'opposée de la variation $\delta\mathcal{S}$ considérée.

On montre sur la figure **XVII.9** l'évolution du développement (91) en fonction de l'ordre maximal q_{\max} considéré. On voit que, pour un champ brownien fractionnaire, la troncature à $q_{\max} = 4$ suffit à retrouver la valeur calculée à partir de la formule (90), et que dans le cas d'une image possédant de la structure, comme la densité de colonne de la figure **XVII.6**, on peut se contenter de $q \leq q_{\max} = 6$.

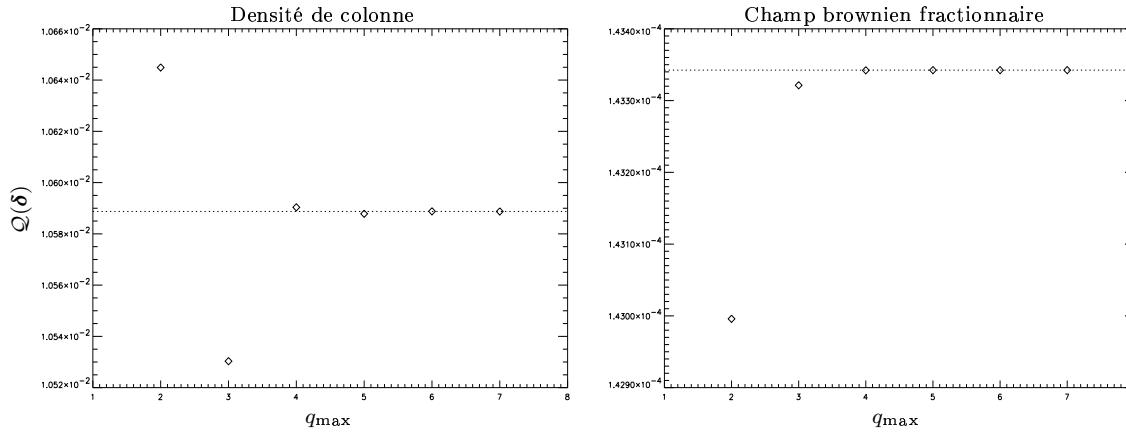


FIG. **XVII.9** – Évolution de la quantité de structure avec l'ordre maximal q_{\max} du développement (91). La figure de gauche représente le cas de la densité de colonne de la figure **XVII.6**, tandis que la figure de droite correspond à un brownien fractionnaire de même taille (512^2). Dans les deux cas, le déplacement est $\delta = e_x - e_y$, et le trait pointillé représente la valeur limite de $\mathcal{Q}(\delta)$, calculée d'après la formule (90).

Approche en termes de pseudo-distance de Küllback

L'approche en termes de moments n'est cependant pas la mieux adaptée à l'estimation analytique des valeurs probables de la quantité de structure en fonction des paramètres N et n , car il n'existe pas, à ma connaissance, de méthode de calcul fondée sur l'équation (91) permettant d'obtenir la probabilité que $\mathcal{Q}(\delta)$ soit plus grande qu'un nombre donné, sachant que la distribution parente est uniforme.

Pour faire ce calcul, on peut en revanche utiliser les résultats de [Castellan, 2000]. Comme précédemment, les N incréments $(\Delta\phi_1, \dots, \Delta\phi_N)$ sont distribués uniformément sur $[-\pi, \pi]$, et répartis dans n intervalles \mathcal{A}_i de même longueur. On note toujours N_i le nombre d'incrément tombant dans l'intervalle \mathcal{A}_i , et on introduit les fonctions s et σ définies par

$$s(x) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{1}_{[-\pi, \pi]}(x) \quad \text{et} \quad \sigma(x) = \sum_{i=1}^n h_i \mathbf{1}_{\mathcal{A}_i}(x),$$

où $\mathbf{1}_{[a,b]}$ désigne l'indicatrice du segment $[a, b]$, dont on rappelle qu'il s'agit de la fonction prenant la valeur 1 sur $[a, b]$ et 0 ailleurs. En utilisant ces formes, la quantité de structure peut s'écrire

$$\mathcal{Q}(\delta) = \mathcal{S}_0 - \mathcal{S}(\delta) = \ln 2\pi + \frac{2\pi}{n} \sum_{i=1}^n h_i \ln(h_i) = - \int s(x) \ln[s(x)] dx + \int \sigma(x) \ln[\sigma(x)] dx.$$

Or, s étant constante sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ considéré, on peut remplacer le premier terme par

$$\int s(x) \ln[s(x)] dx = \ln(s) \int s(x) dx = \ln(s) \int \sigma(x) dx = \int \sigma(x) \ln[s(x)] dx,$$

puisque s et σ sont normalisées. La quantité de structure, en se mettant alors sous la forme

$$\mathcal{Q}(\delta) = \int \sigma(x) \ln \left[\frac{\sigma(x)}{s(x)} \right] dx = \mathcal{K}(\sigma, s)$$

apparaît comme une pseudo-distance de Kùllback de σ à s . La méthode de [Castellan, 2000] suggère, pour calculer la probabilité $P(\{\mathcal{Q} > x\})$ que la quantité de structure calculée pour une distribution parente s uniforme soit plus grande qu'un réel x donné, de la majorer en isolant les événements pour lesquels l'échantillon $\{h_i\}$ présente un "record". On définit ainsi, pour $\epsilon > 0$ réel, l'évènement Ω_ϵ pour lequel il existe une cellule "anormalement" remplie ou "anormalement" vide,

$$\Omega_\epsilon = \{\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket; |h_i - p| > \epsilon p\} \quad \text{avec} \quad h_i = \frac{N_i}{N} \quad \text{et} \quad p = \frac{1}{n}.$$

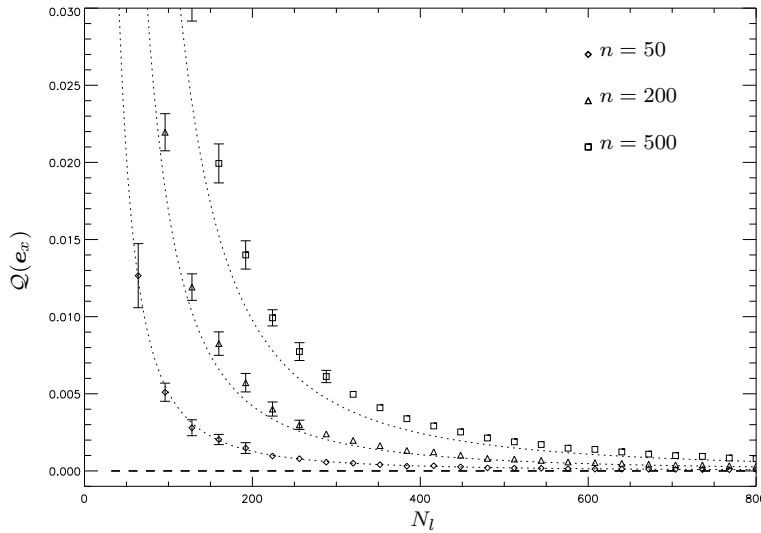


FIG. XVII.10 – Évolution de la quantité de structure $\mathcal{Q}(e_x)$ en fonction de la taille linéaire N_l de champs browniens fractionnaires bidimensionnels et du nombre de cellules n utilisées dans la construction des histogrammes d'incrément de phase. Pour chaque jeu de paramètres (n, N_l) on présente la moyenne de $\mathcal{Q}(e_x)$ sur dix réalisations, ainsi que l'écart-type si celui-ci est plus grand que $2,5 \cdot 10^{-4}$. Les traits pointillés représentent la limite au delà de laquelle on a moins de 1% de chances de trouver $\mathcal{Q}(e_x)$, en se limitant au deuxième terme de la majoration (92). Le paramètre ϵ est pris égal à 0,1.

