

TROISIÈME PARTIE

Statistique des centroïdes de vitesse

Dr. Emmett Brown : If my calculations are correct, when this baby hits eighty-eight miles per hour... you're gonna see some serious shit.

"Back to the future" (Robert Zemeckis)

CHAPITRE IX

Observations de spectro-imagerie

IX.1 Introduction

L'exploitation correcte des observations astronomiques nécessite de prendre en considération plusieurs problèmes afin de décrire correctement les objets et les processus étudiés. En particulier, en ce qui concerne la physique du milieu interstellaire, il faut noter que les données d'émission de raies dépendent de la vitesse, et plus précisément de sa composante longitudinale¹, en raison du décalage Doppler-Fizeau. De plus, l'information dont on dispose est nécessairement intégrée le long de la ligne de visée, et les problèmes de transfert radiatif aboutissent à des expressions dans lesquelles les champs de densité et de vitesse sont mélangés de manière complexe [Hegmann & Kegel, 2000], comme on en discutera dans la cinquième partie. Ainsi, pour décrire les conditions et les processus physiques à l'œuvre dans le MIS, il faut se contenter d'une seule quantité observable pour une ligne de visée et une vitesse longitudinale données. Cette quantité est typiquement la température de brillance² $T_b(\mathbf{X}, u)$, caractérisant l'intensité du rayonnement observé dans une certaine direction³ \mathbf{X} et à une certaine vitesse u . Bien que la comparaison des températures de brillance pour divers traceurs, qu'il s'agisse d'espèces différentes, de transitions différentes ou de polarisations différentes, permette de déterminer certains paramètres physiques des milieux observés, il est néanmoins nécessaire, si l'on souhaite avoir accès aux propriétés tridimensionnelles telles que la densité et la vitesse, de résoudre un problème inverse à partir de données dépendant de deux coordonnées d'espace et d'une coordonnée de vitesse. Cette étape est indispensable dans l'optique de comparer les observations aux modèles théoriques, par exemple pour estimer les rôles de la gravité, du champ magnétique, ou de la turbulence. En particulier, les mouvements turbulents dans le milieu interstellaire, qu'on a évoqués au **II.4.a** et au **III.7**, doivent être correctement décrits [Vazquez-Semadeni *et al.*, 2000], car ils pourraient expliquer nombre de propriétés des raies spectrales [Baker, 1976], tout en fournissant un support efficace contre l'effondrement gravitationnel [Klessen *et al.*, 2000, Heitsch *et al.*, 2001], expliquant par là même le fait que la durée de vie des nuages moléculaires est plus grande que leur temps de chute libre [Scalo, 1985] et que le taux de formation stellaire est donc plus faible que ce qu'on pourrait déduire d'un simple modèle de nuage en effondrement [Zuckerman & Evans, 1974]. La turbulence pourrait également avoir une influence non-linéaire importante sur l'évolution de la poussière en accélérant la coagulation ou la fragmentation des grains [Falgarone & Puget, 1995, Miville-Deschênes *et al.*, 2002], ainsi que sur l'évolution chimique du milieu interstellaire, la dissipation intermittente de l'énergie pouvant favoriser localement des réactions chimiques endothermiques [Joulain *et al.*, 1998].

Comme on vient de le faire remarquer, cette description doit passer par la température de brillance, et il existe un certain nombre de méthodes visant à déduire les propriétés statistiques des champs tridimensionnels à partir des données observationnelles. On les discutera brièvement au début du chapitre **X**, et on se contente ici de souligner que le principal but de ces travaux est de relier les propriétés des observables, en fonction de l'échelle considérée, à des lois d'échelle portant sur les champs tridimensionnels.

Avant de traiter ce problème, qui occupera les chapitres **X** à **XIII**, il s'agit tout d'abord de mettre en place les idées et les notations qui seront utilisées tout au long de cette partie, et d'introduire les observables qui seront étudiées dans la suite.

IX.2 Notations et hypothèses

On repérera un point quelconque de l'espace à trois dimensions par un vecteur tridimensionnel \mathbf{x} . Les cartes bidimensionnelles seront, elles, écrites en fonction d'un vecteur \mathbf{X} situé dans le plan du ciel. Clairement, ce

¹C'est-à-dire parallèle à la ligne de visée.

²Voir le chapitre **XVIII** et en particulier le **XVIII.5.c**.

³Le vecteur \mathbf{X} est bidimensionnel et situé dans le plan du ciel. Il repère la position de la ligne de visée.

vecteur n'est autre que la projection de \mathbf{x} parallèlement à la ligne de visée. On notera \mathbf{u}_z le vecteur unitaire de la ligne de visée, de sorte qu'on écrira la relation entre les vecteurs bidimensionnels et tridimensionnels sous la forme $\mathbf{x} = \mathbf{X} + z\mathbf{u}_z$, qu'on notera souvent aussi $\mathbf{x} = (\mathbf{X}, z)$. Il faut ici remarquer qu'il est nécessaire de ne s'intéresser qu'à une petite surface du ciel, de façon à ce que les différentes lignes de visée puissent être considérées comme parallèles.

Dans les chapitres suivants, on utilisera essentiellement les séparations entre deux lignes de visée et entre deux points de l'espace, l'origine des cartes ainsi que celle de l'espace tridimensionnel étant choisies arbitrairement et ne possédant aucune signification intrinsèque. On notera $\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ la séparation tridimensionnelle entre les points \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 , qui donne lieu, sur les cartes bidimensionnelles, à une séparation apparente $\mathbf{R} = \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1$ entre les lignes de visée correspondantes \mathbf{X}_1 et \mathbf{X}_2 . Ces notations sont illustrées sur la figure IX.1. En définitive, les vecteurs écrits en minuscule correspondront toujours à des quantités tridimensionnelles, tandis que leurs équivalents en majuscule désigneront leurs projections sur le plan du ciel.

En ce qui concerne les champs tridimensionnels de densité et de vitesse on les notera respectivement $\rho(\mathbf{x})$ et $\mathbf{v}(\mathbf{x})$. La composante longitudinale de la vitesse sera désignée par $v(\mathbf{x})$.

On supposera que l'observation est faite dans une transition optiquement mince, en prenant l'exemple de la raie à 21 cm de l'hydrogène atomique neutre H_I, que la fréquence est suffisamment basse pour que l'approximation de Rayleigh-Jeans soit valable, que les conditions d'excitation de la transition, en particulier la température cinétique, sont uniformes dans le milieu étudié, et enfin qu'il n'existe pas de rayonnement illuminant le nuage par l'arrière dans ce domaine de fréquences.

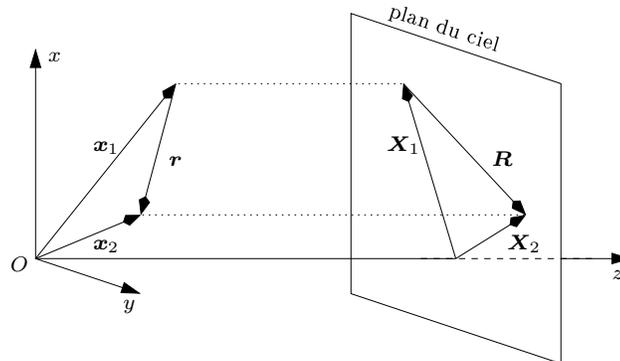


FIG. IX.1 – Convention de notation utilisée dans toute la troisième partie. Les minuscules représentent des vecteurs tridimensionnels, tandis que les majuscules correspondantes désignent leurs projections sur le plan du ciel (xOy). La direction perpendiculaire à celui-ci est celle de l'observateur.

IX.3 Expression des observables

IX.3.a Température de brillance

Suivant la méthode de [Dickman & Kleiner, 1985], on va exprimer l'intensité spécifique⁴ à une fréquence ν issue d'une ligne de visée \mathbf{X} comme une température de brillance $T_b(\mathbf{X}, u)$ dépendant de la vitesse u par rapport à l'observateur, laquelle est reliée à la fréquence par l'effet Doppler-Fizeau,

$$u = \left(\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} \right) c + u_0 \quad \text{où } \nu_0 \text{ est la fréquence au repos de la transition.}$$

La constante u_0 permet de spécifier l'origine des vitesses vis-à-vis de l'observateur. La température de brillance, caractérisant l'émission sortant du nuage observé perpendiculairement à la surface de celui-ci,

⁴Voir le chapitre XVIII.

est la solution de l'équation de transfert radiatif (voir le chapitre **XVIII**), et s'écrit

$$T_b(\mathbf{X}, u) = \int_0^{\tau_0} T_{\text{ex}}(\mathbf{x}) \exp(-\tau) d\tau, \quad (37)$$

avec T_{ex} la température d'excitation et τ la profondeur optique. Celle-ci dépend de la position z le long de la ligne de visée, comme on l'a noté. Plus précisément, τ désigne la profondeur optique entre le fond du nuage, situé par convention ici en $z = 0$, et la position z . D'autre part, la profondeur optique dépend également de la ligne de visée \mathbf{X} considérée, ainsi que de la vitesse u , puisqu'on sait notamment qu'un milieu est *a priori* plus opaque au centre de la raie que dans ses ailes. La limite d'intégration τ_0 est égale à la profondeur optique totale du nuage dans la direction et à la vitesse considérées. L'hypothèse d'une transition optiquement mince permet de s'affranchir du facteur exponentiel en l'assimilant à l'unité. D'autre part, étant donné que la profondeur optique est égale à l'intégrale du coefficient d'absorption, on peut réécrire la température de brillance comme

$$T_b(\mathbf{X}, u) = \int T_{\text{ex}}(\mathbf{x}) \kappa_0(\mathbf{x}) \phi[v(\mathbf{x}) - u] dz, \quad (38)$$

où l'intégration est effectuée sur la ligne de visée. Dans cette équation, κ_0 est le coefficient d'absorption à la position \mathbf{x} , intégré sur tout le profil de la raie, et ϕ est le profil normalisé de la distribution des vitesses, supposé symétrique par rapport à zéro et indépendant de \mathbf{x} . Par exemple, si l'on ne considère que l'élargissement thermique, ϕ prend la forme gaussienne suivante,

$$\phi(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\text{th}}} \exp\left[-\frac{w^2}{2\sigma_{\text{th}}^2}\right] \quad \text{avec } \sigma_{\text{th}} \text{ la dispersion de vitesse thermique.}$$

L'argument translaté $v(\mathbf{x}) - u$ de ϕ dans l'équation (38) exprime simplement le fait que l'émission à la position \mathbf{x} est élargie autour de la vitesse locale le long de la ligne de visée $v(\mathbf{x})$. En faisant l'hypothèse de conditions d'excitation uniformes, T_{ex} est une constante, et $\kappa_0(\mathbf{x})$ est proportionnel à la densité locale du gaz $\rho(\mathbf{x})$, de sorte que l'on a

$$T_b(\mathbf{X}, u) = \int \alpha \rho(\mathbf{x}) \phi[v(\mathbf{x}) - u] dz \quad \text{où } \alpha \text{ est une constante de proportionnalité.} \quad (39)$$

Cette expression montre déjà que, même avec des hypothèses simplificatrices, la tâche d'extraire les propriétés de la densité et de la vitesse à partir des données observationnelles $T_b(\mathbf{X}, u)$ est ardue.

IX.3.b Cartes des moments de la température de brillance

Toute l'information disponible quant aux propriétés des champs tridimensionnels de densité et de vitesse se trouve dans les cubes⁵ de données $T_b(\mathbf{X}, u)$. La manipulation de ces cubes entiers peut cependant se révéler difficile, bien qu'il existe des méthodes fondées sur leur analyse globale, comme on le verra au chapitre **XIII**. Pour simplifier le problème, on peut tirer de ces données des cartes bidimensionnelles, en calculant, pour chaque direction \mathbf{X} , les moments successifs du profil en vitesse de la température de brillance. Cette approche est justifiée si l'on se rappelle que la connaissance des moments d'une variable aléatoire est équivalente à celle de la distribution de probabilité complète. On va donc considérer les cartes de moments W_n définies par

$$W_n(\mathbf{X}) = \int u^n T_b(\mathbf{X}, u) du \quad \text{avec } n \text{ entier positif ou nul.} \quad (40)$$

L'intégration est faite sur toutes les vitesses de $-\infty$ à ∞ , ce qui ne pose pas de problème de convergence si l'on suppose que toute émission continuum a d'abord été soustraite, de façon à ce que la raie soit à support fini. Utilisant l'expression (39) de la température de brillance, on a

$$W_n(\mathbf{X}) = \int u^n \left\{ \alpha \int \rho(\mathbf{x}) \phi[v(\mathbf{x}) - u] dz \right\} du = \alpha \int \rho(\mathbf{x}) \left\{ \int \phi(w) [v(\mathbf{x}) - w]^n dw \right\} dz,$$

⁵On parle de cubes position-position-vitesse ou PPV, d'après les dimensions de leurs coordonnées.

où l'on a introduit la variable $w = v(\mathbf{x}) - u$ donnant l'écart entre la vitesse observée et la vitesse de l'écoulement au point considéré. Après développement de l'intégrande dans l'intégrale centrale, et puisque le profil local de la raie ϕ est supposé indépendant de la position \mathbf{x} , on obtient

$$W_n(\mathbf{X}) = \sum_{k=0}^n C_k^n D_k^n \int \rho(\mathbf{x}) v^k(\mathbf{x}) dz \quad \text{avec} \quad D_k^n = \alpha \int (-w)^{n-k} \phi(w) dw. \quad \text{et} \quad C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (41)$$

Il faut noter que l'hypothèse de symétrie de ϕ implique que pour $n-k$ impair, D_k^n est nul. Les deux premiers moments sont particulièrement utilisés, puisqu'il s'agit par définition de l'intensité totale émergente $W_0 = I$ et du centroïde de vitesse non normalisé $W_1 = C$, respectivement,

$$I(\mathbf{X}) = W_0(\mathbf{X}) = \alpha \int \rho(\mathbf{x}) dz = \alpha N(\mathbf{X}) \quad \text{et} \quad C(\mathbf{X}) = W_1(\mathbf{X}) = \alpha \int \rho(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) dz. \quad (42)$$

On a noté ici $N(\mathbf{X})$ la densité de colonne à la position \mathbf{X} . Dans les chapitres suivants, et dans l'optique de déterminer la statistique des champs de densité et de vitesse, on ne considérera que ces deux premiers moments. L'utilisation de moments d'ordre plus élevé pourrait théoriquement fournir plus d'informations sur la structuration du milieu, mais en pratique, leur utilité est limitée par la résolution spectrale et par le niveau du bruit. On va d'ailleurs discuter de ces problèmes dans la section suivante, au sujet de l'intensité intégrée I et du centroïde non normalisé C .

IX.4 Détermination pratique de l'intensité et du centroïde

IX.4.a Mise en place du problème

En raison de la résolution spectrale finie des observations, les profils spectraux observés ne sont pas parfaitement définis à toutes les fréquences, même en l'absence de bruit. On dispose en réalité d'histogrammes donnant l'émission intégrée sur une bande passante autour d'un certain nombre de fréquences d'échantillonnage (ν_1, \dots, ν_n) correspondant à des vitesses (u_1, \dots, u_n) le long de la ligne de visée. On notera G_k la bande passante du canal c_k , qui est une fonction de la vitesse u , et w_k sa largeur. L'émission contenue dans le canal c_k est alors caractérisée par une température T_k ,

$$T_k(\mathbf{X}) = \int G_k(u) T_b(\mathbf{X}, u) du \quad \text{la bande passante ayant la dimension de l'inverse d'une vitesse.}$$

L'intensité émergente est alors calculée en pratique comme une somme discrète \tilde{I} , qu'on peut voir comme un estimateur statistique de l'intégrale définissant la véritable intensité intégrée I ,

$$\tilde{I}(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^n T_k(\mathbf{X}) w_k = \sum_{k=1}^n w_k \int G_k(u) T_b(\mathbf{X}, u) du \quad \text{alors que} \quad I(\mathbf{X}) = \int T_b(\mathbf{X}, u) du.$$

Le centroïde de vitesse est également estimé comme une somme discrète,

$$\tilde{C}(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^n u_k T_k(\mathbf{X}) w_k = \sum_{k=1}^n u_k w_k \int G_k(u) T_b(\mathbf{X}, u) du \quad \text{alors que} \quad C(\mathbf{X}) = \int u T_b(\mathbf{X}, u) du.$$

De même, l'estimation pratique \tilde{C}_0 du centroïde de vitesse normalisé C_0 , lequel est défini comme le rapport C/I , est alors donnée par le rapport de \tilde{C} à \tilde{I} . Notons qu'on a écrit ici la forme la plus générale du problème, étant entendu que les vitesses (u_k) peuvent ne pas être régulièrement espacées, que les bandes passantes (G_k) peuvent être différentes les unes des autres, et que la définition des largeurs (w_k) des canaux dépend des bandes passantes. Classiquement, la question qui se pose est de savoir quelle est l'erreur commise en assimilant les estimateurs aux valeurs réelles, sachant que la qualité de ces estimations est affectée par trois grands types de phénomènes :

▷ L'échantillonnage de la vitesse, c'est-à-dire les valeurs des largeurs (w_k) , dont il est clair que plus elles sont petites, meilleure est la résolution en vitesse et meilleure est l'estimation du spectre.

- ▷ Le bruit intrinsèque aux mesures d'intensité, qui peut être dû d'une part à l'électronique des circuits de mesure⁶ et d'autre part au bruit thermique de l'atmosphère.
- ▷ Les erreurs systématiques de calibration des axes en vitesse et en température.

Pety [Pety, 1999] a étudié les effets des deux dernières causes d'erreur dans l'estimation du centroïde normalisé. Pour traiter le problème du bruit intrinsèque, il traite les valeurs $T_k(\mathbf{X})$ comme les moyennes de variables aléatoires gaussiennes indépendantes t_k , de même variance σ^2 . À partir de là, il détermine la densité de probabilité du quotient déterminant l'estimateur du centroïde normalisé, ce qui permet d'estimer l'incertitude affectant le calcul de celui-ci, en fonction des paramètres du problème. On renvoie le lecteur intéressé à ce travail [Pety, 1999], en soulignant que les causes d'incertitudes importantes qu'il met en évidence sont essentiellement la largeur de la fenêtre en vitesse⁷, l'asymétrie de la raie, ainsi que le rapport signal sur bruit. En ce qui concerne l'étude des biais systématiques, Pety [Pety, 1999] considère les cas où les mauvais étalonnages n'affectent qu'un seul axe à la fois, et il apparaît encore une fois qu'un faible niveau de bruit ainsi qu'une définition locale de la raie sont les facteurs essentiels de la qualité de l'estimation du centroïde.

Pour notre part, nous allons simplement traiter le problème de la résolution en vitesse, en commençant par le cas de l'intensité intégrée.

IX.4.b Le cas de l'intensité intégrée

Les simulations présentées au chapitre XII sont caractérisées par des bandes passantes de type porte,

$$G_k(u) = \frac{1}{w_k} \square\left(\frac{u - u_k}{w_k}\right) \quad \text{où l'on utilise la fonction porte} \quad \square(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } |x| > 1/2 \end{cases},$$

et l'on supposera que les vitesses échantillonnées (u_k) sont choisies de telle sorte que chaque vitesse tombant dans la fenêtre de raie soit couverte par un canal et un seul, ce que montre la figure IX.2. De plus, les canaux qu'on prendra dans les simulations auront tous la même largeur w , de sorte que les vitesses échantillonnées seront données par $u_k = u_1 + (k - 1)w$. Ce sont ces conventions simplificatrices que nous allons utiliser ici.

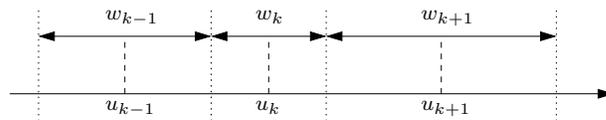


FIG. IX.2 – Condition de non recouvrement des canaux en vitesse.

Les températures mesurées $T_k(\mathbf{X})$ sont alors données par les intégrales de la température de brillance vraie T_b sur les domaines de vitesse définis par chaque canal,

$$T_k(\mathbf{X}) = \int \frac{1}{w} \square\left(\frac{u - u_k}{w}\right) T_b(\mathbf{X}, u) du = \frac{1}{w} \int_{c_k} T_b(\mathbf{X}, u) du, \quad (43)$$

de sorte que l'estimateur de l'intensité est évidemment strictement égal à l'intensité véritable. Ce résultat est d'ailleurs valable aussi si les différents canaux n'ont pas la même largeur en vitesse, dès lors que la condition représentée sur la figure IX.2 est remplie. Par conséquent, les incertitudes sur les déterminations respectives du centroïde non normalisé et du centroïde normalisé sont proportionnelles l'une à l'autre, puisqu'il n'existe pas, ici, d'incertitude sur l'intensité.

IX.4.c Le cas du centroïde de vitesse

La forme (43) des températures mesurées dans chaque canal en vitesse permet d'écrire l'erreur faite en assimilant l'estimateur du centroïde non normalisé à la valeur vraie comme une intégrale portant sur

⁶On refroidit d'ailleurs les détecteurs pour limiter cette cause de bruit.

⁷Il s'agit de la différence $W = u_n - u_1$.

l'ensemble du domaine en vitesse, en introduisant les fonctions indicatrices⁸ des canaux

$$\Delta(\mathbf{X}) = \tilde{C}(\mathbf{X}) - C(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^n u_k \int_{c_k} T_b(\mathbf{X}, u) du - \int u T_b(\mathbf{X}, u) du = \int \sum_{k=1}^n (u_k - u) \mathbf{1}_{c_k}(u) T_b(\mathbf{X}, u) du.$$

La résolution spectrale w étant fixée, on peut majorer l'incertitude sur le calcul du centroïde,

$$|\Delta(\mathbf{X})| \leq \int \sum_{k=1}^n |u_k - u| \mathbf{1}_{c_k}(u) T_b(\mathbf{X}, u) du \leq \int w T_b(\mathbf{X}, u) du = w I(\mathbf{X}) = \frac{W}{n} I(\mathbf{X}).$$

En ce qui concerne le centroïde normalisé, il ne fait aucun doute que l'incertitude qui l'affecte

$$\Delta_0(\mathbf{X}) = \tilde{C}_0(\mathbf{X}) - C_0(\mathbf{X}) = \frac{\Delta(\mathbf{X})}{I(\mathbf{X})} \text{ est majorée par } \frac{W}{n}.$$

L'estimation numérique de l'incertitude se fait en translatant la raie parallèlement à elle-même le long de l'axe des vitesses, d'une quantité u_0 , et en étudiant la variation de Δ avec u_0 . Plus précisément, on se donne une raie spectrale définie par un grand nombre N de points et à support compact, puis une résolution en vitesse w , comptée en pixels et spécifiée par le nombre n de canaux, puisque l'extension de la raie est donnée au départ. On considère ensuite toutes les subdivisions pertinentes du support de la raie ayant cette résolution, sachant qu'il en existe environ $w/2$. La "vraie" valeur du centroïde étant calculée sur l'ensemble des N points, on peut calculer l'erreur Δ commise pour chaque subdivision à résolution fixée, et on donnera, comme estimation de l'incertitude à cette résolution, l'écart-type σ_Δ de l'ensemble des valeurs de Δ . On calcule de la même façon l'écart-type σ_{Δ_0} sur les valeurs de Δ_0 . Le résultat des tests effectués sur l'exemple d'une raie constituée de la somme de deux gaussiennes est présenté sur la figure IX.3, qui montre l'évolution de σ_Δ et de σ_{Δ_0} en fonction de l'inverse de la largeur en vitesse w des canaux.

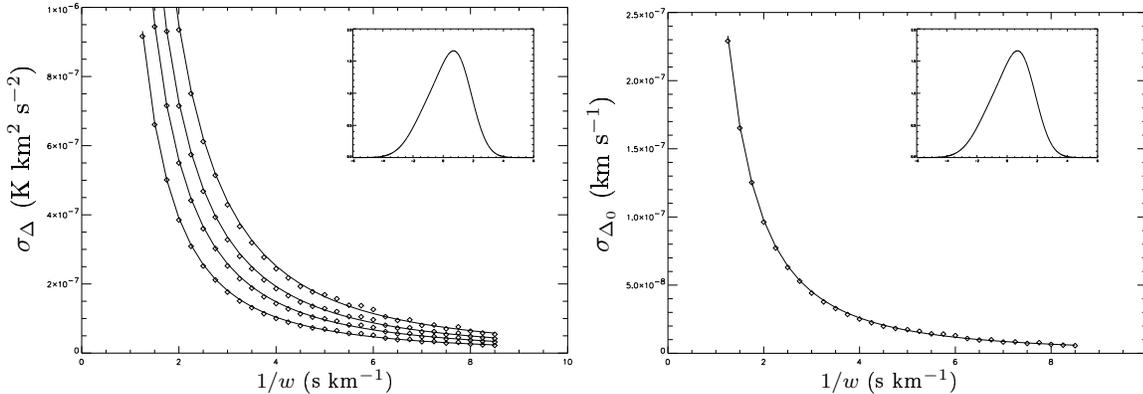


FIG. IX.3 – Évolution des écarts-type σ_Δ (à gauche) et σ_{Δ_0} (à droite) en fonction de la résolution en vitesse, pour une raie dont la forme est indiquée en médaillon sur chaque figure. Les mesures sont représentées par des losanges, les courbes en trait plein sont quant à elles des ajustements de la forme $(a + b/w)^{-2}$. Sur la figure de gauche, les différentes courbes correspondent à des profils de raie homothétiques les uns des autres. Seule la courbe inférieure est un ajustement, les autres en sont déduites en multipliant par le rapport des intensités intégrées.