Dans cette optique, h_i peut être interprété comme le nombre moyen de "succès" - c'est-à-dire d'occurrences de l'évènement "l'incrément $\Delta\phi$ tombe dans l'intervalle \mathcal{A}_i " - dans une série de N épreuves de Bernoulli, et p comme la probabilité de ce même évènement élémentaire. La probabilité $P(\Omega_\epsilon)$ peut alors être majorée par

$$P(\Omega_\epsilon) \leq \sum_{i=1}^n P(\{|h_i - p| > \epsilon p\}) \leq nP(\{|h_i - p| > \epsilon p\}).$$

Les ordres de grandeur respectifs de N et n permettent d'écrire que N_i est suffisamment grand pour qu'on puisse appliquer le théorème central limite, selon lequel les écarts de h_i à p suivent approximativement une loi normale. Plus précisément, on a, d'après le théorème de Moivre-Laplace [Pelat, 1998],

$$\sqrt{N} \frac{h_i - p}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{où} \quad \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{désigne la loi normale de moyenne nulle et de variance 1.}$$

Par conséquent, on peut calculer la probabilité $P(\{|h_i - p| > \epsilon p\})$ en utilisant la fonction d'erreur,

$$\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{d'où} \quad P(\{|h_i - p| > \epsilon p\}) \approx 1 - \text{Erf}(x_\epsilon) \quad \text{avec} \quad x_\epsilon = \sqrt{\frac{Np}{2(1-p)}} \epsilon.$$

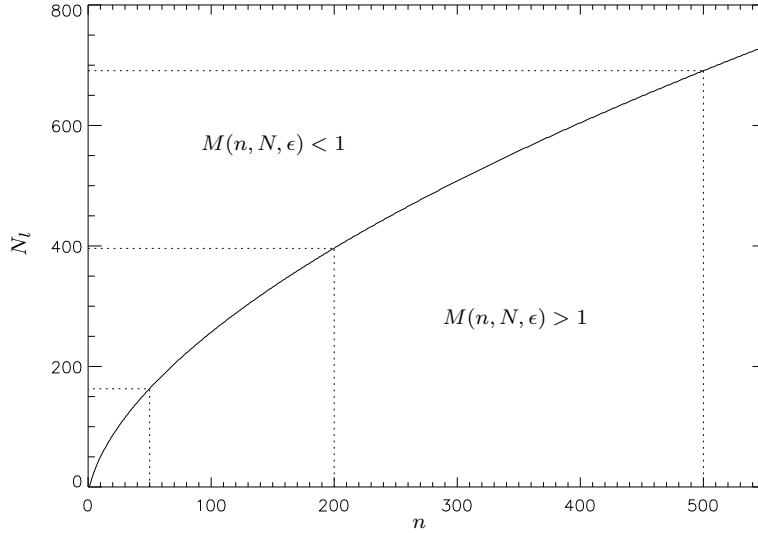


FIG. XVII.11 – Courbe $M(n, N, \epsilon) = 1$ dans l'espace à deux dimensions repéré par le nombre de cellules n en abscisses et la taille linéaire $N_l = \sqrt{N}$ en ordonnées. Le paramètre ϵ est fixé à 0,1. Les domaines $M(n, N, \epsilon) < 1$ et $M(n, N, \epsilon) > 1$ sont indiqués sur la figure, ainsi que les points sur la courbe correspondant aux valeurs de n choisies sur la figure XVII.10. Les tailles linéaires "limites" sont respectivement $N_l = 163$ pour $n = 50$, $N_l = 396$ pour $n = 200$, et $N_l = 691$ pour $n = 500$, ce qui correspond aux ordres de grandeur des tailles pour lesquelles la majoration (92) n'est plus correcte.

Numériquement, pour $N = 512^2$ et $n = 50$, la probabilité qu'il existe une cellule \mathcal{A}_i où le nombre moyen d'incrément différerait de cinq pour cent ($\epsilon = 5 \cdot 10^{-2}$) de sa valeur théorique est de l'ordre de 0,012, et tombe à 10^{-11} pour un écart de dix pour cent ($\epsilon = 0,1$).

En ce qui concerne les échantillons "usuels", c'est-à-dire ne donnant pas lieu à l'évènement Ω_ϵ , on a l'encadrement suivant [Castellan, 2000],

$$\frac{1}{2} \int \inf(\sigma, s) \left[\ln \left(\frac{\sigma}{s} \right) \right]^2 dx \leq \mathcal{K}(\sigma, s) = \mathcal{Q}(\delta) \leq \frac{1}{2} \int \sup(\sigma, s) \left[\ln \left(\frac{\sigma}{s} \right) \right]^2 dx.$$

Or, sur le complémentaire $\overline{\Omega_\epsilon}$ de Ω_ϵ , la fonction $\inf(\sigma, s)$ est minorée par $(1 - \epsilon)s$, et la fonction $\sup(\sigma, s)$ est majorée par $(1 + \epsilon)s$. D'autre part, on a également l'encadrement [Castellan, 2000]

$$\frac{1}{(1 + \epsilon)^2} \int s \left(\frac{s - \sigma}{s} \right)^2 dx \leq \int s \left[\ln \left(\frac{\sigma}{s} \right) \right]^2 dx \leq \frac{1}{(1 - \epsilon)^2} \int s \left(\frac{s - \sigma}{s} \right)^2 dx,$$

qu'on peut réécrire en remarquant que l'intégrale apparaissant dans le minorant et dans le majorant est en fait liée à la statistique du χ^2 de Pearson, puisque

$$\int s \left(\frac{s - \sigma}{s} \right)^2 dx = 2\pi \sum_{i=1}^n \frac{2\pi}{n} \left(\frac{N_i}{N} \frac{n}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \right)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \frac{(N_i - Np)^2}{Np} = \frac{\chi^2}{N}.$$

En combinant ces inégalités, on obtient finalement un encadrement de la quantité de structure sur $\overline{\Omega_\epsilon}$, qui montre que celle-ci constitue une statistique équivalente² au χ^2 ,

$$a_\epsilon \frac{\chi^2}{N} \leq \mathcal{Q}(\delta) \leq b_\epsilon \frac{\chi^2}{N} \quad \text{en posant } a_\epsilon = \frac{1 - \epsilon}{2(1 + \epsilon)^2} \text{ et } b_\epsilon = \frac{1 + \epsilon}{2(1 - \epsilon)^2}.$$