On voit notamment que les écarts-type entre les estimateurs des centroïdes et les valeurs vraies, alors qu'on pourrait s'attendre à ce que $\sigma_\Delta \propto wI$ et $\sigma_{\Delta_0} \propto w$, se comportent en fait comme

$$\sigma_\Delta = I \left(a + \frac{b}{w} \right)^{-2} \quad \text{et} \quad \sigma_{\Delta_0} = \left(a + \frac{b}{w} \right)^{-2},$$

⁸On rappelle que la fonction indicatrice $\mathbf{1}_I$ d'un intervalle I est la fonction valant 1 sur I et 0 partout ailleurs.

mais bien entendu les majorations qu'on a écrites plus haut sont tellement grossières qu'il n'est pas étonnant de trouver un comportement différent. Cependant, la précision de l'ajustement trouvé sur les courbes de la figure IX.3 ne doit pas être considérée comme universelle. Il suffit, pour s'en rendre compte, de modifier la raie utilisée de façon à la rendre plus chaotique, en la multipliant simplement par un brownien fractionnaire unidimensionnel. La figure IX.4 montre le résultat de deux expériences numériques de ce type.

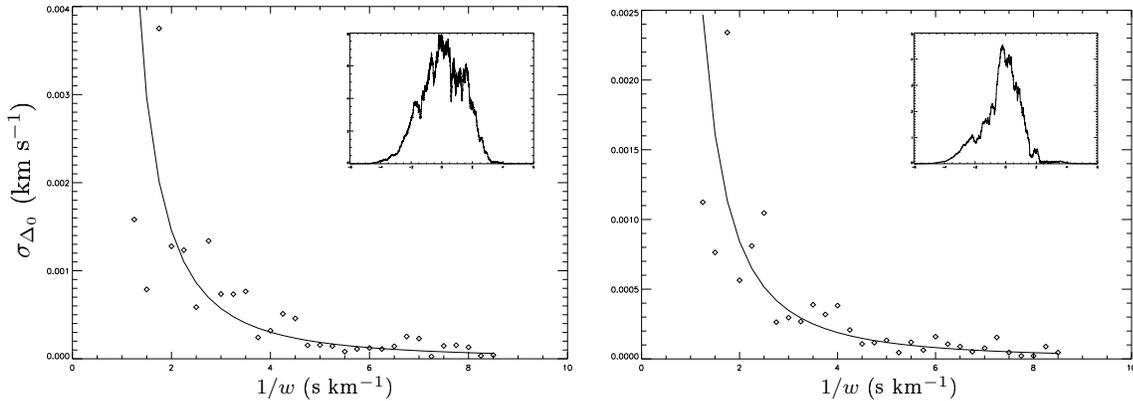


FIG. IX.4 – Évolution de l'écart-type σ_{Δ_0} en fonction de la résolution en vitesse, pour une raie dont la forme est indiquée en médaillon sur chaque figure. Il s'agit de la raie de la figure IX.3, multipliée par des mouvements browniens fractionnaires d'indices spectraux respectifs $\beta = 2$ (à gauche) et $\beta = 2,5$ (à droite). Les mesures sont représentées par des losanges et les courbes en trait plein sont des ajustements de la forme $(a + b/w)^{-2}$.

On voit que, bien que le comportement global semble toujours suivre la loi en $(a + b/w)^{-2}$, la dispersion autour de celle-ci devient assez importante. On entrevoit là toute une problématique dont il n'est pas apparent qu'elle soit utile pour l'étude de la statistique des centroïdes de vitesse qui va suivre. C'est pourquoi on s'en tiendra là en ce qui concerne la précision des estimateurs, et on les assimilera dorénavant aux véritables valeurs, correspondant à une résolution en vitesse infinie.

□

CHAPITRE X

Étude analytique des centroïdes de vitesse

X.1 Introduction

X.1.a Du bidimensionnel au tridimensionnel

Le chapitre précédent a permis de montrer que, dans le cas très simplifié d'une source observée dans une transition optiquement mince, et si les conditions d'excitation sont uniformes, on peut relier simplement des quantités observables, à savoir les moments de la distribution en vitesse de la température de brillance dans une direction donnée, à des quantités dépendant, sous forme intégrale, des champs tridimensionnels de densité et de vitesse. On dispose donc, théoriquement, d'une infinité de cartes bidimensionnelles des sources observées, notées $W_n(\mathbf{X})$, dépendant évidemment de la ligne de visée \mathbf{X} et de l'ordre n du moment considéré.

La question qui se pose alors naturellement est de savoir si et comment on peut relier les propriétés statistiques de ces cartes bidimensionnelles à des lois d'échelle s'appliquant aux champs tridimensionnels de densité $\rho(\mathbf{x})$ et de vitesse $v(\mathbf{x})$.

Un exemple de lien de ce type est celui établi [Stutzki *et al.*, 1998], pour des observations dans une raie optiquement mince d'un milieu uniformément excité, statistiquement homogène et isotrope, entre l'indice spectral β_I de la carte d'émission intégrée et celui β_ρ du champ de densité tridimensionnel. On montre en effet que ces deux indices sont égaux dès lors que la profondeur sondée est plus grande que les échelles transverses considérées [Goldman, 2000]. Dans le cas où, au contraire, les échelles transverses sont bien plus grandes que la profondeur du milieu, la relation entre ces deux indices est également très simple. La transition entre les deux régimes permet de déterminer l'épaisseur d'une structure diffuse, comme l'a fait Elmegreen [Elmegreen *et al.*, 2001] dans le cas du grand nuage de Magellan (LMC).

En ce qui concerne l'obtention des propriétés statistiques du champ de vitesse, il apparaît très vite que l'on ne peut pas *a priori* effectuer une analyse aussi simple que dans le cas du champ de densité, ceci parce que les observables écrites au chapitre précédent ne font jamais intervenir le champ de vitesse seul. Toutes les intégrales le long de la ligne de visée contiennent en effet le champ de densité. Les propriétés statistiques qu'on pourrait déduire seraient donc nécessairement entachées, d'une manière ou d'une autre, par les fluctuations de la densité du milieu. Pour contourner cette difficulté, il existe un certain nombre de méthodes indirectes, visant explicitement à déduire les propriétés statistiques du champ de vitesse à partir des données observationnelles. Parmi elles, on note l'analyse des canaux en vitesse (VCA) de Lazarian et Pogosyan [Lazarian & Pogosyan, 2000], fondée sur l'étude analytique des propriétés des cartes par canaux en fonction de leur largeur en vitesse. Elle est probablement difficile à utiliser en pratique sur des observations réelles, comme on le verra au chapitre **XIII**. Sa justification analytique est en outre particulièrement ardue et parfois contre-intuitive. Les centroïdes de vitesse modifiés de Lazarian et Esquivel [Lazarian & Esquivel, 2003] sont une tentative récente et prometteuse de réduire l'influence des fluctuations de densité dans les propriétés statistiques des centroïdes, bien qu'on puisse leur reprocher de n'être définis, semble-t-il, qu'au travers de leur fonction de structure d'ordre deux. Un dernier exemple de méthode de récupération des statistiques de vitesse est l'analyse en composantes principales (PCA), qui étudie directement les cubes de données $T_b(\mathbf{X}, u)$ et les décompose sur une base orthogonale afin d'en déduire les propriétés du champ de vitesse à chaque échelle. Elle a été calibrée numériquement par [Brunt *et al.*, 2003] sur des simulations de champs browniens fractionnaires.

X.1.b Les objectifs

Curieusement, il n'existe cependant aucune approche directe du problème, consistant à prendre les cartes bidimensionnelles telles qu'elles se présentent, et à calculer leurs propriétés statistiques à l'aide d'un outil

suffisamment simple pour pouvoir être manipulable, mais suffisamment puissant pour être d'usage courant. Il apparaît en effet naturel de penser que les propriétés structurelles des champs de vitesse et de densité doivent, d'une manière ou d'une autre, apparaître dans les mesures statistiques effectuées sur les cartes W_n , étant données les relations (41). C'est précisément l'objectif premier de ce chapitre que de montrer, dans le cadre d'un modèle extrêmement simple de nuage interstellaire turbulent, qu'il est effectivement possible de relier les propriétés statistiques des centroïdes de vitesse $C = W_1$ à celles des champs de densité et de vitesse, et de calculer explicitement cette relation moyennant certaines hypothèses raisonnables.

Le deuxième objectif de ce chapitre est de mieux comprendre ce que représente la normalisation des centroïdes de vitesse [Münch, 1958, Dickman & Kleiner, 1985]. En effet, comme on l'a déjà fait remarquer, étant donnée l'expression (42) du centroïde C , il apparaît que les fluctuations de densité pourraient affecter l'estimation des statistiques de la vitesse à partir de cette carte. Pour pallier cette difficulté, il est d'usage d'utiliser le centroïde normalisé C_0 , qu'on définit simplement par le rapport C/I , où I est l'intensité donnée par l'équation (42). Cette méthode est habituellement et empiriquement justifiée par l'hypothèse selon laquelle les fluctuations de densité dans C sont également présentes dans I , de sorte qu'elles doivent d'une certaine façon disparaître dans C_0 . Dans le cas simplifié où les seules fluctuations de densité présentes sont transverses à la ligne de visée, ce raisonnement est clairement correct, et la normalisation permet alors de s'affranchir véritablement des fluctuations de densité. Cependant, l'hypothèse d'isotropie interdit d'avoir des fluctuations transverses sans fluctuations longitudinales, de sorte qu'il est nécessaire, sous peine de devoir se contenter d'un cas trivial¹, de prendre en compte ces fluctuations longitudinales de densité, et d'étudier analytiquement leur influence sur les centroïdes de vitesse, dans le cadre du modèle simple que l'on va maintenant présenter.

X.2 Le modèle de couche turbulente infinie transversalement

X.2.a Aspects géométriques

On rappelle qu'un point de l'espace à trois dimensions est repéré par sa position \mathbf{x} par rapport à une origine O qu'on précisera dans la suite, et que la projection de \mathbf{x} sur le plan du ciel est un vecteur bidimensionnel \mathbf{X} . La séparation tridimensionnelle entre les points \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 est notée $\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ et elle donne lieu à une séparation apparente $\mathbf{R} = \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1$ entre les lignes de visée correspondantes \mathbf{X}_1 et \mathbf{X}_2 . Il convient d'insister sur le fait qu'on ne considérera que des échelles assez petites sur le plan du ciel pour que les lignes de visées considérées puissent toutes être supposées parallèles.

Dans tout ce qui suit, le modèle étudié est une couche de gaz comprise entre deux plans parallèles, de largeur D , perpendiculaire à la ligne de visée et dont les extensions transverses en x et en y sont infinies. Remarquons que ceci ne contredit pas l'hypothèse du parallélisme des lignes de visée, dès lors que seule une petite fraction de la couche est observée, qu'on suppose représentative des conditions générales du nuage. L'origine O est placée par convention au milieu de la tranche (voir figure X.1), ce qui implique que le gaz se situe nécessairement entre les cotes $z = -D/2$ et $z = D/2$.

X.2.b Propriétés de la densité

Au sein de la couche, la densité volumique moyenne globale du gaz est notée ρ_0 . On désignera par v la composante longitudinale de la vitesse \mathbf{v} du gaz par rapport à l'observateur, et la valeur moyenne de cette composante sera notée v_0 . Les moyennes ρ_0 et v_0 sont nécessairement indépendantes de la ligne de visée, puisqu'elles sont calculées sur l'ensemble de la couche. On fera également l'hypothèse que les fluctuations de densité le long de la ligne de visée sont petites par rapport à la valeur moyenne ρ_0 . Plus précisément, on supposera que l'écart-type σ_ρ du champ de densité est petit devant ρ_0 .

X.2.c Propriétés de l'écoulement

En ce qui concerne les propriétés de l'écoulement turbulent, on se placera dans le cas le plus général en supposant que v_0 n'est pas nul, le cas $v_0 = 0$ n'étant spécial que dans le sens où le calcul requiert une méthode très légèrement modifiée. De fait, comme on le verra à la section X.7, le résultat obtenu dans ce

¹Celui d'une densité uniforme dans tout l'espace.

cas particulier peut parfaitement se retrouver en posant $v_0 = 0$ dans la formule générale². On supposera qu'il n'existe pas de vitesse systématique transverse, de sorte que la vitesse moyenne des particules fluides dans la couche turbulente est égale à $\langle \mathbf{v} \rangle = v_0 \mathbf{u}_z$. Ainsi, le champ de vitesse dans le référentiel du nuage, qui est le champ pertinent du problème, est $\delta \mathbf{v} = \mathbf{v} - v_0 \mathbf{u}_z$. L'écoulement sera supposé homogène et isotrope, ce qui doit être pris au sens fort explicité par Monin et Yaglom [Monin & Yaglom, 1975], selon lequel les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie doivent s'appliquer non seulement aux champs ρ et $\delta \mathbf{v}$, mais également au champ quadridimensionnel défini par $(\rho, \delta \mathbf{v})$. Cette hypothèse se révèlera utile dans les sections **X.5** et **X.6**.

En dehors de la couche, la densité et la vitesse sont supposées nulles. On rappelle en outre que l'observation est faite dans une transition optiquement mince, que la fréquence est suffisamment basse pour que l'approximation de Rayleigh-Jeans soit valable, qu'au sein de la couche règnent des conditions d'excitation uniformes, et enfin qu'il n'existe pas de fond de radiation illuminant l'arrière de la couche turbulente.

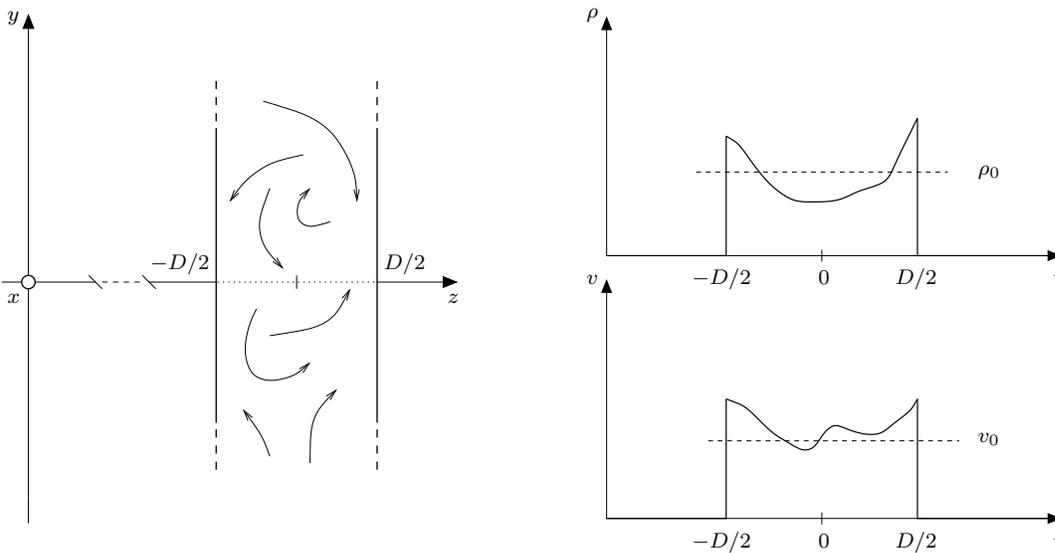


FIG. X.1 – Représentation schématique de la couche turbulente (à gauche) et de l'évolution des champs de densité (en haut à droite) et de vitesse longitudinale (en bas à droite) le long d'une ligne de visée traversant la couche turbulente. La couche est supposée infinie dans les directions x et y et est limitée en z au segment $I_D = [-D/2, D/2]$. Les valeurs moyennes ρ_0 et v_0 sont prises sur l'ensemble de la couche turbulente.

X.3 Statistiques des cartes d'intensité et de centroïde

X.3.a Utilisation de la fonction d'autocorrélation

Comme on l'a déjà suggéré, pour déterminer comment les propriétés statistiques des cartes W_n dépendent de celles des champs tridimensionnels de densité et de vitesse, la méthode qu'on va employer consiste à leur appliquer directement un outil statistique et à tenter de faire ainsi apparaître, dans les expressions obtenues, des quantités statistiques ayant trait aux champs sous-jacents. De toute évidence, le moment d'ordre zéro $W_0 = I$ permet uniquement de déduire des informations sur le champ de densité, puisqu'il est proportionnel à la densité de colonne N , d'après l'équation (42). Le moment d'ordre un ou centroïde non normalisé $W_1 = C$ est la première quantité appropriée à la description du champ de vitesse, comme on peut le voir sur la même équation.

Parmi les outils permettant de caractériser la statistique des cartes bidimensionnelles, on va ici utiliser la fonction d'autocorrélation [Kleiner & Dickman, 1984] (voir le chapitre **V**), qui donne, on le rappelle, le degré moyen de corrélation entre les valeurs d'un champ pris en des points séparés sur le plan du ciel par

²Ce qui n'est pas pour nous surprendre, étant donné que la vitesse v_0 peut être annulée artificiellement par un changement de l'origine des vitesses, ce qui retire toute singularité au cas $v_0 = 0$. Il faut cependant noter qu'on n'a pas accès à v_0 , donc il n'est pas inutile de garder une vitesse moyenne non nulle dans les calculs qui suivent.

un vecteur fixe \mathbf{R} . Nous considérerons bien évidemment dans la suite les fonctions d'autocorrélation des cartes de l'intensité et des deux types de centroïdes, notées respectivement $A_I(\mathbf{R})$, $A_C(\mathbf{R})$ et $A_{C_0}(\mathbf{R})$, et nous allons les calculer en fonction de mesures statistiques sur les champs tridimensionnels.

X.3.b Écriture de I , C et C_0 en termes de fluctuations intégrées

Dans ce but, on commence par séparer la moyenne et les fluctuations de la densité et de la vitesse longitudinale, soit $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ et $v = v_0 + \delta v$, ce qui permet de réécrire la carte d'intensité selon

$$I(\mathbf{X}) = \int_{I_D} \alpha \rho(\mathbf{X}, z) dz = \alpha \rho_0 D [1 + y_{\rho\mathbf{x}}] \quad \text{avec} \quad y_{\rho\mathbf{x}} = \frac{1}{D} \int_{I_D} \frac{\delta\rho(\mathbf{X}, z)}{\rho_0} dz. \quad (44)$$

De la même façon, on peut mettre la carte des centroïdes non normalisés sous la forme suivante,

$$C(\mathbf{X}) = \int_{I_D} \alpha \rho(\mathbf{X}, z) v(\mathbf{X}, z) dz = \alpha \rho_0 v_0 D [1 + y_{\rho\mathbf{x}} + y_{v\mathbf{x}} + y_{\rho v\mathbf{x}}] \quad (45)$$

où sont introduits deux nouveaux termes de fluctuations intégrées, à savoir

$$y_{v\mathbf{x}} = \frac{1}{D} \int_{I_D} \frac{\delta v(\mathbf{X}, z)}{v_0} dz \quad \text{et} \quad y_{\rho v\mathbf{x}} = \frac{1}{D} \int_{I_D} \frac{\delta\rho(\mathbf{X}, z)}{\rho_0} \frac{\delta v(\mathbf{X}, z)}{v_0} dz.$$

Le centroïde normalisé C_0 est alors donné simplement par le rapport

$$C_0(\mathbf{X}) = \frac{C(\mathbf{X})}{I(\mathbf{X})} = v_0 \frac{1 + y_{\rho\mathbf{x}} + y_{v\mathbf{x}} + y_{\rho v\mathbf{x}}}{1 + y_{\rho\mathbf{x}}}. \quad (46)$$

Cette dernière expression permet de clarifier l'utilité de l'hypothèse des petites fluctuations de densité.

X.3.c Hypothèse des petites fluctuations de densité

En effet, on peut d'ores et déjà soupçonner que les mesures statistiques tridimensionnelles qui vont apparaître dans les expressions des fonctions d'autocorrélation des cartes de l'intensité et du centroïde non normalisé seront des fonctions de corrélation entre les champs de densité ρ et de vitesse δv , de la forme $E\{\rho(\mathbf{x}_1) \dots \rho(\mathbf{x}_n) \delta v(\mathbf{x}'_1) \dots \delta v(\mathbf{x}'_m)\}$. Pour qu'on puisse espérer faire ressortir le même genre de fonction lors du calcul de la fonction d'autocorrélation de la carte des centroïdes normalisés, il est alors nécessaire de pouvoir linéariser l'équation (46). Il nous faut par conséquent supposer que $|y_{\rho\mathbf{x}}| < 1$, de sorte que le dénominateur de (46) puisse être développé sous la forme d'une série entière convergente, dont l'expression est alors donnée par

$$\frac{1}{1 + y_{\rho\mathbf{x}}} = 1 - y_{\rho\mathbf{x}} + y_{\rho\mathbf{x}}^2 \dots = \sum_{n \geq 0} (-y_{\rho\mathbf{x}})^n. \quad (47)$$

Une telle condition est évidemment remplie si les fluctuations locales de densité sont elles-mêmes petites, dans le sens décrit dans la section **X.2**, c'est-à-dire si l'écart-type σ_ρ du champ de densité est plus petit que la densité moyenne ρ_0 , puisqu'on a

$$|y_{\rho\mathbf{x}}| = \left| \frac{1}{D} \int_{I_D} \frac{\delta\rho}{\rho_0} dz \right| \leq \sqrt{\frac{1}{D} \int_{I_D} \left(\frac{\delta\rho}{\rho_0} \right)^2 dz} \simeq \frac{\sigma_\rho}{\rho_0}.$$

L'obtention de cette inégalité appelle une remarque : l'identification de la moyenne du carré des fluctuations de densité le long de la ligne de visée à la variance σ_ρ^2 du champ de densité pris dans son ensemble n'est pas évidente *a priori*, mais étant données les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie, une ligne de visée quelconque doit représenter le champ complet, de sorte que les fluctuations de densité le long de cette ligne

de visée doivent être du même ordre de grandeur que les fluctuations du champ tridimensionnel³. D'autre part, bien que l'hypothèse plus forte $\sigma_\rho < \rho_0$ ne soit pas strictement nécessaire à la linéarisation mentionnée ci-dessus, elle est utile dans le développement des fonctions d'autocorrélation car les fluctuations intégrées $y_{\rho\mathbf{x}}$ sont alors du même ordre en densité que $y_{\rho\mathbf{x}}$,

$$|y_{\rho v\mathbf{x}}| \leq \sqrt{\frac{1}{D} \int_{I_D} \left(\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)^2 dz} \sqrt{\frac{1}{D} \int_{I_D} \left(\frac{\delta v}{v_0}\right)^2 dz} \simeq \frac{\sigma_\rho}{\rho_0} \frac{\sigma_v}{v_0},$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz et introduit l'écart-type σ_v de la composante longitudinale de la vitesse⁴. Ceci nous permet de développer les cartes de l'intensité intégrée I et des centroïdes C et C_0 , et par suite leurs fonctions d'autocorrélation, en puissances de σ_ρ/ρ_0 . Il faut garder en tête que le développement (47) n'est bien entendu pas nécessairement valable pour des données réelles, mais on l'utilise ici comme une première étape vers la compréhension des effets des fluctuations de densité sur les centroïdes de vitesse normalisés.

X.4 Fonction d'autocorrélation de l'intensité

X.4.a Expression générale et remarque sur les moyennes

À partir de l'expression (44) de la carte d'intensité, on obtient sans difficulté sa fonction d'autocorrélation A_I , dont on voit qu'elle contient des termes d'ordre au plus deux en fluctuations de densité,

$$A_I(\mathbf{R}) = \mathbb{E}\{I(\mathbf{X})I(\mathbf{X} + \mathbf{R})\} = (\alpha\rho_0 D)^2 [1 + \langle y_{\rho\mathbf{x}} \rangle + \langle y_{\rho\mathbf{x}+\mathbf{R}} \rangle + \langle y_{\rho\mathbf{x}} y_{\rho\mathbf{x}+\mathbf{R}} \rangle]. \quad (48)$$

Cette écriture introduit les moyennes prises sur la position \mathbf{X} dans le plan du ciel, qu'on notera, dans tout ce chapitre, sous la forme $\langle \dots \rangle$. Notons qu'on a ainsi fait appel à l'hypothèse ergodique. Or, comme ces moyennes portent sur des quantités intégrées sur z , on peut les interpréter comme des moyennes sur l'ensemble de la couche turbulente. Pour le voir, considérons un champ tridimensionnel $f(\mathbf{x})$. On définit naturellement sa carte intégrée $F(\mathbf{X})$ par

$$F(\mathbf{X}) = \frac{1}{D} \int_{I_D} f(\mathbf{X}, z) dz, \quad \text{par analogie avec les termes } y_{\rho\mathbf{x}}, y_{v\mathbf{x}} \text{ et } y_{\rho v\mathbf{x}}. \quad (49)$$

Prenant la moyenne de cette carte sur le plan du ciel, qu'on écrit explicitement en se donnant une surface S de ce plan, on montre qu'elle s'interprète comme une moyenne de f sur le volume DS ,

$$\langle F(\mathbf{X}) \rangle = \frac{1}{S} \iint F(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \frac{1}{DS} \iiint f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Faisant l'hypothèse d'ergodicité, elle peut également être identifiée à la moyenne d'ensemble $\mathbb{E}\{f(\mathbf{x})\}$ pour n'importe quelle position \mathbf{x} au sein de l'écoulement.

X.4.b Calcul des différents termes

Cette propriété peut être directement mise à profit dans le calcul de la fonction d'autocorrélation de la carte d'intensité, puisqu'elle permet d'écrire le terme d'ordre un $\langle y_{\rho\mathbf{x}} \rangle$ sous la forme

$$\langle y_{\rho\mathbf{x}} \rangle = \frac{1}{\rho_0} \mathbb{E}\{\delta\rho(\mathbf{x})\} = 0 \quad \text{puisque, par définition, la moyenne des fluctuations est nulle.}$$

³En réalité, l'écart-type $\sigma_{\rho\mathbf{x}}$ des fluctuations le long de la ligne de visée \mathbf{X} est nécessairement calculé sur une échelle plus petite que celle utilisée pour calculer σ_ρ , de sorte qu'on a en fait $\sigma_{\rho\mathbf{x}} \leq \sigma_\rho$, ce qui justifie *a fortiori* la pertinence de notre hypothèse pour effectuer le développement (47).

⁴Il est important de faire remarquer qu'aucune hypothèse n'est faite quant à l'importance des fluctuations en vitesse, c'est-à-dire sur la valeur de σ_v , de sorte que le fait de les rapporter à une échelle égale à la vitesse moyenne v_0 n'est rien d'autre qu'un moyen élégant de symétriser les expressions. Je suis conscient, cependant, que la vitesse du son serait une échelle de vitesse plus significative physiquement, et elle sera utilisée comme telle lorsque la vitesse moyenne sera supposée nulle (voir la section X.7).

L'hypothèse d'homogénéité permet alors de conclure que $\langle y_{\rho_{\mathbf{x}+\mathbf{R}}} \rangle = 0$ de la même façon. En effet, la démonstration précédente reste valable, à ceci près que la surface dans le plan du ciel sur laquelle on effectue la moyenne est une translatée S' de S . On en déduit donc que, dans l'expression (48), les termes d'ordre un sont tous deux nuls. Quant au terme d'ordre deux, il s'écrit sous la forme d'une intégrale double sur le domaine carré $I_D^2 = I_D \times I_D$ de \mathbb{R}^2 ,

$$\langle y_{\rho_{\mathbf{x}}} y_{\rho_{\mathbf{x}+\mathbf{R}}} \rangle = \frac{1}{\rho_0^2 D^2} \left\langle \iint_{I_D^2} \delta\rho(\mathbf{X}, z_1) \delta\rho(\mathbf{X} + \mathbf{R}, z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle. \quad (50)$$

Il est logique de chercher dès lors à écrire la moyenne sur \mathbf{X} apparaissant dans cette expression sous la forme d'une moyenne d'ensemble caractéristique de l'écoulement turbulent, comme on l'a fait plus haut pour les termes d'ordre un. Dans cette optique, on note tout d'abord que la propriété de linéarité de la moyenne permet de la placer sous le signe d'intégration, de sorte que

$$\langle y_{\rho_{\mathbf{x}}} y_{\rho_{\mathbf{x}+\mathbf{R}}} \rangle = \frac{1}{\rho_0^2 D^2} \iint_{I_D^2} \langle \delta\rho(\mathbf{X}, z_1) \delta\rho(\mathbf{X} + \mathbf{R}, z_2) \rangle dz_1 dz_2.$$

Les cotes z_1 et z_2 étant fixées, la moyenne $\langle \delta\rho(\mathbf{X}, z_1) \delta\rho(\mathbf{X} + \mathbf{R}, z_2) \rangle$ sur la position \mathbf{X} dans le plan du ciel représente la valeur moyenne de la corrélation entre les fluctuations de densité prises en deux points \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 dont la séparation $\mathbf{r} = \mathbf{R} + (z_2 - z_1)\mathbf{u}_z$ est fixée, le point \mathbf{x}_1 étant astreint à se déplacer dans un plan donné, défini par $z = z_1$, parallèle aux faces de la couche turbulente. Étant donné les hypothèses d'homogénéité, d'isotropie et d'ergodicité, il est clair que cette quantité doit être identifiée à la corrélation moyenne des fluctuations de densité prises en deux points dont la séparation est égale à \mathbf{r} , quels que soient ces deux points, puisque le plan $z = z_1$ est alors représentatif de l'ensemble de l'écoulement. En introduisant la fonction d'autocorrélation $B_{\rho,\rho}$ des fluctuations de densité⁵,

$$B_{\rho,\rho}(\mathbf{r}) = \mathbb{E}\{\delta\rho(\mathbf{x})\delta\rho(\mathbf{x} + \mathbf{r})\} \quad \text{pour toute paire de points } (\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{r}) \text{ dans la couche turbulente,}$$

nous pouvons alors écrire le terme en question sous la forme

$$\langle y_{\rho_{\mathbf{x}}} y_{\rho_{\mathbf{x}+\mathbf{R}}} \rangle = \frac{1}{\rho_0^2 D^2} \iint_{I_D^2} B_{\rho,\rho}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) dz_1 dz_2, \quad (51)$$

où l'on a évidemment utilisé les vecteurs tridimensionnels $\mathbf{x}_1 = (\mathbf{X}, z_1)$ et $\mathbf{x}_2 = (\mathbf{X} + \mathbf{R}, z_2)$. Pour des raisons de concision des écritures, on introduit une quantité $M_{\rho,\rho}(\mathbf{R})$, définie par l'intégrale double

$$M_{\rho,\rho}(\mathbf{R}) = \frac{1}{D^2} \iint_{I_D^2} B_{\rho,\rho}(\mathbf{R} + (z_2 - z_1)\mathbf{u}_z) dz_1 dz_2 \quad \text{de sorte que} \quad \langle y_{\rho_{\mathbf{x}}} y_{\rho_{\mathbf{x}+\mathbf{R}}} \rangle = \frac{1}{\rho_0^2} M_{\rho,\rho}(\mathbf{R}). \quad (52)$$

La forme de $M_{\rho,\rho}(\mathbf{R})$ montre qu'il faut l'interpréter comme une moyenne de $B_{\rho,\rho}(\mathbf{r})$ prise sur toutes les paires de points dont la séparation tridimensionnelle \mathbf{r} se projette selon le vecteur donné \mathbf{R} sur le plan du ciel (voir la figure X.2).

Finalement, la combinaison des différents termes présents dans l'expression générale (48) de la fonction d'autocorrélation de l'intensité permet d'écrire celle-ci sous la forme

$$\boxed{A_I(\mathbf{R}) = (\alpha D)^2 [\rho_0^2 + M_{\rho,\rho}(\mathbf{R})]}, \quad (53)$$

qu'on exploitera plus tard en comparaison avec les fonctions d'autocorrélation des centroïdes de vitesse.

⁵On la note $B_{\rho,\rho}$ plutôt que $A_{\delta\rho}$ pour des raisons de commodité, certaines des fonctions de corrélation qu'on écrira plus tard étant trop lourdes pour notre notation habituelle.

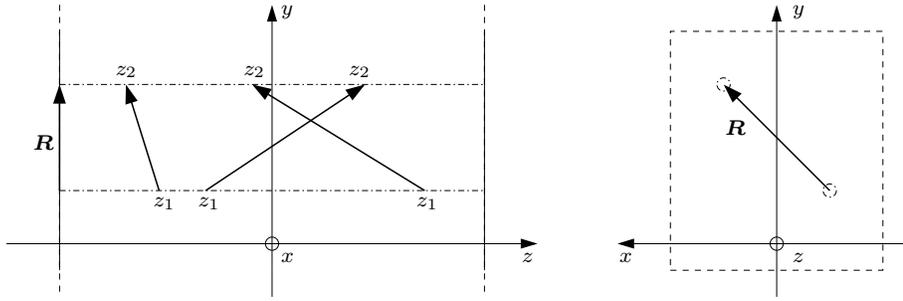


FIG. X.2 – Interprétation de la moyenne $M_{\rho,\rho}$ de l'équation (52). La couche turbulente est vue de face (à droite) et de profil (à gauche). La valeur de $M_{\rho,\rho}$ pour une séparation R dans le plan du ciel est la moyenne de la fonction d'autocorrélation des fluctuations de densité, $B_{\rho,\rho}$, sur toutes les paires de points dont la séparation projetée est précisément R . La figure de gauche montre justement trois telles paires de points.

X.5 Fonction d'autocorrélation des centroïdes de vitesse non normalisés

X.5.a Expression générale

La même méthode générale s'applique lorsqu'on considère les centroïdes de vitesse non normalisés. Le développement de l'équation (45) inclut des termes d'ordre zéro et un en fluctuations de densité. Par conséquent, la fonction d'autocorrélation A_C contient des termes d'ordre au plus deux,

$$A_C(\mathbf{R}) = (\alpha\rho_0v_0D)^2 \langle [1 + y_{v_{\mathbf{X}}} + y_{\rho_{\mathbf{X}}} + y_{\rho v_{\mathbf{X}}}] [1 + y_{v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} + y_{\rho_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} + y_{\rho v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}}] \rangle = (\alpha\rho_0v_0D)^2 \sum_{n=0}^2 \langle a_n \rangle,$$

où a_n est un terme d'ordre n en fluctuations de densité. La forme explicite de ces coefficients est

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 + y_{v_{\mathbf{X}}} + y_{v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} + y_{v_{\mathbf{X}}}y_{v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}}, \\ a_1 &= y_{\rho_{\mathbf{X}}} + y_{\rho_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} + y_{\rho_{\mathbf{X}}}y_{v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} + y_{v_{\mathbf{X}}}y_{\rho_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} + y_{\rho v_{\mathbf{X}}} + y_{\rho v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} + y_{\rho v_{\mathbf{X}}}y_{v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} + y_{\rho v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}}y_{v_{\mathbf{X}}}, \\ a_2 &= y_{\rho_{\mathbf{X}}}y_{\rho_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} + y_{\rho v_{\mathbf{X}}}y_{\rho_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} + y_{\rho v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}}y_{\rho_{\mathbf{X}}} + y_{\rho v_{\mathbf{X}}}y_{\rho v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}}. \end{aligned} \quad (54)$$

La linéarité du processus de moyennage sur le plan du ciel implique alors que nous allons devoir calculer les expressions de termes de deux sortes, avec d'une part des moyennes de fluctuations intégrées de la forme $\langle y_{\lambda_{\mathbf{X}}} \rangle$, et d'autre part des corrélations à deux points du type $\langle y_{\lambda_{\mathbf{X}}}y_{\mu_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \rangle$, où l'on a écrit λ et μ pour représenter indifféremment l'une des trois possibilités ρ , v ou ρv . En raison de l'hypothèse d'homogénéité, les termes du type $\langle y_{\lambda_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \rangle$ sont évidemment égaux aux termes $\langle y_{\lambda_{\mathbf{X}}} \rangle$ correspondants, comme on l'a fait remarquer plus haut à propos de la moyenne des fluctuations de densité intégrées.

X.5.b Calcul du terme d'ordre zéro

Appliquant l'hypothèse d'homogénéité, la contribution d'ordre zéro s'écrit d'abord sous la forme

$$\langle a_0 \rangle = 1 + 2 \langle y_{v_{\mathbf{X}}} \rangle + \langle y_{v_{\mathbf{X}}}y_{v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \rangle \quad \text{en rappelant que} \quad \langle y_{v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \rangle = \langle y_{v_{\mathbf{X}}} \rangle.$$

La moyenne sur le plan du ciel des fluctuations intégrées de vitesse longitudinale se comporte de la même façon que celle portant sur les fluctuations de densité. Elle est donc nulle. Quant au terme de corrélation $\langle y_{v_{\mathbf{X}}}y_{v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \rangle$, il peut être relié à la fonction d'autocorrélation du champ de vitesse au sein de l'écoulement, comme on l'a fait plus haut dans le cas de la densité,

$$\langle y_{v_{\mathbf{X}}}y_{v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \rangle = \frac{1}{v_0^2} M_{v,v}(\mathbf{R}) \quad \text{avec} \quad M_{v,v}(\mathbf{R}) = \frac{1}{D^2} \iint_{I_D^2} B_{v,v}(\mathbf{R} + (z_2 - z_1)\mathbf{u}_z) dz_1 dz_2,$$

où $B_{v,v}(\mathbf{r}) = E\{\delta v(\mathbf{x})\delta v(\mathbf{x} + \mathbf{r})\}$ est la fonction d'autocorrélation des fluctuations de la composante de la vitesse le long de la ligne de visée. Le terme d'ordre zéro de la fonction d'autocorrélation du centroïde non normalisé est donc

$$\langle a_0 \rangle = 1 + \frac{1}{v_0^2} M_{v,v}(\mathbf{R}), \text{ expression à rapprocher de la fonction d'autocorrélation de l'intensité.}$$

X.5.c Calcul du terme d'ordre un

Passant au terme d'ordre un, et appliquant d'une part l'hypothèse d'homogénéité et d'autre part les résultats déjà connus sur les moyennes des fluctuations de densité intégrées, on a

$$\langle a_1 \rangle = \langle y_{\rho\mathbf{x}} y_{v\mathbf{x}+\mathbf{R}} \rangle + \langle y_{v\mathbf{x}} y_{\rho\mathbf{x}+\mathbf{R}} \rangle + 2 \langle y_{\rho v\mathbf{x}} \rangle + \langle y_{\rho v\mathbf{x}} y_{v\mathbf{x}+\mathbf{R}} \rangle + \langle y_{\rho v\mathbf{x}+\mathbf{R}} y_{v\mathbf{x}} \rangle.$$

La méthode employée dans les paragraphes précédents reste parfaitement applicable ici. Chaque terme de cette équation peut en effet être relié à des fonctions de corrélation des champs de fluctuations $\delta\rho$ et δv , en commençant par

$$\langle y_{\rho\mathbf{x}} y_{v\mathbf{x}+\mathbf{R}} \rangle = \frac{1}{\rho_0 v_0 D^2} \iint_{I_D^2} \langle \delta\rho(\mathbf{X}, z_1) \delta v(\mathbf{X} + \mathbf{R}, z_2) \rangle dz_1 dz_2,$$

qu'on peut réécrire en introduisant la fonction de corrélation mixte des deux champs de fluctuations définie par $B_{\rho,v}(\mathbf{r}) = E\{\delta\rho(\mathbf{x})\delta v(\mathbf{x} + \mathbf{r})\}$. De façon tout à fait analogue aux cas déjà traités, on a alors

$$\langle y_{\rho\mathbf{x}} y_{v\mathbf{x}+\mathbf{R}} \rangle = \frac{1}{\rho_0 v_0} M_{\rho,v}(\mathbf{R}) \quad \text{avec} \quad M_{\rho,v}(\mathbf{R}) = \frac{1}{D^2} \iint_{I_D^2} B_{\rho,v}(\mathbf{R} + (z_2 - z_1)\mathbf{u}_z) dz_1 dz_2.$$

Considérons le terme suivant, à savoir $\langle y_{v\mathbf{x}} y_{\rho\mathbf{x}+\mathbf{R}} \rangle$. L'hypothèse d'homogénéité permet de décaler les arguments d'une quantité $-\mathbf{R}$ de sorte qu'on a l'égalité

$$\langle y_{v\mathbf{x}} y_{\rho\mathbf{x}+\mathbf{R}} \rangle = \langle y_{\rho\mathbf{x}} y_{v\mathbf{x}-\mathbf{R}} \rangle = \frac{1}{\rho_0 v_0} M_{\rho,v}(-\mathbf{R})$$

en appliquant simplement la formule qui vient d'être établie pour $\langle y_{\rho\mathbf{x}} y_{v\mathbf{x}+\mathbf{R}} \rangle$. Naturellement, on regroupe ces deux termes, de façon à obtenir la combinaison suivante⁶

$$\langle y_{v\mathbf{x}} y_{\rho\mathbf{x}+\mathbf{R}} \rangle + \langle y_{\rho\mathbf{x}} y_{v\mathbf{x}+\mathbf{R}} \rangle = \frac{1}{\rho_0 v_0} [M_{\rho,v}(\mathbf{R}) + M_{\rho,v}(-\mathbf{R})] = \frac{2}{\rho_0 v_0} M_{\rho,v}^{(s)}(\mathbf{R}). \quad (55)$$

On verra plus bas qu'il est en fait possible d'aller plus loin et de montrer que ces termes s'annulent. Le terme suivant $\langle y_{\rho v\mathbf{x}} \rangle$ peut s'écrire en utilisant la même fonction de corrélation $B_{\rho,v}$ puisque

$$\langle y_{\rho v\mathbf{x}} \rangle = \frac{1}{\rho_0 v_0 D} \int_{I_D} \langle \delta\rho(\mathbf{X}, z) \delta v(\mathbf{X}, z) \rangle dz = \frac{1}{\rho_0 v_0 D} \int_{I_D} B_{\rho,v}(\mathbf{0}) dz = \frac{1}{\rho_0 v_0} B_{\rho,v}(\mathbf{0}).$$

De la même manière, on peut calculer la combinaison des deux derniers termes de $\langle a_1 \rangle$, et on montre sans aucune difficulté qu'elle est donnée par une expression analogue à (55),

$$\langle y_{\rho v\mathbf{x}} y_{v\mathbf{x}+\mathbf{R}} \rangle + \langle y_{\rho v\mathbf{x}+\mathbf{R}} y_{v\mathbf{x}} \rangle = \frac{2}{\rho_0 v_0^2} M_{\rho v,v}^{(s)}(\mathbf{R}) \quad \text{avec} \quad M_{\rho v,v}(\mathbf{R}) = \frac{1}{D^2} \iint_{I_D^2} B_{\rho v,v}(\mathbf{R} + (z_2 - z_1)\mathbf{u}_z) dz_1 dz_2,$$

où l'on a introduit la fonction de corrélation à deux points $B_{\rho v,v}(\mathbf{r}) = E\{\delta\rho(\mathbf{x})\delta v(\mathbf{x})\delta v(\mathbf{x} + \mathbf{r})\}$. On verra plus loin que cette expression peut se simplifier quelque peu. En attendant, la contribution d'ordre un à la fonction d'autocorrélation du centroïde non normalisé prend la forme

$$\langle a_1 \rangle = \frac{2}{\rho_0 v_0} M_{\rho,v}^{(s)}(\mathbf{R}) + \frac{2}{\rho_0 v_0} B_{\rho,v}(\mathbf{0}) + \frac{2}{\rho_0 v_0^2} M_{\rho v,v}^{(s)}(\mathbf{R}). \quad (56)$$

⁶La notation (s) représente la partie symétrique d'une fonction donnée, définie par $f^{(s)}(x) = [f(x) + f(-x)]/2$

X.5.d Calcul du terme d'ordre deux

Le calcul de la contribution d'ordre deux en fluctuations de densité $\langle a_2 \rangle$ ne pose pas de difficulté particulière, et il peut se faire d'une manière en tous points semblable à ce qui a été fait jusqu'à présent. Tout d'abord, l'un des termes qui la constituent a déjà été calculé, puisqu'on a vu que

$$\langle y_{\rho\mathbf{x}} y_{\rho\mathbf{x}+\mathbf{R}} \rangle = \frac{1}{\rho_0^2} M_{\rho,\rho}(\mathbf{R}).$$

Les deux termes suivants dans l'expression de $\langle a_2 \rangle$, à savoir $\langle y_{\rho v\mathbf{x}} y_{\rho\mathbf{x}+\mathbf{R}} \rangle$ et $\langle y_{\rho v\mathbf{x}+\mathbf{R}} y_{\rho\mathbf{x}} \rangle$ sont regroupés de sorte que leur combinaison fasse apparaître la partie symétrique d'une fonction de corrélation,

$$\langle y_{\rho v\mathbf{x}} y_{\rho\mathbf{x}+\mathbf{R}} \rangle + \langle y_{\rho v\mathbf{x}+\mathbf{R}} y_{\rho\mathbf{x}} \rangle = \frac{2}{\rho_0^2 v_0} M_{\rho v,\rho}^{(s)}(\mathbf{R}) \quad \text{avec} \quad M_{\rho v,\rho}(\mathbf{R}) = \frac{1}{D^2} \iint_{I_D^2} B_{\rho v,\rho}(\mathbf{R} + (z_2 - z_1)\mathbf{u}_z) dz_1 dz_2$$

où l'on a introduit la fonction de corrélation $B_{\rho v,\rho}(\mathbf{r}) = \mathbb{E}\{\delta\rho(\mathbf{x})\delta v(\mathbf{x})\delta\rho(\mathbf{x}+\mathbf{r})\}$. Enfin, le dernier terme est donné par une expression analogue,

$$\langle y_{\rho v\mathbf{x}} y_{\rho v\mathbf{x}+\mathbf{R}} \rangle = \frac{1}{\rho_0^2 v_0^2} M_{\rho v,\rho v}(\mathbf{R}) \quad \text{avec} \quad M_{\rho v,\rho v}(\mathbf{R}) = \frac{1}{D^2} \iint_{I_D^2} B_{\rho v,\rho v}(\mathbf{R} + (z_2 - z_1)\mathbf{u}_z) dz_1 dz_2,$$

où $B_{\rho v,\rho v}(\mathbf{r}) = \mathbb{E}\{\delta\rho(\mathbf{x})\delta v(\mathbf{x})\delta\rho(\mathbf{x}+\mathbf{r})\delta v(\mathbf{x}+\mathbf{r})\}$ est également une fonction de corrélation à deux points caractérisant l'écoulement. On a ainsi une expression de la contribution d'ordre deux à la fonction d'auto-corrélation des cartes de centroïdes de vitesse non normalisés,

$$\langle a_2 \rangle = \frac{1}{\rho_0^2} M_{\rho,\rho}(\mathbf{R}) + \frac{2}{\rho_0^2 v_0} M_{\rho v,\rho}^{(s)}(\mathbf{R}) + \frac{1}{\rho_0^2 v_0^2} M_{\rho v,\rho v}(\mathbf{R}).$$

X.5.e Utilisation des hypothèses d'homogénéité et d'isotropie

Les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie au sens fort de [Monin & Yaglom, 1975] permettent d'aller plus loin. Comme on l'a dit en présentant le modèle, cela suppose que le champ quadridimensionnel $(\rho, \delta\mathbf{v})$, composé de la densité ρ et de la vitesse vectorielle $\delta\mathbf{v}$ dans le référentiel barycentrique du nuage, est alors homogène et isotrope. La fonction de corrélation de ρ et de $\delta\mathbf{v}$ étant évidemment une quantité vectorielle, l'hypothèse d'isotropie lui impose d'être parallèle à la séparation \mathbf{r} entre les points où sont mesurées respectivement la fluctuation de densité et la fluctuation de vitesse. Elle doit donc être de la forme

$$\mathbb{E}\{\rho(\mathbf{x})\delta\mathbf{v}(\mathbf{x}+\mathbf{r})\} = f(r)\mathbf{r} \quad \text{où } f \text{ est une fonction de la séparation scalaire } r = |\mathbf{r}|. \quad (57)$$