Dès lors, on peut brutalement majorer la probabilité de trouver une quantité de structure supérieure à x par la somme des probabilités d'avoir un échantillon "record" d'une part, et d'avoir un échantillon "normal"

²Asymptotiquement, il s'agit d'un χ^2 à $n - 1$ degrés de liberté, et non n comme on pourrait le supposer, car il faut tenir compte de la contrainte $\sum N_i = N$.

pour lequel $\mathcal{Q}(\delta) > x$, d'autre part,

$$P(\{\mathcal{Q}(\delta) > x\}) \leq P(\Omega_\epsilon) + P(\{\mathcal{Q}(\delta) > x\} \cap \overline{\Omega_\epsilon}) \leq n[1 - \text{Erf}(x_\epsilon)] + P\left(\chi^2 > \frac{Nx}{b_\epsilon}\right), \quad (92)$$

En choisissant $\epsilon = 0,1$ on a vu qu'on pouvait parfaitement négliger le premier terme de la majoration précédente, de sorte qu'on obtient un majorant de $P(\{\mathcal{Q}(\delta) > x\})$ en considérant les quantiles de la loi du χ^2 . Ainsi, pour une image de taille 512^2 et un nombre de cellules $n = 50$, on estime qu'il y a 99% de chances pour que la quantité de structure $\mathcal{Q}(\delta)$ soit inférieure à 2.10^{-4} .

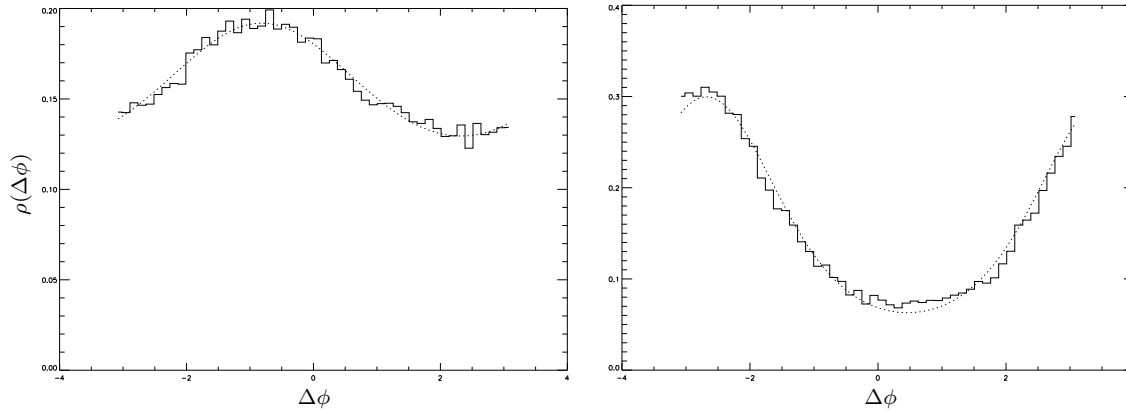


FIG. XVII.12 – Histogrammes des incréments de phase de la densité de colonne de la figure XVII.6 (à gauche) et du portrait de Fourier (à droite), pour un déplacement $\delta = e_x$. Le trait pointillé représente l'ajustement d'une distribution de von Mises. On trouve $\kappa \approx 0.197$ dans le cas de la densité de colonne et $\kappa \approx 0.780$ dans celui du portrait de Fourier.

XVII.4.c Estimation numérique

On peut également estimer numériquement l'influence de la taille de l'image ainsi que du nombre de cellules sur la fiabilité de la quantité de structure. Pour cela, on réalise une série de simulations de champs browniens fractionnaires bidimensionnels de diverses tailles. Le déplacement δ étant donné, le calcul numérique de $\mathcal{Q}(\delta)$ pour ces simulations doit fournir une estimation de la limite au delà de laquelle la présence de structure peut être considérée comme avérée. On construit donc des champs browniens fractionnaires bidimensionnels possédant un indice spectral $\beta = 3$ et de taille $N = N_l^2$, la taille linéaire N_l allant de 32 à 800 pixels. Pour chaque taille, on se donne dix réalisations, puis on calcule leurs cartes d'incrément de phase pour $\delta = e_x$. À partir de chacune de ces cartes, on construit 3 histogrammes, pour des nombres de cellules n égaux à 50, 200 et 500, et on calcule la quantité de structure $\mathcal{Q}(\delta)$ associée à chaque histogramme. Enfin, on exhibe la valeur moyenne et l'écart-type des quantités de structure obtenues à N et n donnés. Les résultats sont présentés sur la figure XVII.10.

Il apparaît que la quantité de structure calculée numériquement augmente lorsque la taille des images diminue, et lorsque le nombre de cellules augmente. On interprète cet effet en remarquant que les histogrammes sont alors moins bien définis, et moins proches de la distribution parente uniforme. La figure montre également, en pointillés, la valeur du 99^{ème} percentile de la loi suivie par $b_\epsilon \chi^2/N$, pour $\epsilon = 0,1$. Cette valeur dépend de N bien sûr, mais également de n à travers le nombre de degrés de liberté de la loi du χ^2 . Idéalement, ces courbes devraient majorer les quantités de structure obtenues numériquement sur des champs browniens fractionnaires. On voit que la majoration est très bonne dans le cas où $n = 50$, qu'elle commence à faiblir pour $n = 200$ aux plus petites tailles d'images, et qu'elle est mise en défaut sauf aux plus grandes tailles pour $n = 500$. Ceci suggère que dans ces cas précis, la probabilité $P(\Omega_\epsilon)$ n'est plus négligeable. Le premier terme de la majoration (92)

$$P(\Omega_\epsilon) \leq n \left[1 - \text{Erf} \left(\sqrt{\frac{N}{2(n-1)}} \epsilon \right) \right] = M(n, N, \epsilon)$$

pendant de toutes les manières sa pertinence dès que n est trop grand ou que N est trop petit, puisque le majorant $M(n, N, \epsilon)$ devient supérieur à 1. On montre d'ailleurs sur la figure **XVII.11**, pour $\epsilon = 0, 1$, la courbe $M(n, N, \epsilon) = 1$ dans l'espace des paramètres (n, N) . On n'est pas surpris de voir que les valeurs de cette courbe pour $n = 50$, $n = 200$ et $n = 500$ correspondent *grosso modo* aux points, sur la figure **XVII.10**, où les évaluations numériques rejoignent les courbes du 99^{ème} percentile.

Ces estimations permettent de conclure quant à la présence de structure dans une image pour un déplacement δ donné. À titre d'exemple, on considère la densité de colonne illustrée sur la figure **XVII.6**, dont on calcule les quantités de structure $\mathcal{Q}(e_x)$ et $\mathcal{Q}(e_y)$ pour $n = 50$. On trouve $\mathcal{Q}(e_x) = 9,79 \cdot 10^{-3}$ et $\mathcal{Q}(e_y) = 1,27 \cdot 10^{-3}$, ce qui est 5 à 50 fois plus grand que les valeurs correspondantes pour des champs browniens fractionnaires de même taille.