En projetant cette relation sur la ligne de visée \mathbf{u}_z , on a alors

$$\mathbb{E}\{\rho(\mathbf{x})\delta\mathbf{v}(\mathbf{x}+\mathbf{r})\} \cdot \mathbf{u}_z = \mathbb{E}\{\delta\rho(\mathbf{x})\delta\mathbf{v}(\mathbf{x}+\mathbf{r})\} \cdot \mathbf{u}_z = \mathbb{E}\{\delta\rho(\mathbf{x})\delta v(\mathbf{x}+\mathbf{r})\} = B_{\rho,v}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}_z,$$

en utilisant le fait que la vitesse moyenne $\mathbb{E}\{\delta\mathbf{v}(\mathbf{x})\}$ est nulle dans la couche turbulente, par définition. L'impact de cette forme très particulière sur l'expression (55) est évident. En explicitant celle-ci⁷,

$$\langle y_{v\mathbf{x}} y_{\rho\mathbf{x}+\mathbf{R}} \rangle + \langle y_{\rho\mathbf{x}} y_{v\mathbf{x}+\mathbf{R}} \rangle = \frac{1}{\rho_0 v_0 D^2} \iint_{I_D^2} [B_{\rho,v}(\mathbf{R} + (z_2 - z_1)\mathbf{u}_z) + B_{\rho,v}(-\mathbf{R} + (z_1 - z_2)\mathbf{u}_z)] dz_1 dz_2,$$

on voit que la quantité intégrée est en fait proportionnelle à la partie symétrique de $B_{\rho,v}$. Or, la forme (57) montre que celle-ci est nulle, puisque $B_{\rho,v}(-\mathbf{r}) = -f(r)\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}_z = -B_{\rho,v}(\mathbf{r})$. Il s'ensuit que la combinaison des deux termes dans l'équation (55) est également nulle. On peut d'ailleurs exprimer ce résultat en disant simplement que l'antisymétrie de $B_{\rho,v}$ se transmet à $M_{\rho,v}$. On peut donc éliminer le terme correspondant de l'expression de $\langle a_1 \rangle$. D'autre part, l'antisymétrie de $B_{\rho,v}$ implique également que $B_{\rho,v}(\mathbf{0}) = 0$, ce qui

⁷Remarquons qu'on échange, dans l'un des termes, les noms des variables d'intégration, ce qui n'est pas gênant, étant donné qu'elles jouent des rôles parfaitement symétriques.

permet de simplifier encore l'équation (56). Quant au dernier terme d'ordre un apparaissant dans cette même équation (56), il appelle également une remarque. D'après [Monin & Yaglom, 1975], la fonction de corrélation $B_{\rho v, v}$ est de la forme

$$B_{\rho v, v}(\mathbf{r}) = g(r) \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}_z)^2}{r^2} + h(r), \quad \text{où } g \text{ et } h \text{ sont des fonctions de la séparation scalaire } r.$$

Cette forme trouve son origine dans le fait que $E\{\delta\rho(\mathbf{x})\delta v_i(\mathbf{x})\delta v_j(\mathbf{x} + \mathbf{r})\}$, où i et j représentent l'une quelconque des coordonnées x , y ou z , est un tenseur de rang deux supposé homogène et isotrope. Il s'ensuit que $B_{\rho v, v}$ est symétrique et qu'il en va donc de même de $M_{\rho v, v}$, de sorte que le terme d'ordre un, dans le cadre de ces hypothèses, se réduit à

$$\langle a_1 \rangle = \frac{2}{\rho_0 v_0^2} M_{\rho v, v}(\mathbf{R}).$$

Passant au terme d'ordre deux, et toujours d'après [Monin & Yaglom, 1975], $B_{\rho v, \rho}$ possède la même propriété d'antisymétrie déjà remarquée en ce qui concerne $B_{\rho, v}$ et nous pouvons donc en conclure que la partie symétrique de $M_{\rho v, \rho}$ est nulle, de sorte qu'en combinant tous ces résultats, la fonction d'autocorrélation A_C des centroïdes de vitesse non normalisés a pour expression finale

$$\boxed{A_C(\mathbf{R}) = (\alpha D)^2 [\rho_0^2 v_0^2 + \rho_0^2 M_{v, v}(\mathbf{R}) + 2\rho_0 M_{\rho v, v}(\mathbf{R}) + v_0^2 M_{\rho, \rho}(\mathbf{R}) + M_{\rho v, \rho v}(\mathbf{R})]}. \quad (58)$$

Remarquons que la troncature de cette expression à l'ordre zéro est similaire à la forme calculée pour la fonction d'autocorrélation de l'intensité, puisqu'on a alors $A_C(\mathbf{R}) \simeq (\alpha D \rho_0)^2 [v_0^2 + M_{v, v}(\mathbf{R})]$. Cette similitude n'est pas surprenante, comme on en discutera à la section X.8.

X.6 Fonction d'autocorrélation des centroïdes de vitesse normalisés

X.6.a Expression générale

Il n'y a pas de modification majeure de la méthode lorsqu'on considère les centroïdes de vitesse normalisés. Les contributions de chaque ordre peuvent être calculées aussi aisément que dans le cas des centroïdes de vitesse non normalisés, la différence principale se situant au niveau du fait qu'étant donné le développement (47), A_{C_0} est théoriquement une série infinie dont l'expression est

$$A_{C_0}(\mathbf{R}) = v_0^2 \sum_{m \geq n=0}^2 \langle a_n b_m \rangle \quad \text{où} \quad b_m = (-1)^m \sum_{p=0}^m y_{\rho \mathbf{x}}^p y_{\rho \mathbf{x} + \mathbf{R}}^{m-p},$$

les coefficients a_n étant donnés par les relations (54). Le terme générique $\langle a_n b_m \rangle$ de ce développement est évidemment d'ordre $n + m$ en fluctuations de densité. Il se pose alors la question de savoir où tronquer ce développement. Sachant que l'un des objectifs de ce chapitre est d'estimer analytiquement les effets de la normalisation des centroïdes, et étant donné que l'ordre le plus élevé apparaissant dans la fonction d'autocorrélation A_C est l'ordre deux, il semble raisonnable de ne considérer que les termes d'ordre au plus deux dans le développement de A_{C_0} . Cependant, on peut également remarquer que les fluctuations de densité se font déjà sentir à l'ordre un dans $A_C(\mathbf{R})$, de sorte que la première étape de l'évaluation des effets de la normalisation peut se faire en limitant le développement à l'ordre un,

$$A_{C_0}(\mathbf{R}) = v_0^2 (S_0 + S_1) \quad \text{avec} \quad S_0 = \langle a_0 b_0 \rangle \quad \text{et} \quad S_1 = \langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_1 b_0 \rangle.$$

X.6.b Calcul des différents termes

Le terme d'ordre zéro a déjà été calculé plus haut. En effet, il se résume de façon évidente à

$$S_0 = \langle a_0 b_0 \rangle = \langle a_0 \rangle = 1 + \frac{1}{v_0^2} M_{v, v}(\mathbf{R}).$$

Le calcul du terme d'ordre un, $S_1 = \langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_1 b_0 \rangle$, est plus ardu. Étant données les expressions de a_0 , a_1 , et b_1 , on obtient tout d'abord un développement assez long comprenant au total seize termes. Certains s'annulent de manière évidente, et d'autres sont égaux du fait de l'hypothèse d'homogénéité. Finalement, on obtient une expression ne contenant plus que six termes,

$$S_1 = 2 \langle y_{\rho v_{\mathbf{x}}} \rangle - 2 \langle y_{\rho_{\mathbf{x}}} y_{v_{\mathbf{x}}} \rangle + \langle y_{\rho v_{\mathbf{x}}} y_{v_{\mathbf{x}+\mathbf{R}}} \rangle + \langle y_{v_{\mathbf{x}}} y_{\rho v_{\mathbf{x}+\mathbf{R}}} \rangle - \langle y_{v_{\mathbf{x}}} y_{v_{\mathbf{x}+\mathbf{R}}} y_{\rho_{\mathbf{x}+\mathbf{R}}} \rangle - \langle y_{v_{\mathbf{x}+\mathbf{R}}} y_{v_{\mathbf{x}}} y_{\rho_{\mathbf{x}}} \rangle.$$

Le premier terme est nul, comme on l'a vu à la section **X.5.e**. Passant au deuxième terme, on voit, en utilisant le calcul de la section **X.5.c**, qu'il se met sous la forme

$$\langle y_{\rho_{\mathbf{x}}} y_{v_{\mathbf{x}}} \rangle = \frac{1}{\rho_0 v_0} M_{\rho, v}(\mathbf{0}) = 0,$$

d'après l'antisymétrie de $B_{\rho, v}$, qui entraîne, on l'a déjà noté, celle de $M_{\rho, v}$, et donc la nullité de cette dernière fonction en $\mathbf{R} = \mathbf{0}$. La combinaison des troisième et quatrième termes a été calculée au **X.5.c**,

$$\langle y_{\rho v_{\mathbf{x}}} y_{v_{\mathbf{x}+\mathbf{R}}} \rangle + \langle y_{\rho v_{\mathbf{x}+\mathbf{R}}} y_{v_{\mathbf{x}}} \rangle = \frac{2}{\rho_0 v_0^2} M_{\rho v, v}(\mathbf{R}),$$

en utilisant la remarque faite au **X.5.e** concernant la symétrie de la fonction $M_{\rho v, v}$. Les termes restants se traitent de manière analogue, mais comme ils sont tous deux constitués du produit de trois termes de fluctuations intégrées, et non plus un ou deux, il est nécessaire d'introduire des fonctions de corrélation plus élaborées. Prenant l'avant-dernier terme, on a ainsi

$$\langle y_{v_{\mathbf{x}}} y_{v_{\mathbf{x}+\mathbf{R}}} y_{\rho_{\mathbf{x}+\mathbf{R}}} \rangle = \frac{1}{\rho_0 v_0^2 D^3} \iiint_{I_D^3} \langle \delta v(\mathbf{X}, z_1) \delta v(\mathbf{X} + \mathbf{R}, z_2) \delta \rho(\mathbf{X} + \mathbf{R}, z_3) \rangle dz_1 dz_2 dz_3,$$

où l'intégration est évidemment effectuée sur le domaine cubique $I_D^3 = I_D \times I_D \times I_D$. Les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie permettent de remplacer la moyenne apparaissant dans l'intégrande par une fonction de corrélation à trois points, dépendant donc de deux séparations vectorielles \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 , à savoir $B_{v, v, \rho}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathbf{E}\{\delta v(\mathbf{x}) \delta v(\mathbf{x} + \mathbf{r}_1) \delta \rho(\mathbf{x} + \mathbf{r}_2)\}$. On a alors

$$\langle y_{v_{\mathbf{x}}} y_{v_{\mathbf{x}+\mathbf{R}}} y_{\rho_{\mathbf{x}+\mathbf{R}}} \rangle = \frac{1}{\rho_0 v_0^2} M_{v, v, \rho}(\mathbf{R}, \mathbf{R}),$$

où la fonction $M_{v, v, \rho}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ est une moyenne de $B_{v, v, \rho}$ sur l'ensemble des triplets de points dont les séparations projetées sur le plan du ciel sont fixées, rappelant les idées utilisées plus haut,

$$M_{v, v, \rho}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = \frac{1}{D^3} \iiint_{I_D^3} B_{v, v, \rho}(\mathbf{R} + (z_2 - z_1)\mathbf{u}_z, \mathbf{R} + (z_3 - z_1)\mathbf{u}_z) dz_1 dz_2 dz_3.$$

On utilise d'ailleurs cette même fonction pour écrire le dernier terme du développement de S_1 , en utilisant à nouveau l'hypothèse d'homogénéité pour décaler les arguments en bloc,

$$\langle y_{v_{\mathbf{x}+\mathbf{R}}} y_{v_{\mathbf{x}}} y_{\rho_{\mathbf{x}}} \rangle = \langle y_{v_{\mathbf{x}}} y_{v_{\mathbf{x}-\mathbf{R}}} y_{\rho_{\mathbf{x}-\mathbf{R}}} \rangle = \frac{1}{\rho_0 v_0^2} M_{v, v, \rho}(-\mathbf{R}, -\mathbf{R}),$$

de sorte que la somme de ces deux derniers termes est proportionnelle à la partie symétrique de $M_{v, v, \rho}$,

$$M_{v, v, \rho}^{(s)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = \frac{1}{2} [M_{v, v, \rho}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) + M_{v, v, \rho}(-\mathbf{R}, -\mathbf{R})].$$

Finalement, la fonction d'autocorrélation A_{C_0} des centroïdes de vitesse normalisés a l'expression suivante, lorsqu'on la limite aux contributions d'ordre au plus un en fluctuations de densité,

$$\boxed{A_{C_0}(\mathbf{R}) = v_0^2 + M_{v, v}(\mathbf{R}) + \frac{2}{\rho_0} [M_{\rho v, v}(\mathbf{R}) - M_{v, v, \rho}^{(s)}(\mathbf{R}, \mathbf{R})]} \quad (59)$$

Il apparaît donc que la normalisation des centroïdes de vitesse se traduit par une correction au premier ordre, bien qu'elle ne permette pas nécessairement de se débarrasser entièrement des effets de la structure en densité, comme on en discutera au **X.8**.

X.7 Traitement du cas particulier d'une vitesse moyenne nulle

Lorsque la vitesse moyenne v_0 est nulle, la méthode utilisée dans les sections précédentes doit être légèrement modifiée pour rester applicable, car les fluctuations de vitesse, qui sont dans ce cas égales aux vitesses, ne peuvent être rapportées à v_0 . On peut cependant trouver une autre échelle de vitesse en considérant la vitesse du son c_s , que nous supposons uniforme au sein de la couche turbulente. Le centroïde de vitesse non normalisé prend alors la forme

$$C(\mathbf{X}) = \int_{I_D} \alpha [\rho_0 + \delta\rho(\mathbf{X}, z)] \delta v(\mathbf{X}, z) dz = \alpha \rho_0 c_s D (y'_{v\mathbf{X}} + y'_{\rho v\mathbf{X}})$$

où les termes de fluctuations intégrées modifiés $y'_{v\mathbf{X}}$ et $y'_{\rho v\mathbf{X}}$ sont évidemment donnés par les expressions

$$y'_{v\mathbf{X}} = \frac{1}{D} \int_{I_D} \frac{\delta v(\mathbf{X}, z)}{c_s} dz \quad \text{et} \quad y'_{\rho v\mathbf{X}} = \frac{1}{D} \int_{I_D} \frac{\delta\rho(\mathbf{X}, z)}{\rho_0} \frac{\delta v(\mathbf{X}, z)}{c_s} dz.$$

Le calcul est alors identique au cas général, avec c_s remplaçant v_0 et les (a_i) de l'équation (54) étant remplacés par de nouveaux coefficients (a'_i) donnés par

$$\begin{aligned} a'_0 &= y'_{v\mathbf{X}} y'_{v\mathbf{X}+\mathbf{R}}, \\ a'_1 &= y'_{\rho v\mathbf{X}} y'_{v\mathbf{X}+\mathbf{R}} + y'_{\rho v\mathbf{X}+\mathbf{R}} y'_{v\mathbf{X}}, \\ a'_2 &= y'_{\rho v\mathbf{X}} y'_{\rho v\mathbf{X}+\mathbf{R}}. \end{aligned}$$

dont les moyennes sont facilement exprimées en utilisant les fonctions $M_{v,v}$, $M_{\rho v,v}$ et $M_{\rho v,\rho v}$, comme on l'a fait aux sections précédentes. La fonction d'autocorrélation des centroïdes de vitesse non normalisés étant donnée ici par $A_C(\mathbf{R}) = (\alpha \rho_0 c_s D)^2 [\langle a'_0 \rangle + \langle a'_1 \rangle + \langle a'_2 \rangle]$, elle prend donc la forme

$$A_C(\mathbf{R}) = (\alpha D)^2 [\rho_0^2 M_{v,v}(\mathbf{R}) + 2\rho_0 M_{\rho v,v}(\mathbf{R}) + M_{\rho v,\rho v}(\mathbf{R})],$$

ce qui est précisément ce qu'on déduirait de la formule générale en posant $v_0 = 0$. De même, pour le centroïde normalisé, en se limitant aux termes d'ordre un en fluctuations de densité, comme c'était déjà le cas au **X.6**, on obtient la forme qu'on attendrait à partir de l'équation (59),

$$A_{C_0}(\mathbf{R}) = M_{v,v}(\mathbf{R}) + \frac{2}{\rho_0} [M_{\rho v,v}(\mathbf{R}) - M_{v,v,\rho}^{(s)}(\mathbf{R}, \mathbf{R})].$$

Le cas d'une vitesse moyenne nulle n'étant par conséquent fondamentalement pas différent du cas général, on n'y reviendra pas dans ce chapitre.

X.8 Discussion des résultats

X.8.a À l'ordre zéro

Que nous apprennent les formes que l'on vient de calculer pour les fonctions d'autocorrélation des cartes de l'intensité et des deux types de centroïdes de vitesse? Tout d'abord, et comme on s'y attendait, ces mesures sur les cartes bidimensionnelles des observables I , C et C_0 peuvent s'exprimer en termes de propriétés statistiques des champs tridimensionnels sous-jacents, à savoir les champs de densité et de vitesse. Plus précisément, il n'est pas surprenant que les fonctions d'autocorrélation $A_I(\mathbf{R})$, $A_C(\mathbf{R})$ et $A_{C_0}(\mathbf{R})$ puissent s'écrire à l'aide des moyennes de fonctions de corrélation au sein du nuage, comme indiqué sur la figure **X.2**, puisque toutes les paires de points dont la séparation sur le plan du ciel est \mathbf{R} doivent contribuer aux mesures statistiques bidimensionnelles à l'espacement \mathbf{R} .

Concernant la forme exacte des expressions des fonctions d'autocorrélation des centroïdes de vitesse, calculées plus haut, il semble raisonnable de considérer leurs troncatures aux différents ordres en fluctuations de densité. Ainsi, on voit qu'à l'ordre zéro, les développements de ces fonctions sont

$$A_C(\mathbf{R}) \simeq (\alpha D \rho_0)^2 [v_0^2 + M_{v,v}(\mathbf{R})] \quad \text{et} \quad A_{C_0}(\mathbf{R}) \simeq v_0^2 + M_{v,v}(\mathbf{R}),$$

ce qui les rend très similaires à l'expression complète de la fonction d'autocorrélation de la carte d'intensité, donnée par l'équation (53). L'identité de ces formes était en fait attendue, puisque les termes d'ordre zéro dans les fonctions d'autocorrélation des centroïdes de vitesse sont les limites obtenues lorsque la densité est uniforme. Dans ce cas, les centroïdes sont simplement des intégrales de v , de même que l'intensité est une simple intégrale de ρ . On peut donc en particulier prédire que lorsque les conditions du modèle sont remplies, et que les fluctuations de densité sont assez faibles, les cartes de centroïdes présentent un indice spectral égal à celui du champ de vitesse tridimensionnel, de même que l'indice spectral de la carte d'intensité intégrée est égal à celui du champ de densité, en se plaçant à des échelles transverses petites devant la profondeur du nuage. On reviendra abondamment sur ce point dans les chapitres **XI** et **XII**.

X.8.b À l'ordre un

Les effets de la normalisation des centroïdes de vitesse ne sont évidemment pas visibles à l'ordre zéro, puisque la contribution des fluctuations de densité est nulle à cet ordre. Il faut donc, pour estimer ces effets, considérer les expressions des fonctions d'autocorrélation des centroïdes à l'ordre un. En ce qui concerne le centroïde non normalisé, on obtient celle-ci en tronquant l'équation (58),

$$A_C(\mathbf{R}) \simeq (\alpha D \rho_0)^2 \left[v_0^2 + M_{v,v}(\mathbf{R}) + \frac{2}{\rho_0} M_{\rho v,v}(\mathbf{R}) \right].$$

L'expression à l'ordre un de la fonction d'autocorrélation du centroïde normalisé étant donnée par l'équation (59), qu'on réécrit ici pour permettre une comparaison plus aisée,

$$A_{C_0}(\mathbf{R}) \simeq v_0^2 + M_{v,v}(\mathbf{R}) + \frac{2}{\rho_0} \left[M_{\rho v,v}(\mathbf{R}) - M_{v,v,\rho}^{(s)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \right].$$

On voit que la normalisation a pour effet de premier ordre de soustraire le terme $M_{v,v,\rho}^{(s)}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ à la fonction d'autocorrélation de la carte des centroïdes de vitesse. Cependant, le terme résultant n'est pas nécessairement nul, et la normalisation n'enlève en fait pas complètement la contribution de premier ordre des fluctuations de densité. Sans plus d'informations sur l'écoulement, c'est-à-dire sans hypothèse relative aux formes des fonctions de corrélation $B_{v,v,\rho}$ et $B_{\rho v,v}$, on est en fait bien en peine de confirmer l'hypothèse empirique selon laquelle la normalisation élimine l'influence des fluctuations de densité dans les centroïdes de vitesse. Il est même possible *a priori* que la normalisation augmente au contraire la contribution d'ordre un de ces fluctuations.

X.8.c Les centroïdes de vitesse modifiés

Cette dernière remarque pointe un défaut potentiel des centroïdes normalisés utilisés comme moyen de retrouver les propriétés statistiques du champ de vitesse à partir des données observationnelles. De tels défauts ont déjà été remarqués par [Lazarian & Esquivel, 2003], dans le cas de simulations de turbulence magnétohydrodynamique hautement compressible, c'est-à-dire dans un cadre très différent de celui que nous avons considéré ici. Pour contourner cet obstacle, [Lazarian & Esquivel, 2003] ont introduit des centroïdes de vitesse modifiés (MVC) C_m , définis par leur fonction de structure d'ordre deux S_{C_m} , avec

$$S_{C_m}(\mathbf{R}) = S_C(\mathbf{R}) - (v_0^2 + \sigma_v^2 + \sigma_{\text{th}}^2) S_I(\mathbf{R}), \quad (60)$$

où l'on rappelle que S_C et S_I sont les fonctions de structure du centroïde non normalisé et de l'intensité, respectivement. Étant donnée la relation entre la fonction de structure S_{C_m} et la fonction d'autocorrélation A_{C_m} des centroïdes de vitesse modifiés, on peut écrire cette dernière comme

$$A_{C_m}(\mathbf{R}) = A_C(\mathbf{R}) - (v_0^2 + \sigma_v^2 + \sigma_{\text{th}}^2) A_I(\mathbf{R}) + E,$$

E étant une constante dépendant des valeurs de A_C et A_I à l'espacement zéro. Or, il n'existe pas de terme d'ordre un dans A_I , ce qui implique que les fonctions d'autocorrélation des centroïdes modifiés et non normalisés partagent la même contribution d'ordre un. Comme dit précédemment, cependant, il n'est pas encore clair que cette contribution soit effectivement plus importante que le terme d'ordre un dans la

fonction d'autocorrélation des centroïdes normalisés. Pour rendre la comparaison entre les méthodes de correction plus claire, on peut extraire une relation entre les fonctions d'autocorrélation de l'intensité et des centroïdes⁸

$$(\alpha D \rho_0)^2 A_{C_0}(\mathbf{R}) = (\alpha D \rho_0 v_0)^2 + A_C(\mathbf{R}) - v_0^2 A_I(\mathbf{R}) - 2(\alpha D)^2 \rho_0 M_{v,v,\rho}^{(s)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) + G(\mathbf{R}), \quad (61)$$

où $G(\mathbf{R})$ représente les termes d'ordre deux et plus en fluctuations de densité qui apparaissent dans le calcul de A_{C_0} . On en déduit une relation analogue entre les fonctions de structure de I , C et C_0 ,

$$(\alpha D \rho_0)^2 S_{C_0}(\mathbf{R}) = S_C(\mathbf{R}) - v_0^2 S_I(\mathbf{R}) - 4(\alpha D)^2 \rho_0 \left[M_{v,v,\rho}^{(s)}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) - M_{v,v,\rho}^{(s)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \right] + 2[G(\mathbf{0}) - G(\mathbf{R})].$$

En comparant cette forme à l'équation (60), on voit que les centroïdes modifiés soustraient une proportion plus grande de la structure d'intensité, en enlevant ainsi des termes d'ordre deux, tandis que la normalisation procède à une correction plus complexe, incluant tous les ordres en fluctuations de densité⁹. Une véritable comparaison des mérites de chacune des deux méthodes (centroïdes modifiés et normalisés) requiert des tests numériques, qui n'ont été faits par Lazarian & Esquivel [Lazarian & Esquivel, 2003] que sur des simulations de turbulence MHD hautement compressible. Ce cas particulier dépasse le cadre de notre étude, en raison d'une part des grandes fluctuations de densité, ce qui suggère que la condition du développement en puissances dans le cas du centroïde normalisé n'est pas remplie, et d'autre part parce que la présence d'un champ magnétique brise l'isotropie. Ces deux limitations rendent la comparaison avec le travail de [Lazarian & Esquivel, 2003] assez incertaine, bien qu'il soit raisonnable de penser que les termes d'ordre élevé deviennent dominants. Ainsi, l'efficacité qu'ils prêtent aux centroïdes de vitesse modifiés, par rapport aux centroïdes normalisés, pourrait être liée à la correction de deuxième ordre apportée par S_I , qui est plus importante dans le cas des centroïdes modifiés.