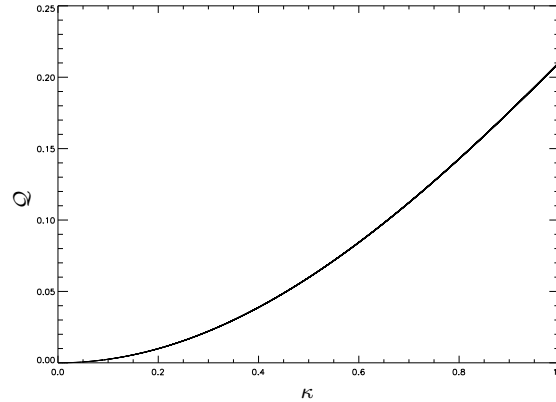


FIG. **XVII.13** – Évolution de la quantité de structure \mathcal{Q} en fonction du paramètre κ caractérisant la non-uniformité de la distribution de von Mises. Dans la limite de $\kappa \rightarrow 0$, \mathcal{Q} est proportionnelle à κ^2 .

XVII.5 Distribution de von Mises

XVII.5.a Histogrammes des incréments de phase

L'entropie \mathcal{S} des incréments de phase et la quantité de structure associée \mathcal{Q} semblent donc permettre de déterminer si une image présente de la structure, à partir de la seule information des phases, puisque les valeurs de \mathcal{Q} trouvées pour un champ brownien fractionnaire sont typiquement de l'ordre de 10^{-4} , alors que pour une image telle que celle de la densité de colonne de la figure **XVII.6**, la quantité de structure est d'environ 10^{-2} , et peut monter, pour des images très structurées comme le portrait de Fourier (figure **XVII.1**), jusqu'à des valeurs de 0,1 ou plus, soit 100 à 1000 fois plus élevées que pour des images "sans structure".

Il apparaît cependant que l'entropie et la quantité de structure ne sont en réalité que des moyens de caractériser simplement la non-uniformité des distributions d'incrément de phase, et que ce sont ces dernières qui contiennent en définitive l'information structurelle des images étudiées. En effet, toutes les propriétés simples de l'entropie dans les transformations géométriques de la section **XVII.3.b** sont fondées sur les propriétés des distributions d'incrément de phase elles-mêmes. Or on voit, par exemple sur la figure **XVII.12**, que les histogrammes d'incrément de phase étudiés présentent tous une forme similaire, avec une et une seule oscillation de grande longueur d'onde. Il semble donc probable que cette forme générale de la distribution des incréments de phase soit indépendante du processus particulier à l'origine de la structuration des images. Ainsi, les simulations de la formation des grandes structures de l'univers sous l'effet de la gravité (voir par exemple [Watts *et al.*, 2003]) donnent des distributions d'incrément de phase de même forme que les simulations de turbulence compressible de [Porter *et al.*, 1994]. Comme l'indique [Watts *et al.*, 2003], ces distributions sont d'ailleurs très proches de distributions de von Mises, données par la forme suivante, dépendant de deux paramètres κ et μ ,

$$\rho(\Delta\phi) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} \exp[-\kappa \cos(\Delta\phi - \mu)],$$

où I_0 est la fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre zéro. Le paramètre μ correspond à l'incrément de phase le moins représenté, pour lequel la distribution $\rho(\Delta\phi)$ est donc minimale. Quant au paramètre κ , il contrôle l'écart à l'uniformité. On voit, sur les ajustements de la figure **XVII.12**, que celui-ci est de l'ordre de quelques dixièmes pour une image structurée.

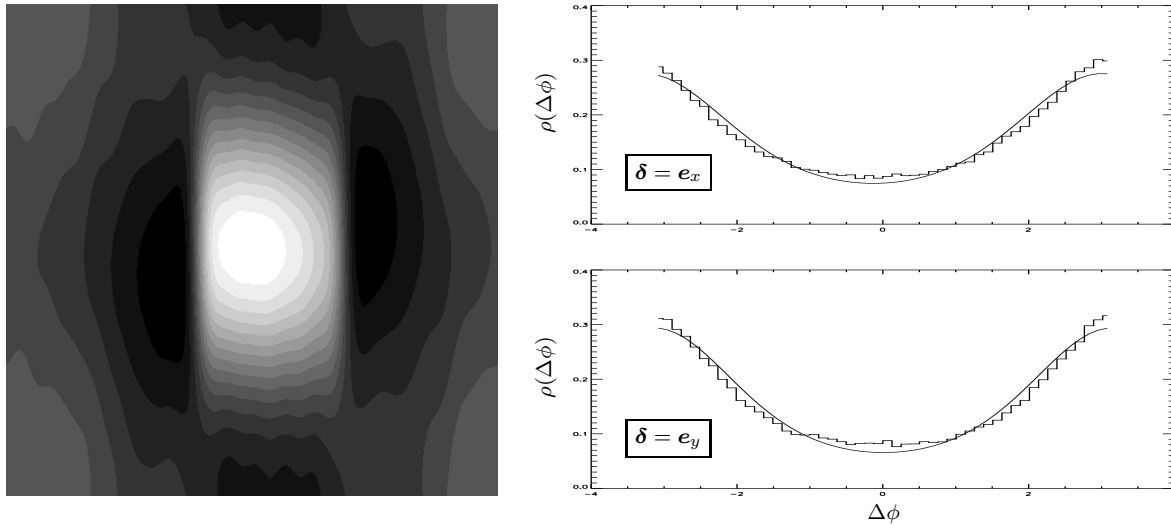


FIG. **XVII.14** – Image synthétique modèle présentant un fort degré d'anisotropie (à gauche) et histogrammes des incréments de phase associés à $\delta = e_x$ (en haut à droite) et $\delta = e_y$ (en bas à droite). Les quantités de structure correspondantes sont respectivement $\mathcal{Q}(e_x) = 0,0922$ et $\mathcal{Q}(e_y) = 0,116$.

XVII.5.b Calcul de la quantité de structure associée

Puisque la distribution des incréments de phase peut être approchée par une distribution de von Mises, le paramètre κ contrôlant la non-uniformité de cette distribution doit pouvoir être relié à l'entropie et à la quantité de structure associées aux incréments de phase. En effet, en utilisant l'équation (85)

$$\mathcal{S}(\delta) = \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\Delta\phi) \{ \ln [2\pi I_0(\kappa)] + \kappa \cos(\Delta\phi - \mu) \} d\Delta\phi.$$

Etant donnée l'invariance translationnelle de l'entropie, on peut supposer que $\mu = 0$, soit

$$\mathcal{S}(\delta) = \ln [2\pi I_0(\kappa)] + \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} \int_{-\pi}^{\pi} \kappa \exp[-\kappa \cos(\Delta\phi)] \cos(\Delta\phi) d\Delta\phi.$$

Or, la fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre n est [Abramowitz & Stegun, 1964]

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \exp[x \cos(\theta)] \cos(n\theta) d\theta \quad \text{d'où} \quad \mathcal{S}(\delta) = \ln [2\pi I_0(\kappa)] + \kappa \frac{I_1(-\kappa)}{I_0(\kappa)}.$$