□

⁸Cette relation est obtenue à partir des équations (53) et (58) ainsi que du développement de A_{C_0} à l'ordre deux en fluctuations de densité, non présenté ici.

⁹Y compris des ordres qui n'apparaissent pas dans le développement de A_C , ce qui n'implique pas nécessairement un défaut de la normalisation, les ordres excédentaires pouvant éventuellement compléter les effets d'ordre un.

CHAPITRE XI

Le cas des champs browniens fractionnaires

XI.1 Introduction : l'exemple de l'intensité intégrée

On a évoqué, au début du chapitre précédent, l'existence d'un résultat portant sur les propriétés statistiques de la carte d'intensité intégrée, dans le cas d'un milieu répondant aux hypothèses du chapitre **IX**, c'est-à-dire, essentiellement, un milieu observé dans une transition optiquement mince pour laquelle les conditions d'excitation sont uniformes. Plus précisément, on montre que, si les échelles transverses observées sont plus petites que la profondeur du nuage, alors l'indice spectral β_I de la carte d'intensité intégrée est égal à celui, noté β_ρ , du champ de densité tridimensionnel.

On peut se faire une idée de ce résultat assez simplement en passant dans l'espace de Fourier. Précisons tout d'abord que les notations utilisées dans le chapitre précédent sont toujours valables, c'est-à-dire qu'on note \mathbf{x} les positions tridimensionnelles et \mathbf{X} celles projetées sur le plan du ciel, z désignant la position sur la ligne de visée. Dans l'espace de Fourier, un vecteur d'onde est noté \mathbf{k} , et ses composantes sont notées (k_x, k_y, k_z) dans la base $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ duale de la base usuelle $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$ de l'espace réel. On notera enfin \mathbf{K} la projection de \mathbf{k} sur le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$.

La transformée de Fourier du champ de densité $\rho(\mathbf{x})$ est donnée par

$$\widehat{\rho}(\mathbf{k}) = \iiint \rho(\mathbf{x}) e^{-2i\pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} = a_\rho(\mathbf{k}) \exp[i\phi_\rho(\mathbf{k})] \quad \text{avec} \quad a_\rho(\mathbf{k}) = a_{\rho,0} |\mathbf{k}|^{-\beta_\rho/2},$$

où l'on a introduit l'amplitude et la phase de la transformée, notées respectivement a_ρ et ϕ_ρ , et où l'on a écrit que l'amplitude est donnée par une loi de puissance dont l'exposant est par définition relié à l'indice spectral β_ρ du champ de densité. Effectuant une coupe de $\widehat{\rho}$ dans le plan $k_z = 0$, on a

$$\widehat{\rho}(\mathbf{K}, 0) = \iiint \rho(\mathbf{X}, z) e^{-2i\pi \mathbf{K} \cdot \mathbf{X}} d\mathbf{X} dz = \frac{1}{\alpha} \iint I(\mathbf{X}) e^{-2i\pi \mathbf{K} \cdot \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \frac{1}{\alpha} \widehat{I}(\mathbf{K}).$$

En d'autres termes, la transformée de Fourier de la carte d'intensité est proportionnelle à la coupe $k_z = 0$ dans la transformée de Fourier du champ de densité. Prenant le spectre de puissance de I ,

$$\mathcal{P}_I(\mathbf{K}) = |\widehat{I}(\mathbf{K})|^2 = \alpha^2 |\widehat{\rho}(\mathbf{K}, 0)|^2 = (\alpha a_{\rho,0})^2 |\mathbf{K}|^{-\beta_\rho},$$

on voit qu'effectivement l'indice spectral β_I de la carte d'intensité intégrée est égal à celui du champ de densité. Cependant, cette approche par l'espace de Fourier ne fait pas apparaître la condition de validité selon laquelle on doit se placer à des échelles transverses petites devant la profondeur du nuage, si ce n'est d'une manière assez indirecte¹. Elle ne fournit pas non plus la relation existant entre les indices β_ρ et β_I lorsqu'au contraire les échelles transverses sont plus grandes que la profondeur du nuage. Ces questions, nous semble-t-il, appellent plutôt des réponses dans l'espace direct, fondées sur les mesures statistiques calculées au chapitre **X**. C'est précisément ce que nous allons aborder maintenant.

XI.2 Utilisation de champs browniens fractionnaires représentant ρ et v

XI.2.a Restriction aux premiers termes non triviaux

Dans l'espace réel, on a vu que la fonction d'autocorrélation de la carte d'intensité intégrée avait la forme donnée par l'équation (53). Le résultat explicite ci-dessus et portant sur les propriétés statistiques de cette

¹En effet, la forme en loi de puissance du spectre de puissance du champ de densité ne peut rester valable aux très petits vecteurs d'onde, pour lesquels elle divergerait. La validité de cette loi, et donc du résultat obtenu est donc ainsi restreinte aux grands vecteurs d'onde, et donc aux petites échelles.

carte vis-à-vis de celles du champ de densité tridimensionnel doit *a priori* pouvoir être retrouvé à partir de cette forme. On pourra en déduire alors une relation similaire entre les cartes des centroïdes et le champ de vitesse, puisqu'en se limitant à l'ordre le plus bas, les fonctions d'autocorrélation A_C et A_{C_0} prennent une forme similaire à A_I (voir la section **X.8.a**)

$$A_I(\mathbf{R}) = (\alpha D)^2 [\rho_0^2 + M_{\rho,\rho}(\mathbf{R})], \quad A_C(\mathbf{R}) \simeq (\alpha D \rho_0)^2 [v_0^2 + M_{v,v}(\mathbf{R})] \quad \text{et} \quad A_{C_0}(\mathbf{R}) \simeq v_0^2 + M_{v,v}(\mathbf{R}).$$

Cette restriction aux premiers ordres non triviaux, en ce qui concerne les fonctions d'autocorrélation des centroïdes, peut également se justifier en remarquant que le calcul explicite des formes complètes (58) et (59) requiert la connaissance de nombreuses fonctions de corrélation tridimensionnelles apparaissant sous forme intégrale. Comme il est possible qu'il soit très difficile de construire un ensemble complet et cohérent de telles fonctions avant de calculer analytiquement leurs moyennes, la restriction imposée ici permet de se limiter au calcul des termes non triviaux les plus simples, puisque liés aux autocorrélations $B_{\rho,\rho}$ et $B_{v,v}$ des champs $\delta\rho$ et δv , pris séparément, indépendamment des corrélations possibles entre ces deux champs. Ainsi, ces termes sont *a priori* calculables en se donnant les propriétés statistiques de la densité et de la vitesse sans avoir à se préoccuper de l'interaction entre les deux.

XI.2.b Fonctions d'autocorrélation des fluctuations de densité et de vitesse

Une possibilité consiste à supposer que les deux champs tridimensionnels de densité et de vitesse sont des browniens fractionnaires, tels qu'introduits au chapitre **VII**. On rappelle que ceux-ci peuvent être définis par le biais de leur fonction de structure d'ordre deux. Plus précisément, un brownien fractionnaire X défini sur \mathbb{R}^n est caractérisé par une fonction de structure d'ordre deux de la forme

$$S_X(\mathbf{r}) = \mathbb{E}\{[X(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - X(\mathbf{x})]^2\} = 2\Lambda_X \left(\frac{r}{D}\right)^{2H_X}, \quad (62)$$

où $r = |\mathbf{r}|$ est la longueur du vecteur de séparation, Λ_X est une constante positive et H_X est l'exposant de Hurst, compris strictement entre 0 et 1. L'utilisation de browniens fractionnaires pour modéliser les nuages du milieu interstellaire diffus sans formation d'étoiles [Stutzki *et al.*, 1998, Brunt & Heyer, 2002, Miville-Deschênes *et al.*, 2003b] est justifiée par le fait qu'ils présentent un spectre de puissance en loi de puissance², comme on l'observe dans le MIS, et qu'ils ont un aspect visuel qui rappelle assez nettement la morphologie de ces nuages. En ce qui nous concerne, leur utilité est renforcée par le fait que leur fonction d'autocorrélation est calculable explicitement, et nous les utiliserons donc pour modéliser les champs tridimensionnels. Développant l'expression de la fonction de structure d'ordre deux du champ de densité,

$$S_\rho(\mathbf{r}) = \mathbb{E}\{[\rho(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \rho(\mathbf{x})]^2\} = \mathbb{E}\{[\delta\rho(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \delta\rho(\mathbf{x})]^2\} = 2[\sigma_\rho^2 - B_{\rho,\rho}(\mathbf{r})] = 2\Lambda_\rho \left(\frac{r}{D}\right)^{2H_\rho},$$

on fait apparaître la fonction d'autocorrélation du champ des fluctuations de densité. De même, en ce qui concerne le champ des fluctuations de vitesse longitudinale,

$$S_v(\mathbf{r}) = \mathbb{E}\{[v(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - v(\mathbf{x})]^2\} = \mathbb{E}\{[\delta v(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \delta v(\mathbf{x})]^2\} = 2[\sigma_v^2 - B_{v,v}(\mathbf{r})] = 2\Lambda_v \left(\frac{r}{D}\right)^{2H_v}.$$

Ces deux dernières équations font appel à la relation entre la fonction de structure d'ordre deux d'un champ homogène et sa fonction d'autocorrélation, qu'on a vue au chapitre **V**. On a donc bien des formes explicites pour les fonctions d'autocorrélation des champs de fluctuations de densité $\delta\rho$ et de vitesse δv , données par les expressions suivantes,

$$B_{\rho,\rho}(\mathbf{r}) = \sigma_\rho^2 - \Lambda_\rho \left(\frac{r}{D}\right)^{2H_\rho} \quad \text{et} \quad B_{v,v}(\mathbf{r}) = \sigma_v^2 - \Lambda_v \left(\frac{r}{D}\right)^{2H_v}, \quad (63)$$

qu'on doit injecter dans les expressions des moyennes $M_{\rho,\rho}$ et $M_{v,v}$ apparaissant dans les expressions des trois fonctions d'autocorrélation A_I , A_C et A_{C_0} . La figure **XI.1** donne l'allure des fonctions d'autocorrélation de cette forme pour diverses valeurs de l'exposant de Hurst.

²Ce qui justifie déjà amplement leur utilisation, eu égard au problème posé dans l'introduction.

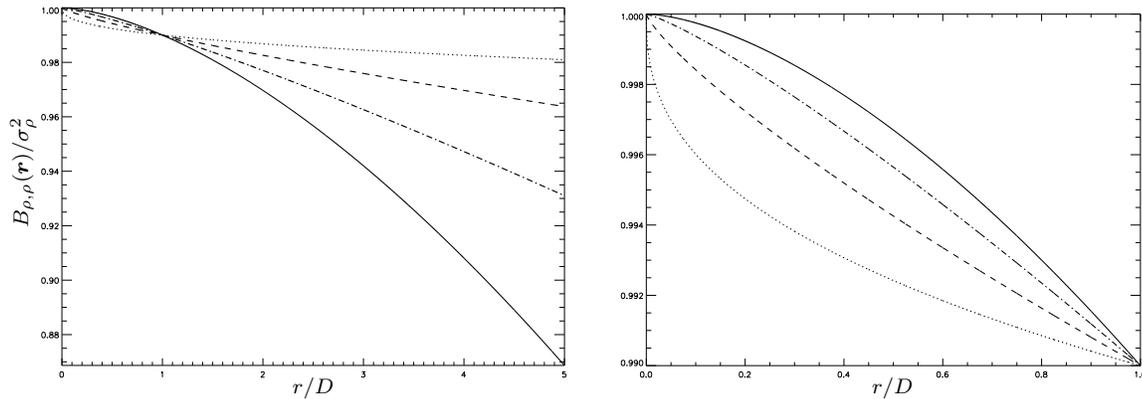


FIG. XI.1 – Allure des fonctions d'autocorrélation $B_{\rho,\rho}$ des fluctuations du champ de densité tridimensionnel dans le cas où celui-ci est du type brownien fractionnaire. On a choisi $\Lambda_\rho = 1$ et on représente l'évolution de $B_{\rho,\rho}(\mathbf{r})/\sigma_\rho^2$ en fonction du rapport r/D , pour quatre valeurs de l'exposant de Hurst, soient $H_\rho = 0,2$ (pointillés), $H_\rho = 0,4$ (tirets), $H_\rho = 0,6$ (trait mixte) et $H_\rho = 0,8$ (trait continu). La figure de gauche présente une vue d'ensemble pour $r \leq 5D$, tandis que la figure de droite montre plus précisément l'évolution des fonctions d'autocorrélation pour $r \leq D$.

XI.3 Développement de la fonction d'autocorrélation moyennée

XI.3.a La méthode de Chandrasekhar et Münch

Comme on le voit, les fonctions d'autocorrélation $B_{\rho,\rho}$ et $B_{v,v}$ ne dépendent que de la séparation scalaire r . Or, dans les intégrales définissant $M_{\rho,\rho}$ et $M_{v,v}$, l'argument de ces fonctions est de la forme $\mathbf{R} + (z_2 - z_1)\mathbf{u}_z$, où z_1 et z_2 sont deux variables indépendantes. La valeur de la fonction d'autocorrélation est donc constante sur les droites $z_2 - z_1 = a$. Ceci suggère de chercher à écrire les moyennes $M_{\rho,\rho}$ et $M_{v,v}$ non plus comme des intégrales doubles sur z_1 et z_2 , mais comme des intégrales simples sur la séparation $z_2 - z_1$ le long de la ligne de visée. C'est précisément ce que fournit la méthode de calcul de Chandrasekhar et Münch [Chandrasekhar & Münch, 1952], dont on donne le résultat ci-dessous.

Soient donc une fonction f , définie sur \mathbb{R} et à valeurs réelles, et D un réel strictement positif. On considère l'intégrale double \mathcal{J} , définie par la relation

$$\mathcal{J} = \iint_{I_D^2} f(x_2 - x_1) dx_1 dx_2 \quad \text{où le domaine d'intégration est } I_D^2 = I_D \times I_D \text{ avec } I_D = \left[-\frac{D}{2}, \frac{D}{2}\right].$$

Étant donné que l'intégrande ne dépend que de la différence $z = x_2 - x_1$, il est naturel de procéder à un changement de variables de manière à faire apparaître cette variable z . On obtient ainsi une expression de \mathcal{J} sous la forme d'une intégrale simple, donnée par

$$\mathcal{J} = \int_{I_{2D}} (D - |z|) f(z) dz \quad \text{en remarquant que } z \in I_{2D} = [-D, D]. \quad (64)$$

Le facteur $(D - |z|)$ est une pondération traduisant le fait que, le domaine de variation de x_1 et de x_2 étant fini, le nombre de couples (x_1, x_2) dont la séparation z est donnée dépend justement de la valeur de z . Par exemple, un seul couple est tel que $z = D$, tandis que de nombreux couples contribuent à la séparation nulle. Cette pondération apparaît graphiquement sur la figure XI.2.

Cette formule est directement applicable aux expressions des moyennes $M_{\rho,\rho}$ et $M_{v,v}$, qu'on écrit donc

$$M_{\rho,\rho}(\mathbf{R}) = \frac{1}{D^2} \int_{I_{2D}} (D - |z|) B_{\rho,\rho}(\mathbf{R} + z\mathbf{u}_z) dz \quad \text{et} \quad M_{v,v}(\mathbf{R}) = \frac{1}{D^2} \int_{I_{2D}} (D - |z|) B_{v,v}(\mathbf{R} + z\mathbf{u}_z) dz,$$

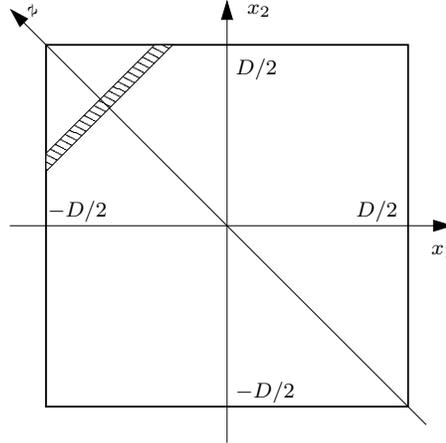


FIG. XI.2 - Représentation graphique de la méthode de calcul de Chandrasekhar et Münch [Chandrasekhar & Münch, 1952]. Le domaine d'intégration est le carré I_D^2 dans l'espace repéré par les coordonnées (x_1, x_2) . Le calcul de l'intégrale, sur ce domaine, d'une fonction dépendant uniquement de la différence $z = x_2 - x_1$ est calculable en prenant les éléments de surface hachurés, de longueur $D - |z|$ et de largeur dz .

où l'on a noté $z = z_2 - z_1$, par souci de cohérence avec l'écriture de (64). On va maintenant calculer explicitement ces expressions en utilisant pour les fonctions d'autocorrélation $B_{\rho,\rho}$ et $B_{v,v}$ les formes déterminées plus haut, correspondant au cas des browniens fractionnaires.

XI.3.b Mise en place du calcul

Étant donc donnée la forme (63) des fonctions d'autocorrélation des fluctuations de densité et de vitesse, leurs moyennes $M_{\rho,\rho}$ et $M_{v,v}$ se calculent en écrivant une intégrale de la forme

$$M(\mathbf{R}) = \frac{1}{D^2} \int_{I_{2D}} \left[\sigma^2 - \Lambda \frac{(R^2 + z^2)^H}{D^{2H}} \right] (D - |z|) dz \quad \text{où l'on a écrit } r^2 = R^2 + z^2, \text{ avec } R = |\mathbf{R}|. \quad (65)$$

Les constantes Λ et H devront *in fine* être remplacées respectivement par Λ_ρ et H_ρ dans le cadre du calcul de $M_{\rho,\rho}$, et par Λ_v et H_v dans le cadre du calcul de $M_{v,v}$. La figure XI.3 montre l'allure générale des courbes $M(\mathbf{R})$ pour un ensemble de valeurs de l'exposant H . On y voit qu'elles traduisent bien l'évolution des fonctions d'autocorrélation sous-jacentes, comme on pouvait s'y attendre. On remarque néanmoins qu'elles ne tendent pas toutes vers la même limite aux petites échelles transverses, contrairement aux fonctions d'autocorrélation tridimensionnelles de la figure XI.1.

Passant au calcul analytique de l'expression de $M(\mathbf{R})$, on voit que la parité de l'intégrande permet de réécrire cette forme comme une intégrale sur $[0, D]$,

$$M(\mathbf{R}) = \frac{2}{D^2} \left[\sigma^2 \int_0^D (D - z) dz - \frac{\Lambda}{D^{2H}} \int_0^D (R^2 + z^2)^H (D - z) dz \right].$$

La première intégrale dans cette expression est facilement calculable,

$$\int_0^D (D - z) dz = \frac{D^2}{2} \quad \text{et donc} \quad M(\mathbf{R}) = \sigma^2 - \frac{2\Lambda}{D^{2H+1}} \int_0^D (R^2 + z^2)^H dz + \frac{2\Lambda}{D^{2H+2}} \int_0^D z (R^2 + z^2)^H dz.$$

La dernière intégrale peut être explicitée assez facilement, en utilisant comme variable la séparation scalaire tridimensionnelle r , liée à la séparation longitudinale z par $R^2 + z^2 = r^2$. La séparation transverse R étant

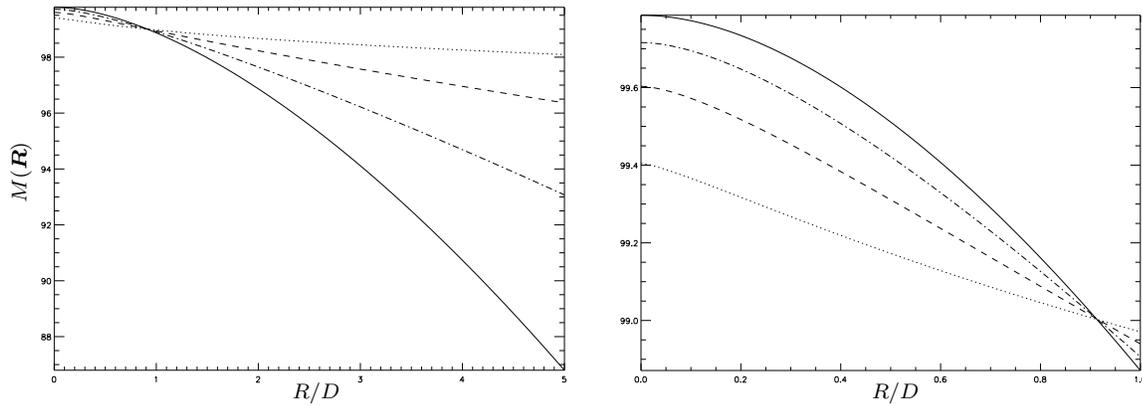


FIG. XI.3 – Allure des fonctions $M(\mathbf{R})$ pour différentes valeurs de l'exposant de Hurst, à savoir $H = 0,2$ (pointillés), $H = 0,4$ (tirets), $H = 0,6$ (trait mixte) et $H = 0,8$ (trait continu). Les valeurs des paramètres sont $\Lambda = 1$ et $\sigma = 10$, de sorte que les fonctions, maximales en zéro, y prennent la valeur spécifiée par l'équation (67). Comme pour la figure XI.1, on montre à gauche l'évolution pour des valeurs de la séparation transverse $R \leq 5D$, et à droite un zoom sur la région $R \leq D$.

fixée, le changement de variable se traduit par $zdz = r dr$, d'où l'intégrale indéfinie

$$\int z (R^2 + z^2)^H dz = \int r^{2H+1} dr = \frac{r^{2(H+1)}}{2(H+1)} \quad \text{car } 2H+1 \neq -1 \text{ pour } 0 < H < 1.$$

Les bornes d'intégration sur r étant R et $\sqrt{R^2 + D^2}$, on obtient l'expression suivante

$$M(\mathbf{R}) = \sigma^2 + \frac{\Lambda}{H+1} \left[\left(1 + \frac{R^2}{D^2}\right)^{H+1} - \left(\frac{R^2}{D^2}\right)^{H+1} \right] - \frac{2\Lambda}{D^{2H+1}} \int_0^D (R^2 + z^2)^H dz. \quad (66)$$

Dans le cas général, l'intégrale restante ne peut pas être explicitée [Gradshteyn & Ryzhik, 1980] à l'aide des fonctions usuelles. Il existe néanmoins trois cas particuliers, les deux valeurs extrêmes de l'exposant de Hurst, $H = 0$ et $H = 1$, qu'on ne considérera pas dans la suite, et le cas d'une séparation transverse nulle $R = 0$, quel que soit H . Dans ce dernier cas, on a explicitement

$$M(\mathbf{0}) = \sigma^2 + \frac{\Lambda}{H+1} - \frac{2\Lambda}{D^{2H+1}} \int_0^D z^{2H} dz = \sigma^2 + \frac{\Lambda}{H+1} - \frac{2\Lambda}{2H+1} = \sigma^2 - \frac{\Lambda}{(2H+1)(H+1)}. \quad (67)$$

XI.3.c Approche en termes de développement limité

La connaissance de cette limite pour une séparation transverse nulle incite à chercher le comportement de $M(\mathbf{R})$ pour les petites séparations $R \ll D$, ce qui correspond à étudier la structure à petite échelle des cartes bidimensionnelles. Cette approche est également justifiée par le fait qu'il est déjà connu [Stutzki *et al.*, 1998] que c'est dans cette limite que le spectre de puissance de l'intensité intégrée est égal à celui de la densité, pour le cas d'une transition optiquement mince. Pour simplifier les notations, on introduit pour la suite du calcul la variable $x = R/D$, de sorte que considérer la limite des petites séparations consiste alors à développer l'expression de $M(\mathbf{R})$ en puissances de x au voisinage de 0. On écrit par ailleurs celle-ci comme

$$M(\mathbf{R}) = \sigma^2 + L(x, H) = \sigma^2 + J(x, H) + K(x, H),$$

où l'on a introduit les fonctions suivantes, qu'il va s'agir de développer en puissances de x pour $x \ll 1$,

$$J(x, H) = \frac{\Lambda}{H+1} \left[(1+x^2)^{H+1} - x^{2(H+1)} \right] \quad \text{et} \quad K(x, H) = -2\Lambda \int_0^1 (x^2 + y^2)^H dy,$$

où $y = z/D$ devient la variable naturelle d'intégration. Le développement de J est sans difficulté,

$$J(x, H) = \frac{\Lambda}{H+1} \left[\sum_{n \geq 0} \frac{\gamma_n(H+1)}{n!} x^{2n} - x^{2(H+1)} \right] \quad \text{avec} \quad \gamma_n(x) = x(x-1)\dots(x-n+1).$$

La figure XI.4 montre les développements successifs de $J(x, H)$ en fonction de l'ordre maximal considéré, pour $x \leq 1$, dans les cas $H = 0, 4$ et $H = 0, 6$. La différence entre ces deux cas est que le terme d'ordre $2(H+1)$ est compris entre les ordres deux et trois dans le premier cas, et entre les ordres trois et quatre dans le second cas.