De là, on déduit la forme de la quantité de structure en fonction du paramètre κ ,

$$\boxed{\mathcal{Q}(\delta) = \kappa \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} - \ln [I_0(\kappa)]} \quad \text{étant donné que } I_1 \text{ est une fonction impaire.}$$

Cette équation, tout comme les précédentes, tient implicitement compte du fait que le paramètre κ dépend de l'histogramme des incréments de phase, et donc du déplacement δ . La figure **XVII.13** montre l'évolution de \mathcal{Q} avec κ . La tangente horizontale pour $\kappa \rightarrow 0$ suggère que ce dernier paramètre pourrait permettre une meilleure détermination de la présence ou non de structure dans des images globalement peu structurées. Cependant, dans le cas d'images peu structurées, il est difficile d'obtenir un ajustement des histogrammes des incréments de phase par une distribution de von Mises, car les variations de faible amplitude et de grande longueur d'onde sont alors noyées dans les fluctuations de l'histogramme. Par conséquent, la détermination de la présence ou non de structure dans une telle image se fera plutôt par la quantité \mathcal{Q} .

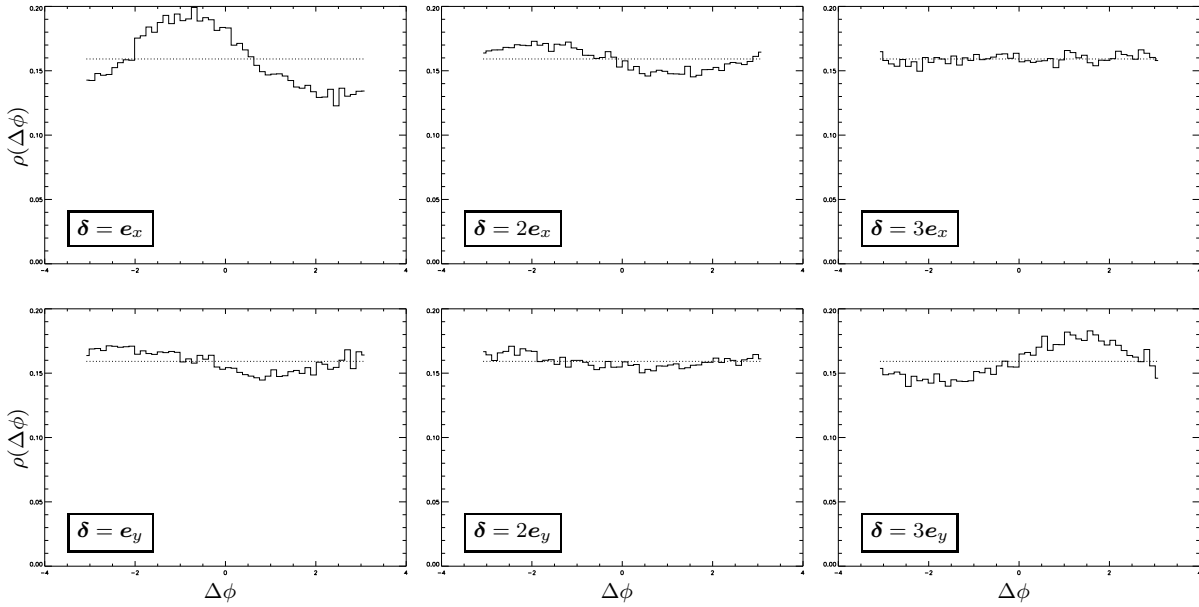


FIG. XVII.15 – Histogrammes des incréments de phase correspondant à la densité de colonne de la figure XVII.6 et à six vecteurs déplacements colinéaires à l'un des deux vecteurs unitaires e_x et e_y .

XVII.6 Évolution de la quantité de structure avec δ

Jusqu'à présent, nous avons considéré les incréments de phase en nous fixant, de manière complètement arbitraire, un vecteur déplacement δ dans l'espace de Fourier. On a néanmoins pu noter, par exemple sur la figure XVII.6, que les histogrammes d'incrément de phase, et par conséquent les quantités de structure associées \mathcal{Q} , pouvaient être très différents suivant le choix de ce vecteur.

On est tenté d'interpréter cette propriété en termes d'orientation préférentielle du gradient de la phase. Or il est possible de calculer explicitement la valeur moyenne de ce vecteur en remarquant que

$$E\{\nabla_{\mathbf{k}}\phi\} = E\{\Delta\phi_x\}e_x + E\{\Delta\phi_y\}e_y, \quad \text{avec } \Delta\phi_i \text{ les incréments de phase associés à } \delta = e_i.$$

Les moyennes des incréments de phase correspondant à chacun des deux vecteurs de la base canonique de l'espace de Fourier sont liées aux coefficients μ obtenus par ajustement de distribution de von Mises. Plus précisément, on a, de manière générale, la relation $E\{\Delta\phi\} = \mu \pm \pi$, la valeur exacte étant celle tombant dans l'intervalle de définition $[-\pi, \pi]$. Par conséquent, l'orientation moyenne du vecteur $\nabla\phi$ n'est pas une mesure globale sur les histogrammes, et elle peut par exemple varier lorsque l'on translate l'image de départ, sans que les amplitudes des oscillations changent pour autant.

Peut-on alors relier les différences globales³ observées, par exemple sur la figure XVII.6, à une orientation préférentielle des structures dans l'espace image? Après tout, c'est cette propriété qui nous intéresse directement, plutôt que l'orientation moyenne du gradient des phases. Autrement dit, il s'agit d'établir si la variation des oscillations des histogrammes en fonction de l'orientation du vecteur δ traduit une anisotropie de l'image. Malheureusement, il ne semble pas, à première vue, que cette relation soit simple. En effet, comme le montre la figure XVII.14, on peut avoir une image présentant une forte anisotropie sans que celle-ci ne se répercute sur les histogrammes des incréments de phase, puisqu'on observe des distributions sensiblement identiques pour $\delta = e_x$ et $\delta = e_y$. À l'inverse, la figure XVII.6 montre des histogrammes très différents, alors qu'on n'observe pas d'anisotropie évidente. S'il est néanmoins permis de supposer qu'il existe effectivement une relation entre, d'une part, la variation des histogrammes des incréments de phase avec l'orientation du vecteur déplacement δ et, d'autre part, l'anisotropie de l'image étudiée, elle est trop complexe pour pouvoir être exploitée dans le cadre de ce travail.

³En termes de quantité de structure \mathcal{Q} ou de coefficient κ .

Dans le même ordre d'idées, on peut s'interroger sur l'évolution des histogrammes d'incrément de phase lorsque la norme du vecteur δ varie. La figure **XVII.15** montre ce qu'on obtient alors, en considérant toujours la densité de colonne de la figure **XVII.6** comme image modèle. Lorsque le vecteur déplacement est colinéaire à e_x , on observe que les oscillations sont de moins en moins marquées au fur et à mesure que les incréments de phase considérés sont pris entre deux points de plus en plus distants. Ceci suggère que la corrélation spatiale des phases disparaît assez rapidement lorsque $|\delta|$ augmente. Cependant, lorsqu'on considère la seconde direction dans l'espace de Fourier, on constate que l'oscillation de l'histogramme est plus forte dans le cas $\delta = 3e_y$ que dans le cas $\delta = e_y$.

Il semble d'ailleurs que les phases de cette image modèle soient corrélées sur des distances plus grande que les trois pixels explorés sur la figure **XVII.15**. En effet, partant de la densité de colonne de la figure **XVII.6**, le calcul des histogrammes correspondant aux vecteurs déplacement $\delta = \delta_x e_x + \delta_y e_y$, avec $|\delta_x| \leq 12$ et $|\delta_y| \leq 12$, permet d'établir une carte de $\mathcal{Q}(\delta)$, comme le montre la figure **XVII.16**. Le tracé des valeurs de la quantité de structure en fonction de la distance à l'origine, également montré sur la figure **XVII.16**, comparé au cas d'un champ brownien fractionnaire de taille 512×512 , permet d'estimer que les phases de la densité de colonne sont corrélées sur plus de quinze pixels, puisque les valeurs de la quantité de structure dans le cas de la densité de colonne restent toujours nettement supérieures à celles obtenues pour le champ brownien fractionnaire⁴. Notons que si l'on cherche à ajuster une forme exponentielle au milieu de ces points, on trouve une longueur de corrélation de l'ordre de 2,3 pixels, mais avec une valeur asymptotique d'environ $6 \cdot 10^{-4}$, soit deux à trois fois supérieure aux valeurs associées aux browniens fractionnaires. On va voir dans la section suivante que cette remarque a son importance quant il s'agira de déterminer la présence de structure dans des images filtrées par un interféromètre.

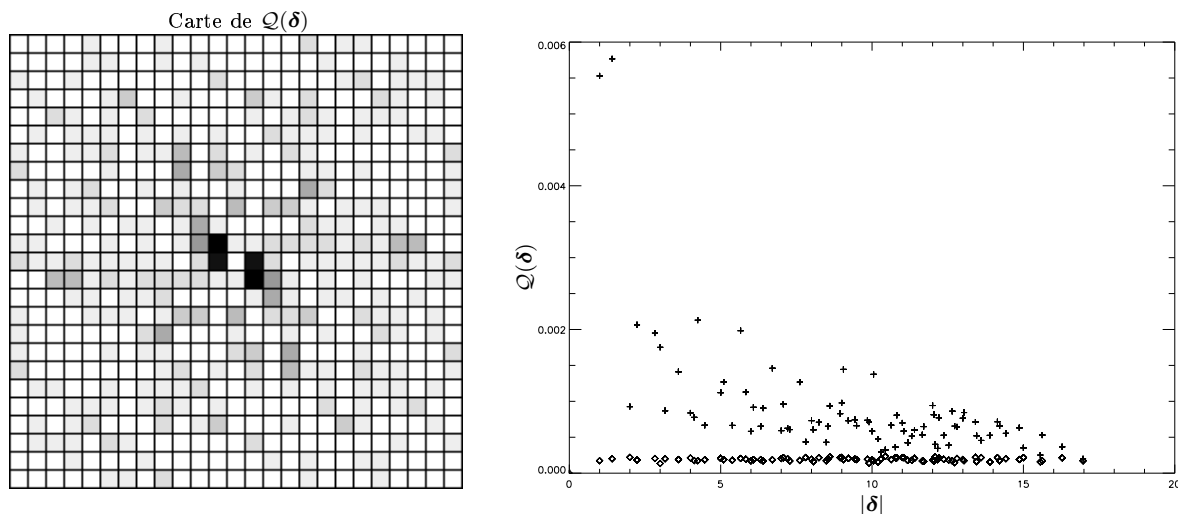


FIG. **XVII.16** – Carte des quantités de structure associées aux histogrammes des incréments de phase de la densité de colonne de la figure **XVII.6**, pour $\delta = \delta_x e_x + \delta_y e_y$ avec $|\delta_x| \leq 12$ et $|\delta_y| \leq 12$ (à gauche) et évolution de \mathcal{Q} avec la norme de δ (à droite). Les pixels de la carte ont été grossis d'un facteur dix pour faciliter la lecture, et sont d'autant plus sombres que la quantité de structure est plus grande. Sur la figure de droite, les croix correspondent au cas de la densité de colonne et les losanges à celui d'un brownien fractionnaire de même taille.

XVII.7 Filtrage interférométrique

XVII.7.a Effets attendus

On a vu au chapitre **XVI** que le filtrage par un interféromètre pouvait dégrader notablement les distributions de brillance observées, en raison d'une part du filtrage dans l'espace de Fourier, et d'autre part de l'effet du lobe d'antenne. On se plaçait alors dans le cadre d'une caractérisation des structures par les seules

⁴Cette évolution de la corrélation dépend *a priori* de l'image considérée. Il ne faut donc pas donner à la valeur numérique trouvée ici une signification trop importante.

amplitudes des composantes de Fourier, et on avait établi que l'outil le plus fiable⁵, dans ce contexte, consistait à calculer directement le spectre de puissance des cartes sales, soit la moyenne azimutale des carrés des modules des visibilités, corrigées de la fonction de poids.