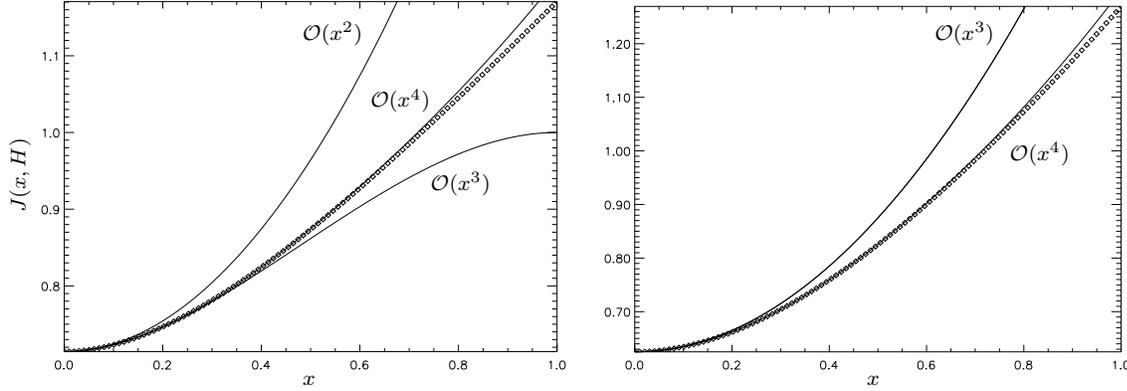


FIG. XI.4 – Développement de $J(x, H)$ en fonction de l'ordre maximal considéré. La figure de gauche présente un exemple pour lequel l'exposant de Hurst est $H = 0, 4$. La figure de droite correspond à $H = 0, 6$. Dans les deux cas, on a pris $\Lambda = 1$. Le calcul exact, représenté par les losanges, est approché par les développements aux ordres deux, trois et quatre, comme indiqué sur les figures. Le terme en $x^{2(H+1)}$ apparaît à l'ordre trois sur la figure de gauche et à l'ordre quatre sur celle de droite.

Le développement de $K(x, H)$ est plus délicat, comme on pouvait le prévoir du fait que l'intégrale contenue dans cette fonction n'est pas calculable explicitement. Comme on se place dans la limite $x \ll 1$, on peut cependant, en posant $t = y/x$, l'écrire sous la forme

$$K(x, H) = -2\Lambda x^{2H+1} \int_0^{1/x} (1+t^2)^H dt = -2\Lambda x^{2H+1} \left[\int_0^1 (1+t^2)^H dt + \int_1^{1/x} (1+t^2)^H dt \right].$$

La première intégrale, entre 0 et 1, qu'on note $K_0(H)$, ne peut pas être explicitée, mais puisqu'elle ne dépend pas de x et donc pas non plus de la valeur de la séparation R , le fait qu'elle ne soit pas calculable analytiquement n'est pas gênant pour l'étude de la structure des cartes des moments. La seconde intégrale peut être transformée afin de développer l'intégrande en puissances de $1/t$,

$$\int_1^{1/x} (1+t^2)^H dt = \int_1^{1/x} t^{2H} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^H dt = \sum_{k \geq 0} \frac{\gamma_k(H)}{k!} \int_1^{1/x} t^{2H-2k} dt, \quad (68)$$

en rappelant que ce développement, déjà utilisé plus haut dans le cadre du calcul de $J(x, H)$, est valable parce que $t \geq 1$. Le calcul des intégrales dans l'équation ci-dessus est trivial, dès lors qu'on remarque que pour $H \neq 0, 5$ les exposants $2H - 2k$ ne peuvent être égaux à -1 . On a alors

$$\int_1^{1/x} t^{2H-2k} dt = \frac{1}{2H-2k+1} \left[\frac{1}{x^{2H-2k+1}} - 1 \right].$$

Insérant cette expression dans les équations précédentes, on obtient le développement de $K(x, H)$,

$$K(x, H) = -2\Lambda x^{2H+1} \left[K_0(H) + \sum_{k \geq 0} \frac{\gamma_k(H)}{k!} \frac{1}{2H-2k+1} \left(\frac{1}{x^{2H-2k+1}} - 1 \right) \right],$$

dont l'écriture finale nécessite un réarrangement des termes, de façon à faire explicitement apparaître les puissances de x qui interviennent dans cette expression,

$$K(x, H) = -2\Lambda \left[K_0(H) - \sum_{k \geq 0} \frac{\gamma_k(H)}{k!} \frac{1}{2H - 2k + 1} \right] x^{2H+1} - 2\Lambda \sum_{k \geq 0} \frac{\gamma_k(H)}{k!} \frac{x^{2k}}{2H - 2k + 1}.$$

La figure **XI.5** montre le développement de $K(x, H)$ en fonction de l'ordre maximal considéré, pour $H = 0, 4$ et $H = 0, 6$. Le terme d'ordre $2H + 1$ apparaît dans le premier cas entre les ordres un et deux - lequel est alors égal strictement à l'ordre trois - et entre les ordres deux et trois dans le second cas.

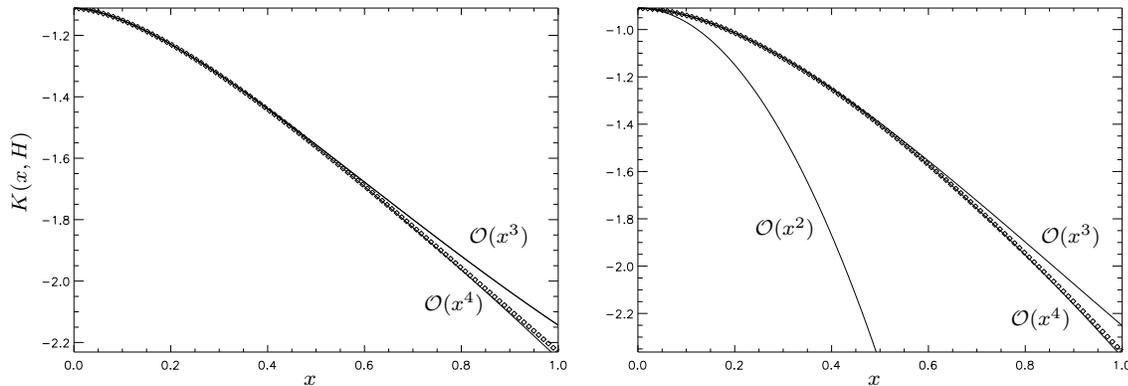


FIG. **XI.5** – Développement de $K(x, H)$ en fonction de l'ordre maximal considéré. La figure de gauche présente un exemple pour lequel l'exposant de Hurst est $H = 0, 4$. La figure de droite correspond à $H = 0, 6$. Dans les deux cas, on a pris $\Lambda = 1$. Le calcul exact, représenté par les losanges, est approché par les développements aux ordres deux, trois et quatre, comme indiqué sur les figures. Le terme en x^{2H+1} apparaît à l'ordre deux sur la figure de gauche et à l'ordre trois sur celle de droite.

Remarquons que pour $H = 1/2$, le calcul des différents termes du développement (68) est inchangé, sauf en ce qui concerne le terme $k = 1$, qui donne évidemment une contribution logarithmique,

$$\int_1^{1/x} t^{-1} dt = -\ln x \quad \text{d'où} \quad K(x, 1/2) = -2\Lambda x^2 \left\{ K_0(1/2) - \frac{\ln x}{2} + \sum_{k \neq 1} \frac{\gamma_k(1/2)}{(2-2k)k!} \left[\frac{1}{x^{2-2k}} - 1 \right] \right\},$$

ce qui donne, après réarrangement des termes, une expression où le premier terme non constant est précisément issu de cette contribution logarithmique,

$$K(x, 1/2) = -\Lambda \left\{ 1 - x^2 \ln x + \left[2K_0(1/2) - \sum_{k \neq 1} \frac{\gamma_k(1/2)}{(1-k)k!} \right] x^2 + \sum_{k \geq 2} \frac{\gamma_k(1/2)}{(1-k)k!} x^{2k} \right\}.$$

XI.3.d Détermination du comportement dominant aux petites échelles

On peut alors rassembler les développements de $J(x, H)$ et de $K(x, H)$ pour obtenir la forme de la quantité $M(\mathbf{R})$ aux petites séparations sur le plan du ciel. L'expression obtenue est relativement lourde, bien que ne présentant pas de difficulté. On ne l'écrira cependant pas, pour se concentrer sur la détermination du comportement de $M(\mathbf{R})$ pour $R \ll D$. Pour cela, on remarque que le développement au "premier ordre" de $K(x, H)$ dépend de la valeur de H . En effet, si $0 < H < 1/2$, alors $2H + 1 < 2$ et le terme dominant dans $K(x, H)$ est celui en x^{2H+1}

$$K(x, H) \simeq -\frac{2\Lambda}{2H+1} - 2\Lambda \left[K_0(H) - \sum_{k \geq 0} \frac{\gamma_k(H)}{k!} \frac{1}{2H - 2k + 1} \right] x^{2H+1},$$

tandis que si $1/2 < H < 1$, alors $2 < 2H + 1$ et le terme dominant est celui en x^2 ,

$$K(x, H) \simeq -2\Lambda \left[\frac{1}{2H+1} + \frac{H}{2H-1} x^2 \right].$$

Dans le cas particulier $H = 1/2$, le terme dominant non constant est le terme logarithmique, d'où

$$K(x, 1/2) \simeq -\Lambda + \Lambda x^2 \ln x.$$

Concernant le développement de $J(x, H)$, et étant donné que $2H + 2 > 2$, le terme dominant non constant³ est quant à lui le terme en x^2 , quelle que soit la valeur de l'exposant de Hurst. On doit donc tenir compte ou non de ce terme dans l'étude du comportement de $M(\mathbf{R})$ aux petites échelles $R \ll D$ sur le plan du ciel, suivant la valeur de H . On a alors, respectivement,

$$M(\mathbf{R}) \simeq \sigma^2 - \frac{\Lambda}{(2H+1)(H+1)} - 2\Lambda \left[K_0(H) - \sum_{k \geq 0} \frac{\gamma_k(H)}{k!} \frac{1}{2H-2k+1} \right] x^{2H+1} \quad \text{pour } H < \frac{1}{2},$$

$$M(\mathbf{R}) \simeq \sigma^2 - \frac{\Lambda}{3} + \Lambda x^2 \ln x \quad \text{pour } H = \frac{1}{2},$$

$$M(\mathbf{R}) \simeq \sigma^2 - \frac{\Lambda}{(2H+1)(H+1)} - \frac{\Lambda}{2H-1} x^2 \quad \text{pour } H > \frac{1}{2},$$

en rappelant que la variable x représente simplement le rapport de la séparation transverse R à la profondeur D de la couche turbulente. Pour simplifier l'écriture et la compréhension de ces résultats, on introduit dans la suite des fonctions a et b ne dépendant que de la valeur de l'exposant de Hurst, de sorte que l'on puisse écrire les expressions précédentes sous la forme⁴

$$M(\mathbf{R}) \simeq \sigma^2 + \Lambda a(H) - \Lambda b(H) x^{2H+1} \quad \text{pour } H < \frac{1}{2},$$

$$M(\mathbf{R}) \simeq \sigma^2 + \Lambda a(H) - \Lambda b(H) x^2 \quad \text{pour } H > \frac{1}{2}.$$

On dispose numériquement des formes de $M(\mathbf{R})$ quel que soit l'exposant de Hurst et la séparation transverse R , qu'on obtient en faisant l'intégration directe selon (65). C'est ainsi qu'on a pu en montrer quelques exemples sur la figure XI.3. Il est donc possible d'estimer la validité de l'approximation exprimée par les deux équations précédentes. La figure XI.6 montre ainsi, pour diverses valeurs de l'exposant de Hurst H , l'erreur relative commise en assimilant les quantités $M(\mathbf{R})$ à leurs développements respectifs aux ordres les plus bas, tels qu'on vient de les écrire, soit

$$\Delta(x, H) = \frac{\Lambda a(H) - \Lambda b(H) x^{f(H)} - L(x, H)}{L(x, H)} \quad \text{où } f(H) = \min(2, 2H + 1).$$

Notons que cette erreur relative porte en fait sur le développement de $L(x, H) = J(x, H) + K(x, H)$ plutôt que sur celui de $M(\mathbf{R})$, du fait de la présence, dans ce dernier, du terme constant σ^2 , qui peut écraser les effets qu'on souhaite mettre en évidence. D'après la figure XI.6, on voit que cette erreur reste inférieure à environ 10% dès lors que la séparation transverse est plus petite qu'un dixième de la profondeur du nuage. On remarque également que l'erreur est d'autant plus faible qu'on est éloigné de la valeur critique $H = 1/2$.

Pour préciser ce dernier point, on montre sur la figure XI.7 deux autres visualisations possibles de l'erreur relative, en fonction de l'exposant de Hurst. L'une d'elles, à gauche, montre cette erreur à différentes séparations transverses données. On voit la divergence de cette erreur au point critique $H = 1/2$. La validité de l'approximation d'ordre le plus bas est alors jugée sur la figure de droite, qui montre la séparation transverse maximale autorisée pour que l'erreur relative ne dépasse pas 1%, toujours en fonction de l'exposant de Hurst.

³Il existe toujours un terme constant, dont on tient évidemment compte.

⁴On ne parlera plus explicitement du cas particulier $H = 1/2$, afin d'alléger la présentation des résultats.

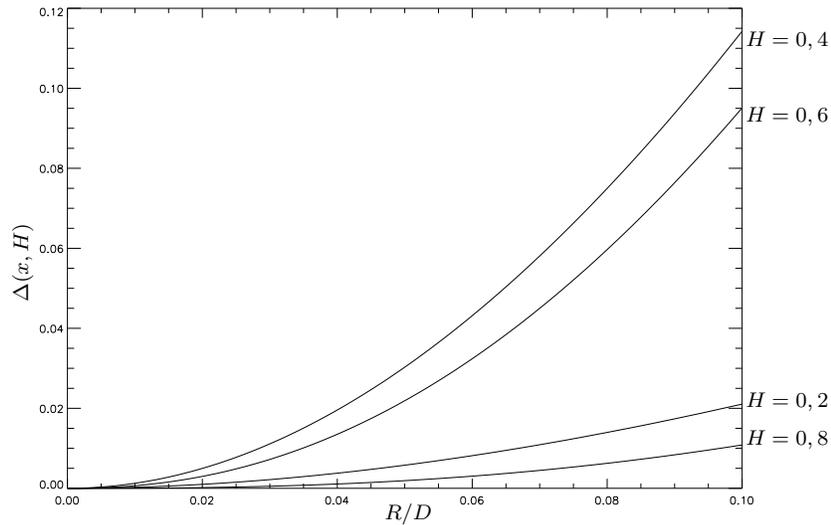


FIG. XI.6 – Erreur relative commise en assimilant $L(x, H)$ aux développements de premier ordre, pour quatre valeurs de H , en fonction de la séparation transverse rapportée à la profondeur.

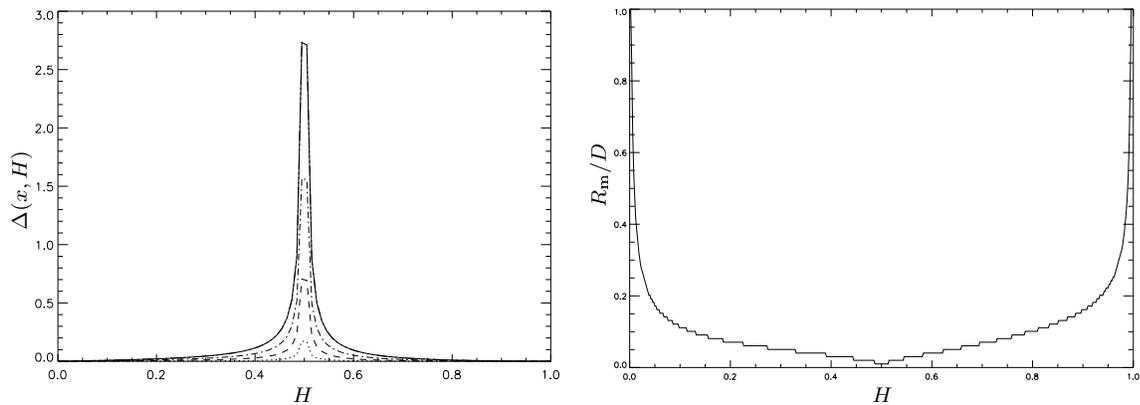


FIG. XI.7 – Visualisation de l'erreur relative constatée sur la figure XI.6. La figure de gauche représente, pour différentes séparations transverses, l'erreur relative en fonction de l'exposant de Hurst H . Les différentes courbes correspondent aux séparations $R = D/4$ (pointillés), $R = D/2$ (tirets), $R = 3D/4$ (trait mixte) et $R = D$ (trait continu). On voit notamment que l'erreur diverge au voisinage du point critique $H = 1/2$. La figure de droite représente la séparation transverse maximale, rapportée à la profondeur du nuage, au delà de laquelle l'erreur relative dépasse un certain seuil, ici 1%.

XI.3.e Fonctions d'autocorrélation et fonctions de structure des cartes

Lorsque les développements de la section précédente sont valides, les conséquences sur les mesures statistiques effectuées sur les cartes des moments sont simples à déduire. En effet, la fonction d'autocorrélation moyennée des fluctuations de vitesse, $M_{v,v}$, est donnée par l'une des formes écrites ci-dessus, suivant la valeur de l'exposant de Hurst H_v du champ de vitesse tridimensionnel. Des relations similaires sont satisfaites par $M_{\rho,\rho}$ en fonction de la valeur de H_ρ .

Les fonctions d'autocorrélation des cartes de l'intensité et des deux types de centroïdes de vitesse sont de la même forme, étant données les expressions qu'elles prennent à l'ordre le plus bas (voir la section **XI.2.a**), et on a, en prenant l'exemple de la carte d'intensité,

$$A_I(\mathbf{R}) \simeq (\alpha D)^2 \left[\rho_0^2 + \sigma_\rho^2 + \Lambda_\rho a(H_\rho) - \Lambda_\rho b(H_\rho) \left(\frac{R}{D} \right)^{2H_\rho+1} \right] \quad \text{pour } H_\rho < \frac{1}{2},$$

$$A_I(\mathbf{R}) \simeq (\alpha D)^2 \left[\rho_0^2 + \sigma_\rho^2 + \Lambda_\rho a(H_\rho) - \Lambda_\rho b(H_\rho) \left(\frac{R}{D} \right)^2 \right] \quad \text{pour } H_\rho > \frac{1}{2}.$$

De même, en ce qui concerne les fonctions d'autocorrélation des cartes de centroïdes de vitesse

$$A_C(\mathbf{R}) = (\alpha D \rho_0)^2 A_{C_0}(\mathbf{R}) \simeq (\alpha D \rho_0)^2 \left[v_0^2 + \sigma_v^2 + \Lambda_v a(H_v) - \Lambda_v b(H_v) \left(\frac{R}{D} \right)^{2H_v+1} \right] \quad \text{pour } H_v < \frac{1}{2},$$

$$A_C(\mathbf{R}) = (\alpha D \rho_0)^2 A_{C_0}(\mathbf{R}) \simeq (\alpha D \rho_0)^2 \left[v_0^2 + \sigma_v^2 + \Lambda_v a(H_v) - \Lambda_v b(H_v) \left(\frac{R}{D} \right)^2 \right] \quad \text{pour } H_v > \frac{1}{2}.$$

L'utilisation des fonctions de structure d'ordre deux permet de s'affranchir des termes constants, puisqu'elles font intervenir la différence entre les valeurs des fonctions d'autocorrélation en \mathbf{R} et à séparation nulle, les champs étant homogènes. Reprenant le cas de la carte d'intensité, on a alors

$$S_I(\mathbf{R}) = 2(\alpha D)^2 \Lambda_\rho b(H_\rho) \left(\frac{R}{D} \right)^{2H_\rho+1} \quad \text{pour } H_\rho < \frac{1}{2},$$

$$S_I(\mathbf{R}) = 2(\alpha D)^2 \Lambda_\rho b(H_\rho) \left(\frac{R}{D} \right)^2 \quad \text{pour } H_\rho > \frac{1}{2}.$$

On retrouve les mêmes formes dans le cas des cartes de centroïdes de vitesse,

$$S_C(\mathbf{R}) = (\alpha D \rho_0)^2 S_{C_0}(\mathbf{R}) \simeq 2(\alpha D \rho_0)^2 \Lambda_v b(H_v) \left(\frac{R}{D} \right)^{2H_v+1} \quad \text{pour } H_v < \frac{1}{2},$$

$$S_C(\mathbf{R}) = (\alpha D \rho_0)^2 S_{C_0}(\mathbf{R}) \simeq 2(\alpha D \rho_0)^2 \Lambda_v b(H_v) \left(\frac{R}{D} \right)^2 \quad \text{pour } H_v > \frac{1}{2}.$$

XI.4 Conséquences des formes calculées à l'ordre le plus bas

Les formes obtenues ci-dessus pour les fonctions de structure des cartes de l'intensité et des deux types de centroïdes de vitesse montrent que, dans le contexte de champs tridimensionnels de type brownien fractionnaire, et dans le cadre des hypothèses utilisées tout au long de ce chapitre et du précédent, les cartes bidimensionnelles I , C et C_0 sont également des browniens fractionnaires, puisque leurs fonctions de structure sont des lois de puissance.

On peut également obtenir une relation entre les exposants de Hurst des champs sous-jacents et ceux des cartes d'observables. Par exemple, les exposants de Hurst H_C et H_{C_0} des cartes de centroïdes de vitesse sont liés à celui du champ de vitesse tridimensionnel par

$$H_C = H_{C_0} = H_v + \frac{1}{2} \quad \text{pour } 0 < H_v < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad H_C = H_{C_0} = 1 \quad \text{pour } \frac{1}{2} < H_v < 1.$$

Il en va de même de la carte de l'intensité intégrée, dont l'exposant de Hurst H_I est donné par

$$H_I = H_\rho + \frac{1}{2} \quad \text{pour } 0 < H_\rho < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad H_I = 1 \quad \text{pour } \frac{1}{2} < H_\rho < 1.$$

Ce dernier résultat reste à relier à celui cité dans l'introduction de ce chapitre, ce qu'on peut faire en notant que l'indice spectral β et l'exposant de Hurst H sont liés par $\beta = 2H + n$, où n est la dimension de l'espace sur lequel est défini le champ. L'égalité, notée par [Stutzki *et al.*, 1998] et [Goldman, 2000], entre l'indice spectral β_I de la carte d'intensité intégrée et celui β_ρ du champ de densité tridimensionnel, dans le cas de raies optiquement minces, dès lors que la profondeur D du nuage est plus grande que les échelles transverses R considérées, permet alors d'écrire, indépendamment de notre résultat, que l'exposant de Hurst de la carte d'intensité intégrée est donné par

$$H_I = \frac{\beta_I - 2}{2} = \frac{\beta_\rho - 3}{2} + \frac{1}{2} = H_\rho + \frac{1}{2} \quad \text{pour } H_\rho < \frac{1}{2},$$

en utilisant le fait que cette carte est bidimensionnelle, tandis que le champ de densité de départ est tridimensionnel. D'autre part, [Stutzki *et al.*, 1998] complète ce résultat en montrant qu'au delà de la valeur critique $H_\rho = 1/2$, l'exposant de Hurst de la carte d'intensité intégrée devient constant et vaut $H_I = 1$. Ces relations sont obtenues par [Goldman, 2000] et [Stutzki *et al.*, 1998] dans le cadre d'un calcul dans l'espace de Fourier, et correspondent précisément à ce que nous déduisons de notre étude analytique effectuée dans le seul espace réel, laquelle permet également d'estimer la valeur maximale du rapport R/D permettant d'écrire $\beta_I = \beta_\rho$.

En ce qui concerne le champ de vitesse, nos résultats semblent indiquer que les indices spectraux β_C et β_{C_0} correspondant respectivement aux cartes des centroïdes non normalisés et des centroïdes normalisés, sont égaux à celui du champ de vitesse tridimensionnel, β_v , dans la limite des échelles transverses petites devant la profondeur du nuage et dans l'hypothèse des fluctuations faibles de densité. C'est l'un des objectifs du chapitre suivant que de vérifier numériquement cette prédiction et d'en tester les limites.

□

CHAPITRE XII

Étude numérique des centroïdes de vitesse

XII.1 Introduction

Les chapitres **X** et **XI** ont mis en évidence des relations entre les propriétés statistiques de quantités observées telles que l'émission intégrée et les centroïdes de vitesse, normalisés ou non, et les propriétés des champs tridimensionnels de densité et de vitesse, qui sont les quantités pertinentes pour décrire la turbulence interstellaire. En particulier, le chapitre **XI** a montré que dans le cas où ces deux champs sont des browniens fractionnaires, et lorsqu'on se limite aux échelles transverses petites devant la profondeur du nuage, les cartes bidimensionnelles des observables mentionnées ci-dessus sont également des browniens fractionnaires, en faisant, dans le cas des cartes de centroïdes, l'hypothèse supplémentaire selon laquelle les fluctuations de densité sont faibles.

L'objectif de ce chapitre est de vérifier numériquement ces résultats, en simulant des observations de spectro-imagerie, c'est-à-dire des cubes de données position-position-vitesse (PPV), à partir de champs de densité et de vitesse de type brownien fractionnaire, et en mesurant les propriétés statistiques des cartes d'intensité intégrée et de centroïdes de vitesse tirées de ces cubes. On essaiera également, autant que possible, de déterminer les conditions de validité de ces résultats, étant données les hypothèses faites précédemment pour les obtenir analytiquement.

Avant de passer à la suite, remarquons que l'utilisation de champs browniens fractionnaires pour simuler la densité et la vitesse du milieu interstellaire diffus permet de compléter les études effectuées sur des simulations magnétohydrodynamiques (voir par exemple [Ostriker *et al.*, 2001]) parce que le manque de "réalité" physique qui caractérise ces champs aléatoires est en un certain sens compensé par la large plage d'échelles accessibles à l'analyse en termes de lois de puissance. Dans les simulations numériques de turbulence, le domaine inertiel est en effet sévèrement limité par la résolution disponible et le grand nombre d'échelles affectées par l'injection ou la dissipation d'énergie.

XII.2 Construction de champs de densité et de vitesse

La section **VII.4.b** a permis de présenter, de manière détaillée, une méthode de construction numérique de champs browniens fractionnaires en dimension quelconque, à partir de leurs propriétés dans l'espace de Fourier. On rappelle ici simplement que pour construire un champ de dimension $\mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ et d'indice spectral β , on se donne deux cubes **A** (amplitude) et Φ (phase), de même dimension que le champ souhaité, tels que les éléments du cube **A** dépendent du module du vecteur d'onde suivant une loi de puissance d'exposant $-\beta/2$, et que ceux du cube Φ prennent des valeurs aléatoires avec une distribution uniforme entre 0 et 2π , en respectant la propriété d'imparité $\Phi(-\mathbf{k}) = -\Phi(\mathbf{k})$. Le champ obtenu comme transformée de Fourier inverse de $\mathbf{A} \exp[i\Phi]$ modélise alors un brownien fractionnaire ayant les propriétés attendues. C'est cette méthode que nous allons utiliser pour construire des champs de densité et de vitesse tridimensionnels possédant des indices spectraux donnés *a priori*. Il faut d'ailleurs noter que cette méthode fondée dans l'espace de Fourier aboutit à des distributions périodiques et que par conséquent, nos simulations, contrairement aux données réelles, ne seront pas soumises au problème des conditions aux limites non périodiques¹.

On construit donc une série de champs browniens fractionnaires, tous de taille $128 \times 128 \times 128$ pixels, dont les exposants de Hurst sont choisis pour être de la forme $H = p/4$, avec p un entier compris entre 0 et 4, de sorte que les indices spectraux utilisés prennent la forme $\beta = 3 + p/2$, et sont donc compris entre 3

¹Ce point a son importance car les algorithmes de transformation de Fourier tels que la FFT traitent les images comme périodiques. Si elles ne le sont pas, des discontinuités apparaissent artificiellement aux bords et se traduisent par des composantes à hautes fréquences spatiales dans le spectre de puissance. D'un autre côté, si l'on apodise une image pour éviter ce problème, cela peut avoir des conséquences aux grandes échelles.

et 5, comme il se doit pour des champs tridimensionnels. Comme il s'agit de modéliser deux champs, l'un étant la densité $\rho(\mathbf{x})$ et l'autre la vitesse longitudinale $v(\mathbf{x})$, on construit deux browniens fractionnaires pour chaque indice spectral. De plus, le cas particulier d'une densité uniforme étant en soi intéressant, on construit un sixième champ de densité correspondant à ce cas de figure.

Par construction, les valeurs moyennes des cubes de densité et de vitesse sont déterminées initialement par la valeur de l'amplitude au pixel choisi comme origine de l'espace de Fourier. Leurs variances sont quant à elles liées au nombre total de pixels et à l'indice spectral. Pour obtenir des valeurs physiquement plausibles, on applique la procédure suivante, une fois les cubes construits : les valeurs minimales des cubes de densité en sont soustraites, afin d'obtenir des valeurs uniquement positives, et on multiplie le résultat par un facteur tel que la densité moyenne obtenue soit $\rho_0 = 90 \text{ cm}^{-3}$. En ce qui concerne les cubes de vitesse, on commence par soustraire la valeur moyenne de manière à avoir $v_0 = 0$, puis on multiplie par un facteur numérique pour obtenir une dispersion de vitesse $\sigma_v = 3 \text{ km s}^{-1}$.

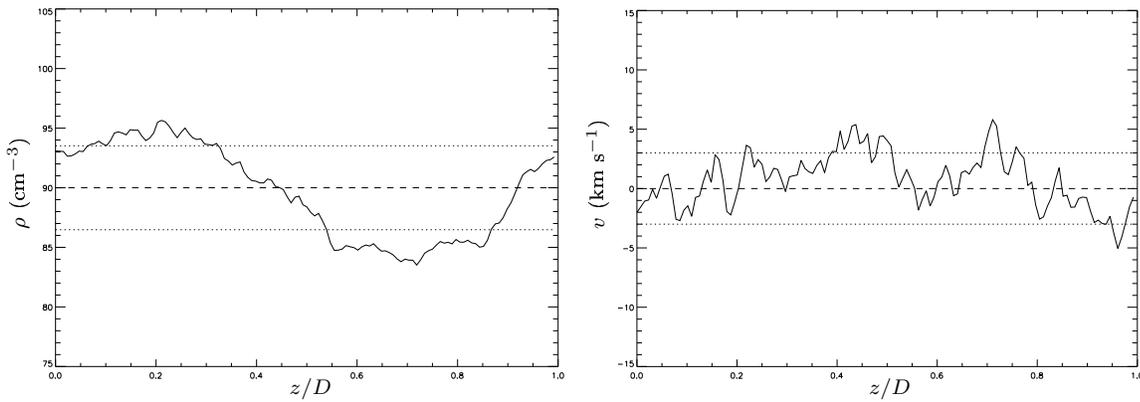


FIG. XII.1 – Évolution de la densité et de la vitesse longitudinale le long de la ligne de visée (64,64) dans le cas du cube de densité $\beta_\rho = 4,5$ et du cube de vitesse $\beta_v = 3,5$. Dans chacun des cas, les tirets représentent la valeur moyenne sur l'ensemble du cube, et les pointillés délimitent les zones $|\rho - \rho_0| \leq \sigma_\rho$ et $|v - v_0| \leq \sigma_v$. On remarque que la valeur moyenne globale est sensiblement égale à la valeur moyenne calculée sur cette seule ligne de visée, ce qui est conforme à l'hypothèse d'homogénéité.

Remarquons qu'on ne modifie pas la dispersion σ_ρ du cube de densité. Ceci peut tout d'abord sembler curieux, étant donné qu'une des hypothèses utilisées aux deux chapitres précédents est justement l'inégalité $\sigma_\rho < \rho_0$. En fait, une propriété importante des champs browniens fractionnaires tridimensionnels est que leurs valeurs suivent une distribution gaussienne. Or, seulement environ 0,1% des points d'une telle distribution tombent à plus de 3σ de la valeur moyenne, de sorte que les champs de densité construits présentent naturellement un contraste faible, avec $\sigma_\rho/\rho_0 \lesssim 0,3$.

Notons qu'aucune corrélation n'est imposée *a priori* entre les champs de densité et de vitesse tridimensionnels. Bien que ce choix accentue encore le manque de réalisme physique de ces simulations, il est en partie justifié par l'objectif poursuivi. En effet, il s'agit de vérifier des relations, obtenues au chapitre précédent, valables à des ordres suffisamment bas pour que les corrélations entre densité et vitesse n'interviennent pas (voir la section XI.2.a). On verra cependant au XII.6.b, que les termes corrélés, qui ne sont pas nécessairement nuls bien qu'on n'impose pas de corrélation entre les champs de densité et de vitesse, ont des effets importants lorsque les fluctuations de densité deviennent grandes.

À titre d'exemple, deux lignes de visée typiques extraites d'un cube de densité et d'un cube de vitesse sont présentées sur la figure XII.1. Les champs utilisés ont des indices spectraux respectivement égaux à $\beta_\rho = 4,5$ et $\beta_v = 3,5$. Le second montre plus de structures à petite échelle, comme attendu pour un indice spectral plus faible, dans le cas où les dimensions euclidiennes sont identiques². La profondeur D du cube est choisie égale à 1 pc.

²En toute généralité, le nombre caractérisant la quantité de structure à chaque échelle est l'exposant de Hurst.

XII.3 Simulation d'un cube de données PPV

XII.3.a Méthode de construction

Afin d'obtenir un cube de données observationnelles à partir des champs tridimensionnels simulés, on calcule, à chaque position \mathbf{X} , le spectre qui serait observé dans cette direction. Étant donnée l'hypothèse selon laquelle le nuage est observé dans une transition optiquement mince, le spectre en question résulte alors simplement de l'addition des contributions radiatives issues de chacune des cellules de gaz situées le long de la ligne de visée \mathbf{X} . Or, l'émission δT_b d'une de ces cellules a déjà été écrite dans le cadre des hypothèses faites au chapitre IX. On y a vu que pour une cellule repérée par la position \mathbf{x} , cette émission pouvait s'écrire

$$\delta T_b(\mathbf{x}, u) = \alpha \rho(\mathbf{x}) \phi[v(\mathbf{x}) - u] \delta z,$$

où u est la vitesse longitudinale considérée, correspondant au canal en vitesse, δz est la profondeur de la cellule, supposée identique pour toutes les cellules, et ϕ est le profil local normalisé de la raie d'émission. Pour simplifier le problème, on va supposer que ce profil est gaussien, et qu'il correspond au seul élargissement thermique, supposé uniforme dans tout le nuage,

$$\phi(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\text{th}}} \exp\left[-\frac{w^2}{2\sigma_{\text{th}}^2}\right] \quad \text{et donc} \quad \delta T_b(\mathbf{x}, u) = \alpha \frac{\rho(\mathbf{x})\delta z}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\text{th}}} \exp\left\{-\frac{[v(\mathbf{x}) - u]^2}{2\sigma_{\text{th}}^2}\right\} = \alpha \delta N_u(\mathbf{x}, u).$$

Le facteur numérique α n'étant pas connu et étant sans importance quant à l'étude qui suit, on va essentiellement s'intéresser à la quantité $\delta N_u(\mathbf{x}, u)$, qui représente la densité de colonne par unité de vitesse de la cellule située en \mathbf{x} , à la vitesse u . Au sortir du nuage, la densité de colonne du gaz par unité de vitesse, le long de la ligne de visée \mathbf{X} et à la vitesse u peut être écrite selon

$$N_u(\mathbf{X}, u) = \sum_z \delta N_u(\mathbf{x}, u) = \sum_z \frac{\rho(\mathbf{x})\delta z}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\text{th}}} \exp\left\{-\frac{[v(\mathbf{x}) - u]^2}{2\sigma_{\text{th}}^2}\right\}. \quad (69)$$

Cette quantité est calculée pour un ensemble discret de vitesses longitudinales (u_1, \dots, u_n) , ce qui fournit le cube de données recherché, puisque les lignes de visée \mathbf{X} sont elles aussi échantillonnées de façon discrète. En faisant l'hypothèse simplificatrice selon laquelle la résolution spectrale de l'observation est égale à la largeur δu d'un canal, et où la fonction de transmission spectrale est une fonction porte de même largeur, le produit $N_u(\mathbf{X}, u_k)\delta u$ représente alors exactement l'intensité intégrée entre les vitesses $u_k - \delta u/2$ et $u_k + \delta u/2$.

Concernant les valeurs numériques utilisées pour construire ces cubes, la dispersion de vitesse thermique σ_{th} dépend de la température cinétique T du gaz et de la masse m de l'espèce émettrice³,

$$\sigma_{\text{th}} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}, \quad \text{formule qu'on avait déjà écrite au chapitre VIII.}$$

La profondeur δz de chaque cellule est quant à elle égale à la 128^{ème} partie de la profondeur totale D du nuage, laquelle est fixée à 1 pc, soit $\delta z = 2,411 \cdot 10^{16}$ cm.

De plus, afin d'assurer que seule une fraction négligeable du signal est perdue, les limites en vitesse dans le cube PPV final sont données par $v_{\text{min}} - 2\sigma_{\text{th}}$ et $v_{\text{max}} + 2\sigma_{\text{th}}$, où v_{min} et v_{max} désignent les valeurs minimum et maximum dans le champ de vitesse tridimensionnel. Le nombre n de canaux est alors obtenu en divisant cette plage en vitesse par la largeur d'un canal δu , qu'on a prise égale à $0,25 \text{ km s}^{-1}$. En conséquence, tous nos cubes de données n'ont pas le même nombre de canaux, puisque l'extension dans la troisième dimension dépend non seulement de la température T mais aussi et surtout du cube de vitesse tridimensionnel.

XII.3.b Spectres synthétiques

La figure XII.2 montre quatre exemples de spectres synthétiques obtenus le long de la ligne de visée représentée sur la figure XII.1. Ces spectres ont été calculés en utilisant l'équation (69) pour quatre températures

³Ici, on suppose qu'il s'agit de l'hydrogène atomique, dont la masse est $m = 1,6735344 \cdot 10^{-27}$ kg.

comprises entre $T = 1$ K et $T = 500$ K. On y voit notamment l'effet de lissage lié à la température. Les fluctuations à petite échelle sont effacées au fur et à mesure que T augmente, et le spectre observé s'approche d'une gaussienne lorsque l'élargissement thermique devient comparable à la dispersion σ_v du cube de vitesse tridimensionnel.

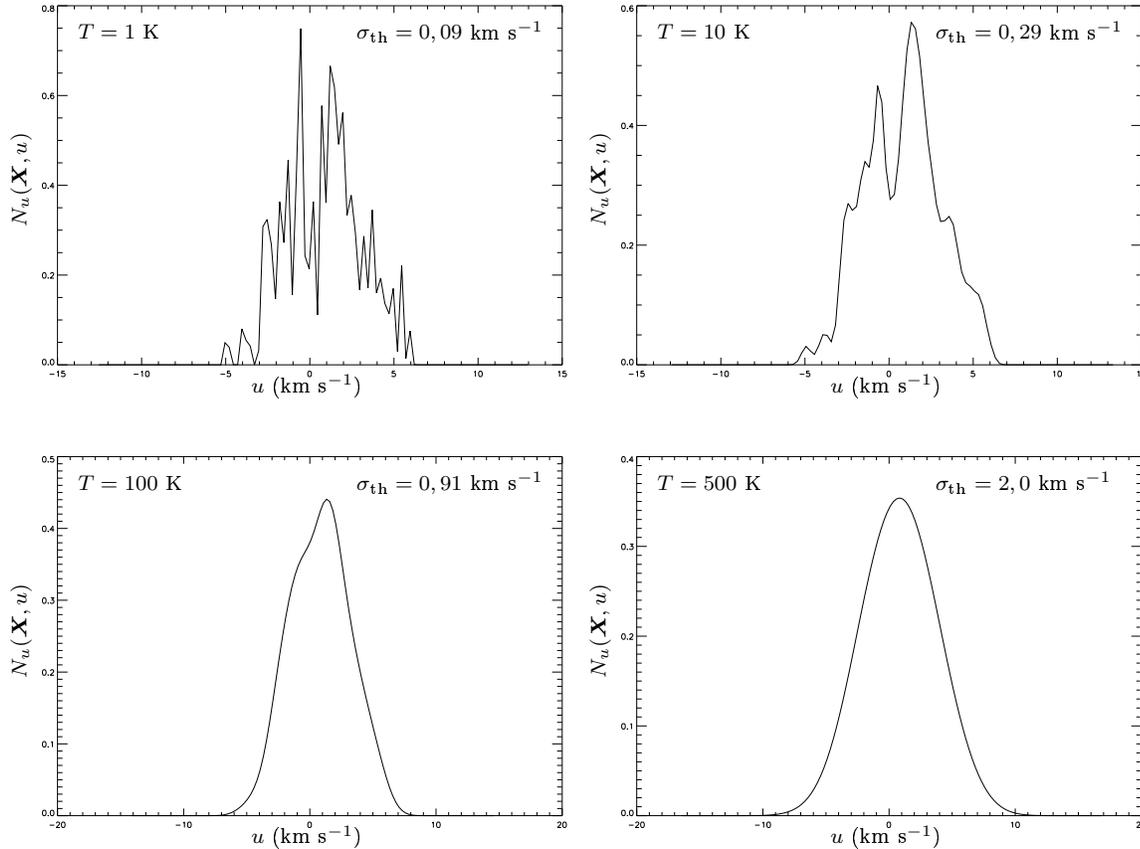


FIG. XII.2 – Spectres synthétiques correspondant à la ligne de visée représentée sur la figure XII.1, pour quatre températures cinétiques du gaz différentes. Les dispersions thermiques σ_{th} sont notées sur les différentes figures en regard de la température.

Le spectre calculé à $T = 100$ K, température représentative des conditions du gaz HI, rappelle assez bien ce qui est observé à 21 cm dans les nuages à haute latitude [Miville-Deschênes *et al.*, 2003a]. Étant données les conditions régnant dans le milieu atomique⁴, les températures $T = 1$ K et $T = 10$ K représentent des conditions artificiellement froides, mais leur exemple montre que les composantes qu'on peut voir apparaître dans les spectres réels observés peuvent correspondre non pas à de véritables nuages au sens d'entités connexes dans l'espace, mais plutôt aux propriétés fractales de la vitesse et de la densité le long de la ligne de visée. Physiquement, d'ailleurs, l'hypothèse d'une transition optiquement mince devient intenable à des températures cinétiques si basses. Ces spectres sont donc présentés uniquement pour illustrer les effets de la température cinétique sur notre capacité à résoudre des structures cinématiques. On voit en particulier qu'à haute température, toutes les structures en vitesse sont lavées par l'élargissement thermique, ce qui empêche formellement de les résoudre. Quantitativement, on peut estimer la résolution spectrale effective δu_e de ces observations simulées comme étant la largeur à mi-hauteur du produit de convolution du profil ϕ avec le profil d'un canal en vitesse. En supposant, juste pour ce calcul, que les bandes passantes des canaux sont de forme gaussienne, avec une largeur à mi-hauteur δu , la résolution effective est alors donnée

⁴Voir le chapitre I.

par [Myers *et al.*, 1991]

$$\delta u_e \approx \sqrt{\delta u^2 + (8 \ln 2) \sigma_{\text{th}}^2}. \quad (70)$$

À titre d'exemple, les résolutions effectives pour les valeurs extrêmes $T = 1$ K et $T = 500$ K de la température considérées sur la figure **XII.2** sont respectivement $\delta u_e \simeq 0,33 \text{ km s}^{-1}$ et $\delta u_e \simeq 4,72 \text{ km s}^{-1}$.

XII.3.c Cartes par canaux et cartes des moments

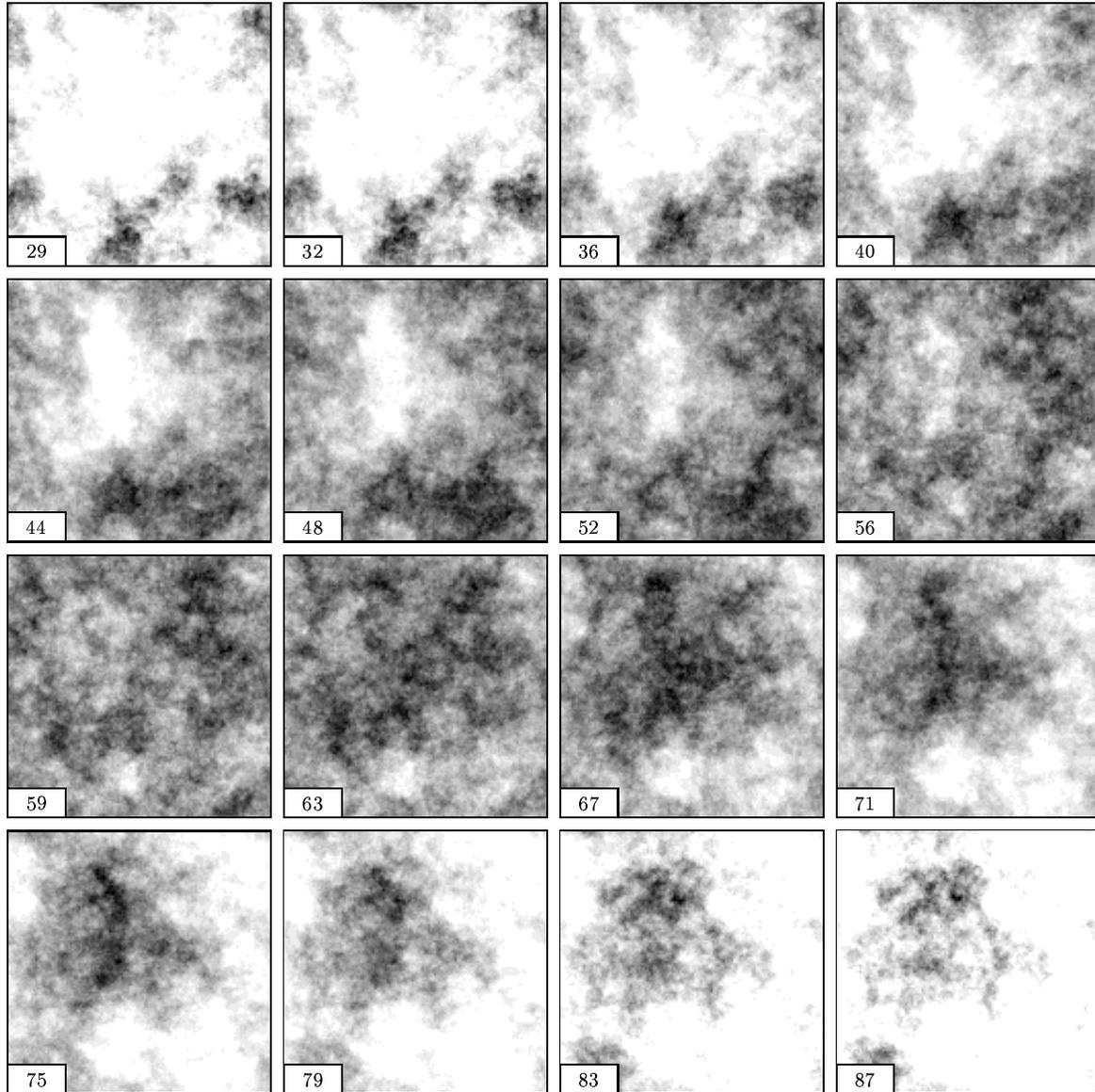


FIG. **XII.3** – Cartes par canaux typiques obtenues par simulation d'observations de spectro-imagerie telles que décrites dans le texte. Le cas présenté correspond aux cubes de densité et de vitesse dont les indices spectraux sont respectivement $\beta_\rho = 4,5$ et $\beta_v = 3,5$. La température cinétique du gaz est prise égale à 100 K. Le nombre inscrit dans le coin inférieur gauche de chaque image donne le numéro du canal, sachant qu'il y a 196 canaux au total dans le cube de données.

Les coupes des cubes de données le long d'un plan de vitesse constante forment les cartes par canaux. La figure **XII.3** montre certaines de ces cartes, issues du cube PPV simulé, à $T = 100$ K, à partir

des champs de densité et de vitesse caractérisés par les indices spectraux $\beta_\rho = 4,5$ et $\beta_v = 3,5$. On peut y voir certaines ressemblances avec les cartes réellement observées dans la raie à 21 cm (voir par exemple [Joncas *et al.*, 1992]), notamment des structures allongées⁵ et d'autres plus diffuses. On remarque également que les structures présentes dans des canaux adjacents sont corrélées, et qu'on passe d'un canal à l'autre de façon quasi continue. Si cet effet est dû en partie au fait que la largeur des canaux est sous-thermique, puisque $\delta u = 0,25 \text{ km s}^{-1}$ et que $\sigma_{\text{th}} \simeq 0,91 \text{ km s}^{-1}$, on voit qu'il existe néanmoins des corrélations entre des canaux trop éloignés l'un de l'autre pour que l'on puisse dire qu'il s'agit de l'effet du lissage thermique. En effet, on a une résolution effective $\delta u_e \simeq 2,16 \text{ km s}^{-1}$, de sorte qu'on peut considérer que l'élargissement thermique se fait sentir sur une plage d'environ neuf canaux. Les corrélations évidentes entre les structures des canaux 29 et 40, ou entre celles des canaux 75 et 87, par exemple, sont donc issues des champs de densité et de vitesse.