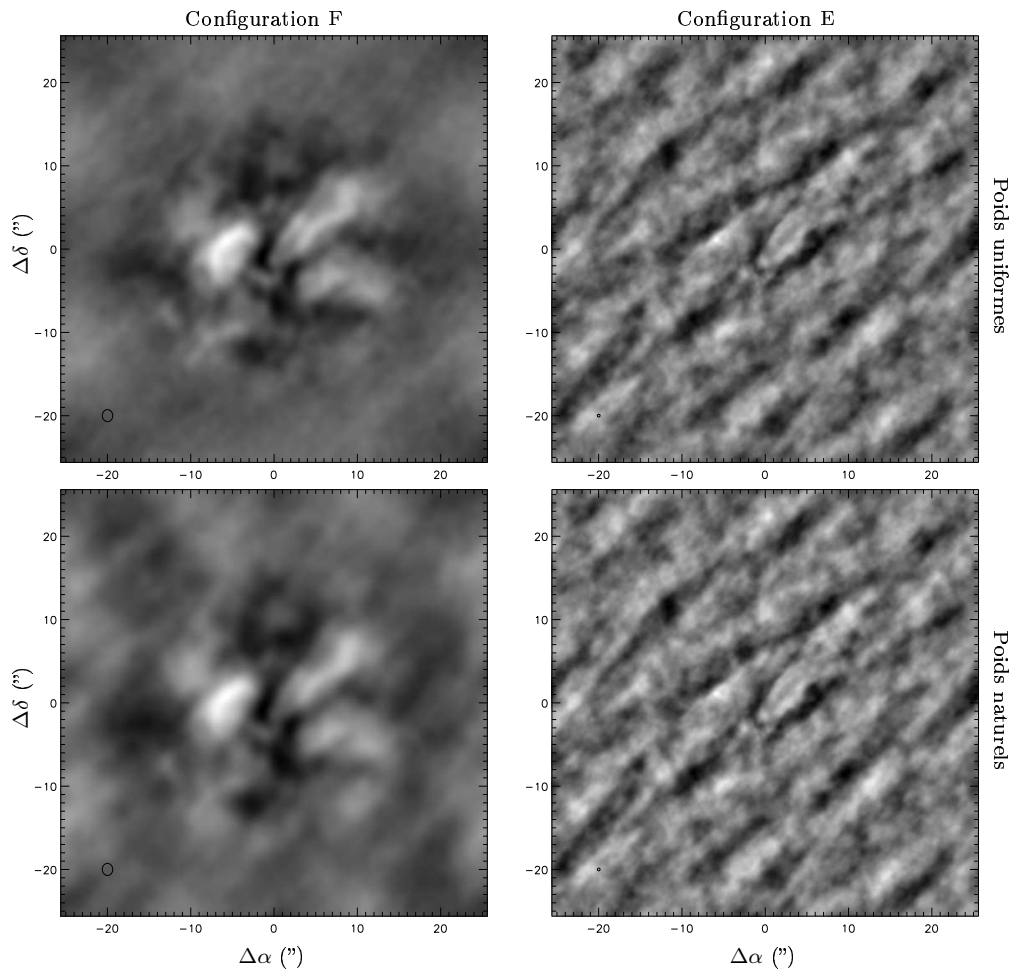


FIG. XVII.17 – Images sales construites à partir de la densité de colonne de la figure XVII.6 en utilisant les deux configurations les plus compactes de la figure XV.4. La taille (FWHM) du lobe synthétisé est indiquée en bas à gauche de chaque sous-figure.

Or, la mesure des visibilités donne également accès, en théorie du moins, aux phases de la distribution de brillance. Il est donc logique de chercher à exploiter cette information complémentaire, par exemple en appliquant les méthodes décrites dans ce chapitre. Que peut-on alors dire *a priori* des incréments de phase des images sales obtenues en sortie du simulateur décrit au chapitre XV? L'effet du lobe primaire, on l'a déjà souligné, se traduit par une convolution dans l'espace de Fourier, avec un noyau dont la taille est inversement proportionnelle au rapport entre la taille de l'image et celle du lobe. En supposant que les amplitudes des composantes de Fourier ne varient presque pas sur une distance de l'ordre de la taille du noyau⁶, Cette convolution revient *grosso modo* à faire une moyenne locale des complexes $\exp(i\phi)$, dont il n'est pas trivial de déterminer la phase. Par conséquent, si l'on peut imaginer que les incréments de phase correspondant à des vecteurs déplacement δ de norme inférieure à la taille du noyau seront fortement modifiés par l'effet du lobe d'antenne, il n'est pas pour autant assuré que les incréments de phase correspondant à des déplacements plus importants soient en revanche peu altérés, puisque les valeurs des phases elles-mêmes sont difficiles à évaluer.

L'effet du filtrage en Fourier, sans atténuation par le lobe primaire et en l'absence de bruit, est plus simple

⁵C'est-à-dire le moins affecté par le filtrage interférométrique.

⁶Ce qu'on peut concevoir si le lobe primaire couvre une grande partie de l'image.

à comprendre, en partant du fait que les seules phases accessibles sont celles correspondant aux points effectivement mesurés. Ce qui suggère que les incréments de phase dont on dispose pour construire les histogrammes sont beaucoup moins nombreux que dans le cas des images non filtrées, d'autant qu'un incréments de phase $\Delta\phi(\mathbf{k}; \boldsymbol{\delta})$ ne peut être considéré que si les deux phases $\phi(\mathbf{k})$ et $\phi(\mathbf{k} + \boldsymbol{\delta})$ sont connues, d'où une limitation⁷ sur la norme maximale de $\boldsymbol{\delta}$. On dispose donc de beaucoup moins de points pour construire les histogrammes. Or, comme l'a montré la figure **XVII.10**, cette diminution du nombre de points augmente considérablement le bruit sur les histogrammes, si l'on ne diminue pas également le nombre de cellules d'échantillonnage. Sous cette dernière condition, on peut en revanche espérer que la forme globale de l'histogramme soit conservée.

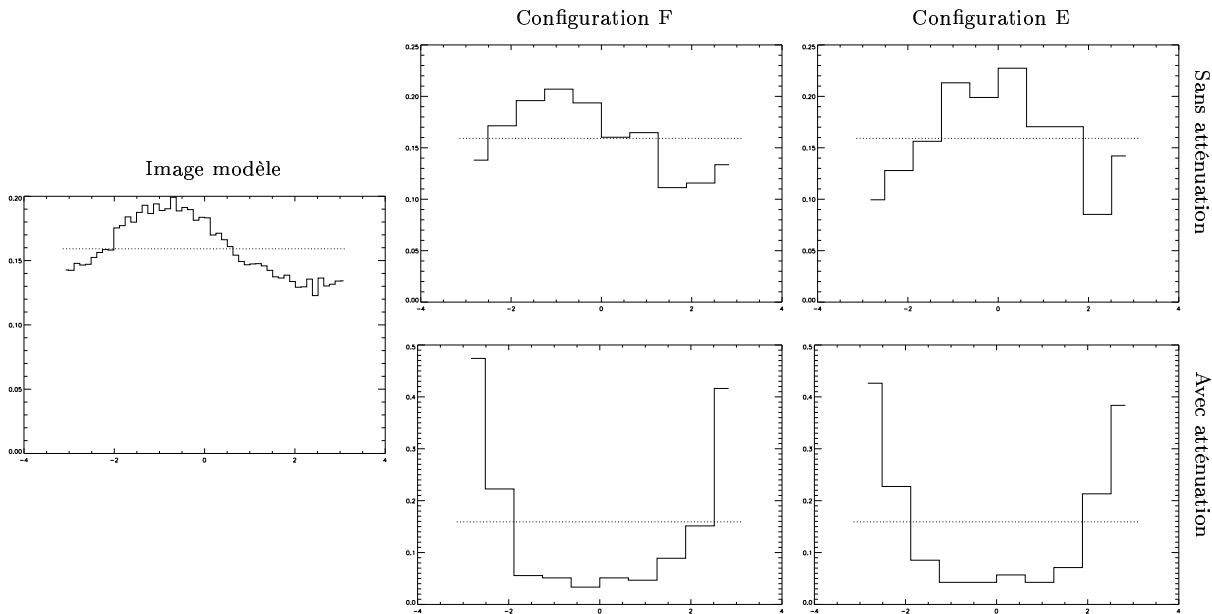


FIG. **XVII.18** – Histogrammes d'incrément de phase correspondant aux images sales construites à partir de la densité de colonne de la figure **XVII.6** en utilisant les configurations instrumentales *F* et *E*, et une fonction de poids uniforme. On présente les deux cas, avec et sans atténuation par le lobe primaire, ainsi que l'histogramme des incréments de phase pour la distribution de brillance modèle. Le vecteur déplacement utilisé est $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{e}_x$.

XVII.7.b Approche numérique

En ce qui concerne l'approche numérique, on construit les images sales associées aux configurations *F* et *E* de la figure **XV.4**, à partir de la densité de colonne de la figure **XVII.6**, en se donnant une taille de pixel de $0,1''$, soit le double de la taille utilisée au chapitre **XVI**, de façon à concilier le fait que l'on dispose d'une distribution de brillance modèle de taille 512×512 , et non plus 1024×1024 , avec un lobe primaire couvrant la même fraction du champ de vue⁸. La figure **XVII.17** montre ainsi les quatre images sales obtenues, selon la configuration et la fonction de poids utilisées.

Les cartes d'incrément de phase contiennent alors un nombre restreint de points valables, d'après ce qui a été dit plus haut. Par exemple, pour $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{e}_x$, au lieu de disposer de 261632 points⁹, on n'en a que 1430 pour la configuration *F* et 224 pour la configuration *E*. On calcule donc leurs histogrammes sur 10 cellules d'échantillonnage au lieu de 50, ce qui permet de limiter le bruit. La figure **XVII.18** montre certains des résultats obtenus, dans le cas où le vecteur déplacement est justement $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{e}_x$.

⁷Limitation peu contraignante, puisqu'on n'imagine pas envisager des vecteurs déplacement de norme plus grande que l'espacement maximal entre deux visibilitées.

⁸On prend toujours une observation en mode *snapshot*, la position de la source étant $h = -5^\circ$ et $\delta = -23^\circ$.

⁹Correspondant au produit 511×512

La forme de l'histogramme est globalement conservée lorsqu'on considère l'image sale construite en utilisant la configuration la plus compacte, et en ne prenant pas en compte l'atténuation par le lobe primaire. C'est encore approximativement vrai dans le cas de la configuration E, bien que ce soit moins clair. En revanche, dès que l'effet du lobe primaire est inclus dans la simulation, les histogrammes sont complètement déformés, avec un pic très marqué au voisinage de $\pm\pi$.

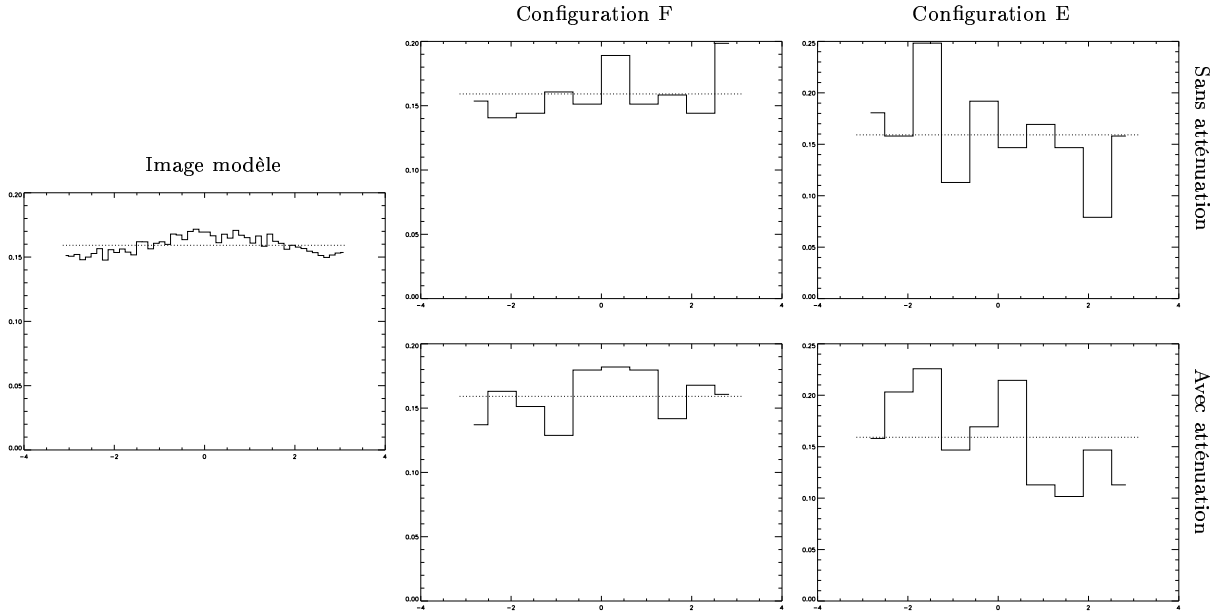


FIG. XVII.19 – Même chose que pour la figure XVII.18, avec cette fois un vecteur déplacement $\delta = 6e_x$.

Afin de tester s'il est possible de remédier à ce problème en utilisant des vecteurs déplacement de plus grande norme¹⁰, on montre, sur la figure XVII.19, les histogrammes d'incrément de phase construits dans les mêmes cas que ceux considérés sur la figure XVII.18, mais pour $\delta = 6e_x$, sachant que la taille caractéristique du noyau de convolution mentionné plus haut est d'environ 2 pixels, puisque le lobe primaire a une taille de l'ordre du moitié de celle de l'image. On constate que la forme globale des histogrammes est en effet conservée dans le cas de la configuration F, mais pas dans le cas de la configuration E. Il semble qu'il faille attribuer cet effet au manque de points de mesure des incréments de phase dans cette configuration. Concernant l'effet du lobe primaire, on voit que celui-ci est minimale puisque les histogrammes sont globalement inchangés lorsqu'on applique l'atténuation. Il faut cependant prendre ces résultats avec prudence, étant donné le bruit statistique.

XVII.7.c Conclusions très provisoires

En conclusion, il semble raisonnable d'affirmer qu'étant donnée une distribution de brillance observée au travers de l'interféromètre, si celle-ci présente une certaine quantité de structure¹¹ et si, comme pour la densité de colonne de la figure XVII.6, cette structure est décelable, sur l'image de départ, pour des déplacements δ plus grands que la taille du noyau de convolution associé au lobe d'antenne, alors on pourra détecter cette structure dans les histogrammes d'incrément de phase des images sales, à condition de disposer d'un suffisamment grand nombre de pixels de mesures¹². Faute de temps, l'étude approfondie des conditions pratiques permettant de retrouver une quantité de structure à partir des images sales n'a malheureusement pas pu être menée à terme dans le cadre de ce travail. On retiendra cependant que la méthode décrite dans ce chapitre n'en est de toutes les façons qu'à ses balbutiements, et que bien que ces premiers résultats soient prometteurs, il faudra certainement fournir encore de nombreux efforts avant de

¹⁰C'est-à-dire plus grande que la taille du noyau de convolution associé au lobe d'antenne.

¹¹Au sens des incréments de phase étudiés dans ce chapitre.

¹²Ce qui suggère de diminuer la taille des pixels dans l'espace de Fourier, en prenant garde à la taille du noyau de convolution et à la complétude de la couverture (u, v) .

comprendre exactement comment la structure d'une image se dissimule dans la distribution spatiale de la phase. En particulier, il est probable que l'amplitude des composantes de Fourier doive jouer un rôle de pondération qui n'a pas du tout été abordé ici.

□