À partir des cubes de données, on peut également construire les cartes de moments telles qu'on les a définies au chapitre IX. Étant donnée la relation (40), la carte d'intensité intégrée simulée est

$$I(\mathbf{X}) = \int T_b(\mathbf{X}, u) du = \alpha \int N_u(\mathbf{X}, u) du = \alpha \sum_k N_u(\mathbf{X}, u_k) \delta u.$$

De même, les cartes des centroïdes non normalisés et normalisés sont données respectivement par

$$C(\mathbf{X}) = \alpha \sum_k u_k N_u(\mathbf{X}, u_k) \delta u \quad \text{et} \quad C_0(\mathbf{X}) = \frac{\sum_k u_k N_u(\mathbf{X}, u_k)}{\sum_k N_u(\mathbf{X}, u_k)}.$$

Dans la suite, on fera abstraction du facteur constant α en ce qui concerne les cartes de l'intensité et du centroïde non normalisé, en posant $\alpha = 1$ numériquement.

XII.4 Propriétés statistiques des cartes d'observables

À partir de là, on peut commencer à examiner les spectres de puissance des cartes d'observables, qu'il s'agisse des canaux individuels, ce qu'on développera pour l'essentiel au chapitre XIII, ou des cartes des moments, auxquelles on va plus particulièrement s'intéresser ici. L'objectif, bien entendu, est de relier les propriétés statistiques de ces observables à celles des champ tridimensionnels, c'est-à-dire aux indices spectraux β_ρ et β_v . Pour procéder à cette analyse, on construit des cubes de données correspondant à toutes les combinaisons possibles de champs de densité et de vitesse, en se plaçant à une température typique du CNM, soit $T = 100 \text{ K}$.

L'analyse des résultats est facilitée par l'étude des figures XII.4 et XII.5, qui montrent, pour certains de ces cubes simulés, les cartes de l'intensité intégrée, des centroïdes non normalisé et normalisé, ainsi que deux canaux en vitesse - l'un au centre de la raie et l'autre dans une aile. Plus précisément, la figure XII.4 présente le cas des cinq cubes de données issus du champ de densité $\beta_\rho = 4$ et de tous les champs de vitesse, tandis que la figure XII.5 correspond au cas des cinq cubes de données construits à partir du champ de vitesse d'indice spectral $\beta_v = 4$ et de tous les champs de densité, à l'exception du cube de densité uniforme. Les sections suivantes sont consacrées à l'étude détaillée de ces figures et de ce qu'elles impliquent en termes de propriétés statistiques.

XII.5 Intensité intégrée

XII.5.a Spectre de puissance de l'intensité intégrée dans la limite $R \ll D$

Comme on l'a remarqué au début du chapitre XI, et comme plusieurs auteurs l'ont montré (voir par exemple [Stutzki *et al.*, 1998, Goldman, 2000]), un milieu observé dans une raie optiquement mince présente une carte d'intensité intégrée dont le spectre de puissance est égal à celui du champ de densité à trois dimensions, à condition que $R/D \ll 1$, où R représente la plus grande échelle transverse considérée et D est la profondeur du nuage. L'identité des comportements des spectres de puissance \mathcal{P}_I et \mathcal{P}_ρ est en fait valable que le spectre de puissance soit une loi de puissance ou pas, dès lors que l'isotropie est

⁵Celles-ci sont néanmoins peu claires, ce qui n'est pas surprenant étant donnée l'isotropie des champs ρ et v .

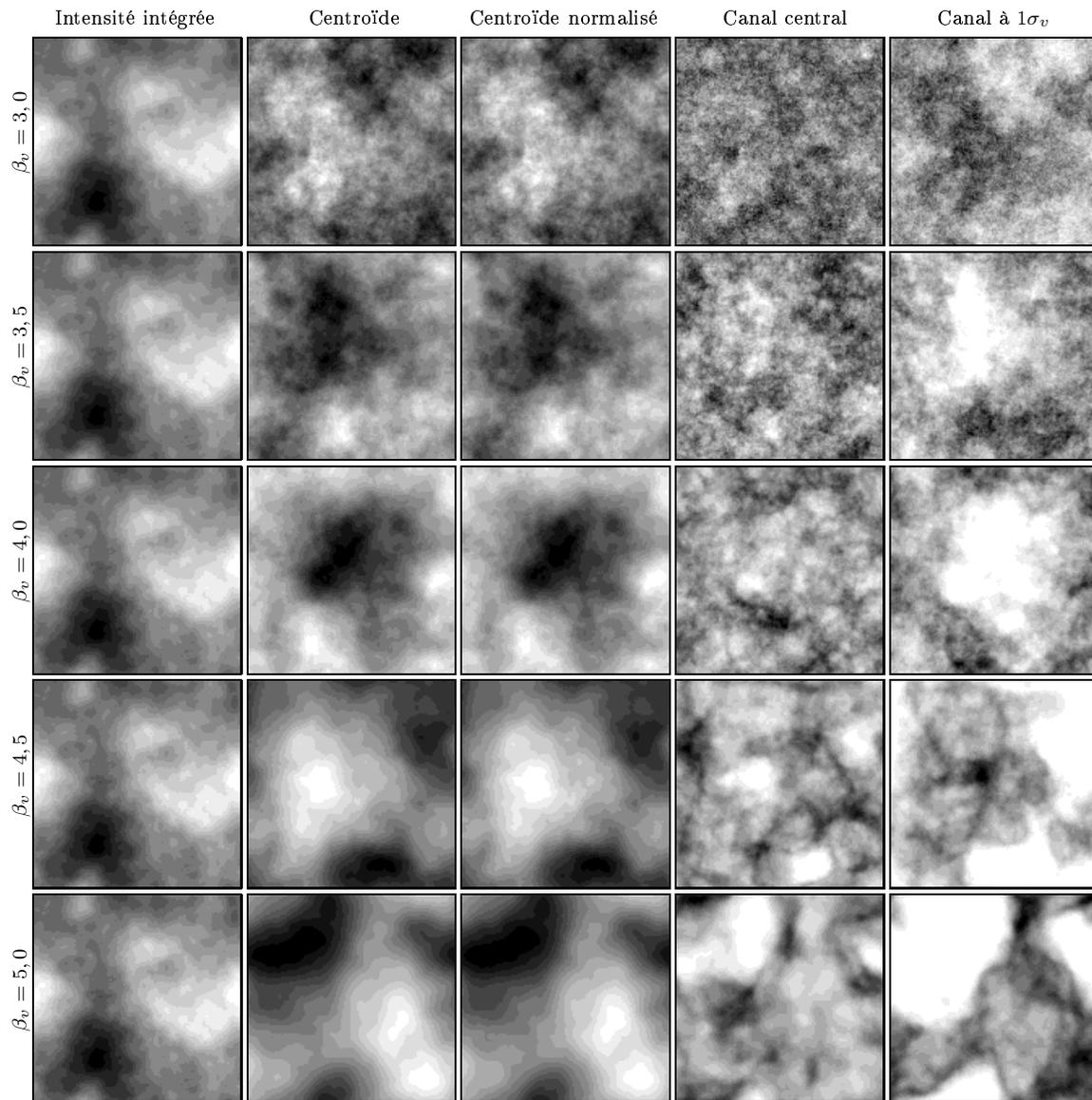


FIG. XII.4 – Vue synthétique des cartes d'observables pour les cubes de données construits à partir du champ de densité $\beta_p = 4$ et des cinq champs de vitesse. Chaque ligne correspond à l'une des valeurs de β_v , et les différentes colonnes représentent respectivement l'intensité intégrée, le centroïde non normalisé, le centroïde normalisé, un canal au centre de la raie et un canal à $1\sigma_v$ du centre de la raie.

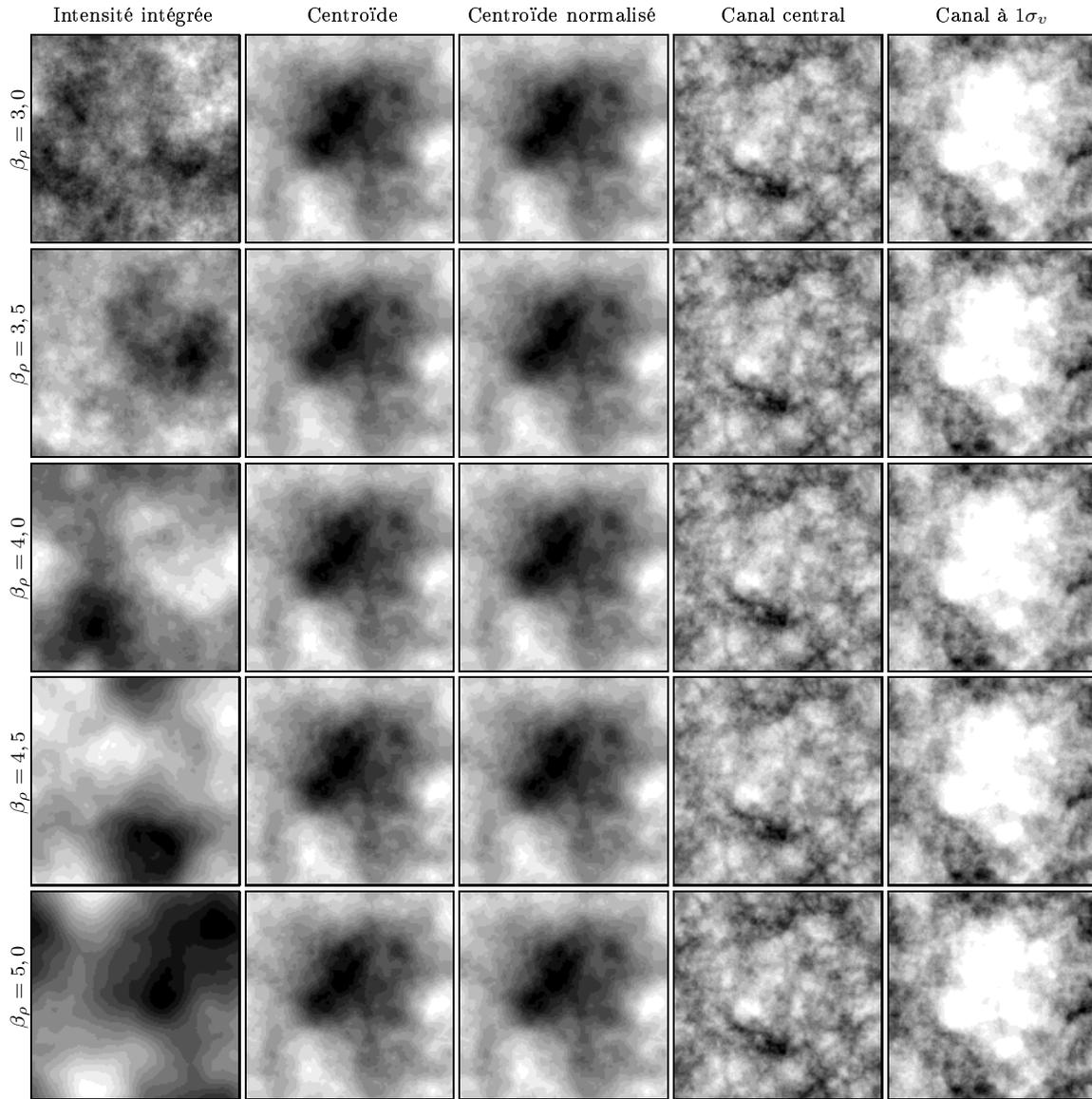


FIG. XII.5 – Vue synthétique des cartes d'observables pour les cubes de données construits à partir du champ de vitesse $\beta_v = 4$ et des cinq champs de densité non uniformes. Chaque ligne correspond à l'une des valeurs de β_ρ , et les différentes colonnes représentent respectivement l'intensité intégrée, le centroïde non normalisé, le centroïde normalisé, un canal au centre de la raie et un canal à $1\sigma_v$ du centre de la raie.

assurée. Cette propriété des milieux optiquement minces est puissante car elle permet ainsi de déduire directement le spectre de puissance du champ de densité interstellaire en trois dimensions à partir des observations [Elmegreen *et al.*, 2001].

Les calculs du chapitre **XI** ont fourni le pendant de cette prédiction dans l'espace réel, en montrant que l'exposant de Hurst de la carte d'intensité intégrée était lié à celui du champ de densité par

$$H_I = H_\rho + \frac{1}{2} \quad \text{pour } H_\rho < 1/2 \quad \text{et} \quad H_I = 1 \quad \text{pour } H_\rho > 1/2.$$

La première relation se traduit effectivement, comme on l'a vu, par l'égalité des indices spectraux $\beta_I = \beta_\rho$, et c'est cette égalité que nos simulations confirment. On voit sur la première colonne de la figure **XII.4** que les différentes cartes d'intensité intégrée sont sensiblement identiques, quel que soit le champ de vitesse utilisé pour construire le cube de données, ce qui montre déjà que l'intensité intégrée ne dépend ici que du champ de densité. Les spectres de puissance correspondant à ces cinq cartes sont également identiques les uns aux autres. Afin de montrer qu'ils ont bien la forme de lois de puissance et que leurs indices spectraux sont égaux à celui du champ de densité associé, on construit la figure **XII.6**, qui montre les spectres de puissance des cartes d'intensité intégrée formant la première colonne de la figure **XII.5**. On voit qu'il s'agit effectivement de lois de puissance, et qu'on a bien l'égalité des indices spectraux $\beta_I = \beta_\rho$.

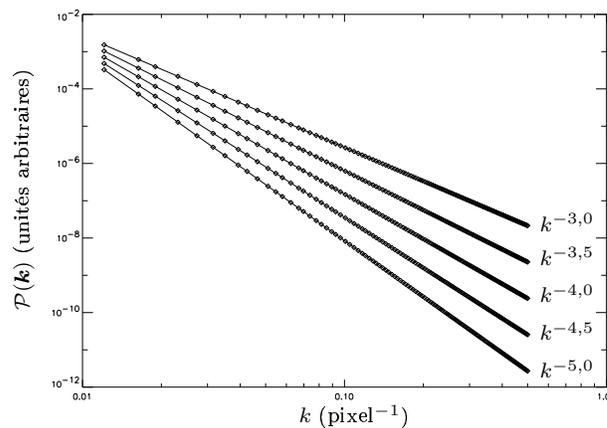


FIG. **XII.6** – Spectres de puissance des cartes d'intensité intégrée constituant la première colonne de la figure **XII.5**. Les mesures sont représentées par les losanges. Les droites correspondent à des lois de puissance dont les formes sont indiquées en regard.

L'intensité intégrée I est égale, dans le cas considéré, et avec la convention $\alpha = 1$, à la densité de colonne N , qu'il est bien évidemment possible de simuler ici directement à partir du cube de densité,

$$N(\mathbf{X}) = \sum_k \rho(\mathbf{X}, z_k) \delta z.$$

L'identité de la densité de colonne et de l'intensité intégrée dans nos simulations est illustrée sur la figure **XII.7**, qui compare la densité de colonne du cube de densité $\beta_\rho = 4$ avec l'intensité intégrée du cube de données construit à partir des paramètres $\beta_\rho = 4$ et $\beta_v = 3$. On voit que les deux images sont identiques, au niveau de détail observable ici. Remarquons que la plus grande échelle transverse considérée est $R = D$. Le fait qu'on trouve exactement le résultat attendu dans la limite $R \ll D$ se justifie en observant que les échelles intervenant majoritairement dans les cartes étudiées ici sont bien plus petites que D .

XII.5.b Spectre de puissance de l'intensité intégrée dans la limite $R \gg D$

À l'inverse, le fait qu'on dispose des cubes de densité tridimensionnels permet de tester la limite d'un nuage très peu profond, soit $R \gg D$, en étudiant une coupe bidimensionnelle de l'un de ces cubes. Théoriquement, celle-ci doit représenter statistiquement le cube entier, et son exposant de Hurst H_c doit donc être égal à

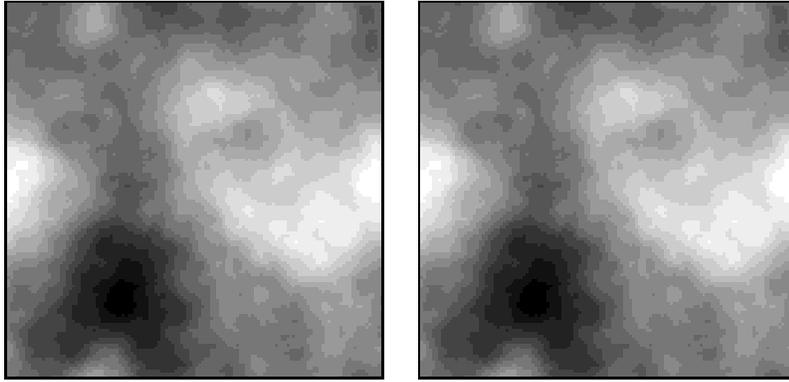


FIG. XII.7 – Densité de colonne du cube de densité $\beta_\rho = 4$ (à gauche) et intensité intégrée I du cube de données correspondant à $\beta_\rho = 4$ et $\beta_v = 3$ (à droite).

H_ρ . Étant donné le lien entre exposant de Hurst, indice spectral et dimension de l'espace, l'indice β_c de cette coupe bidimensionnelle est donné par

$$\beta_c = 2H_c + 2 = 2H_\rho + 2 = \beta_\rho - 1.$$

Un exemple de cet effet est montré sur la figure XII.8 pour une tranche de 1 pixel de large extraite du cube tridimensionnel de densité caractérisé par $\beta_\rho = 4$. On y voit le spectre de puissance de cette tranche, moyenné azimutalement⁶, ainsi qu'un ajustement en loi de puissance. L'indice spectral obtenu, $\beta_c \simeq 3,14$ est légèrement plus grand que celui attendu, puisque $\beta_\rho - 1 = 3$. Ceci peut se comprendre en remarquant que la coupe dans le cube n'est pas parfaitement bidimensionnelle, mais qu'elle possède nécessairement une certaine largeur intrinsèque. D'ailleurs, si l'on avait représenté l'ensemble du spectre de puissance comme un nuage de points, c'est-à-dire sans faire de moyenne azimutale, on aurait observé une dispersion plus prononcée aux petites échelles, comparables à cette largeur intrinsèque.

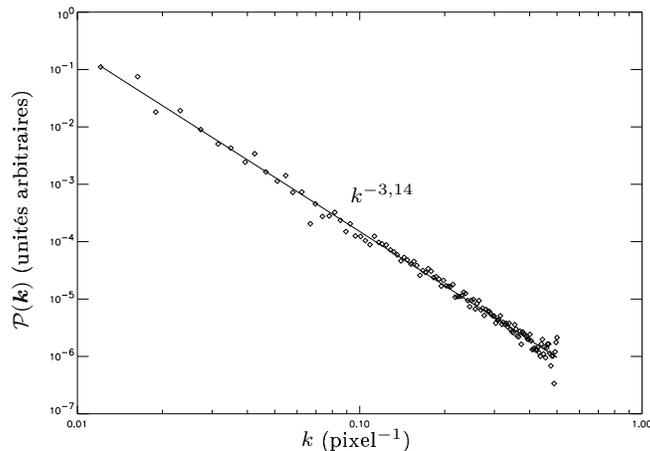
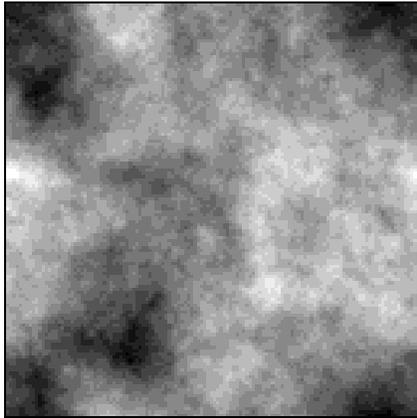


FIG. XII.8 – La figure de gauche présente une coupe bidimensionnelle extraite du cube de densité $\beta_\rho = 4$. La figure de droite montre le spectre de puissance de celle-ci, moyenné azimutalement (losanges), ainsi qu'un ajustement en loi de puissance.

XII.5.c Transition entre les deux régimes

Il est également intéressant d'étudier le spectre de puissance d'une tranche dans le régime intermédiaire entre les deux cas présentés plus haut. À cette fin, on calcule les spectres de puissance de tranches du cube

⁶On rappelle qu'il s'agit de faire la moyenne sur les anneaux de nombre d'onde k constant.

de densité, de largeur d croissante. Les résultats sont présentés sur la figure **XII.9** qui montre les spectres de puissance de deux tranches du cube de densité d'indice $\beta_\rho = 5$, où l'on a sommé respectivement 5 et 10 plans du cube. On observe que les spectres de puissance sont courbés, avec un indice spectral β_ρ aux petites échelles et $\beta_\rho - 1$ aux grandes échelles. La transition a lieu à une fréquence spatiale $k_d = 1/2d$ et fournit une méthode permettant de déterminer la profondeur du milieu observé. C'est ainsi qu'Elmegreen [Elmegreen *et al.*, 2001] a pu déterminer l'épaisseur de la couche de gaz H I dans le grand nuage de Magellan (LMC). Réciproquement, l'absence d'une telle courbure dans le spectre de puissance de l'émission du H I galactique à grande échelle suggère que l'épaisseur du milieu observé est bien plus grande que la taille des cartes disponibles, de l'ordre de 25 pc dans le cas des nuages à haute latitude observés par Miville-Deschênes [Miville-Deschênes *et al.*, 2003a].

Ce résultat est également pertinent quant aux études des milieux optiquement épais (tels que les nuages moléculaires) où l'émission observée provient de la région la plus en surface du nuage. Dans ce cas, l'indice spectral mesuré sur la carte d'émission intégrée d'un traceur optiquement épais devrait être plus proche de $\beta_\rho - 1$.

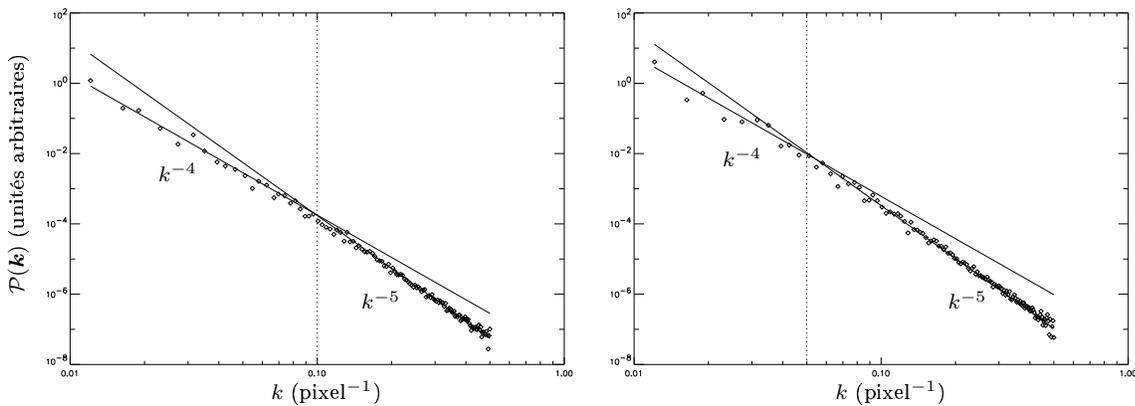


FIG. **XII.9** – Spectres de puissance de cartes bidimensionnelles construites en sommant respectivement cinq plans (figure de gauche) et dix plans (figure de droite) consécutifs extraits du cube de densité $\beta_\rho = 5$. Les mesures sont indiquées par des losanges, et les droites représentent les régimes limites $R \ll d$ et $R \gg d$. Les pointillés correspondent au nombre d'onde de la transition $k_d = 1/2d$.

XII.6 Centroïdes de vitesse

XII.6.a Vérification des égalités $\beta_C = \beta_{C_0} = \beta_v$

La limite des petites fluctuations de densité $\sigma_\rho < \rho_0$ étant satisfaite dans tous les cubes de densité, il est légitime de vouloir vérifier que les centroïdes de vitesse, qu'ils soient normalisés ou non, présentent des spectres de puissance en loi de puissance, avec des indices spectraux β_C et β_{C_0} tous deux égaux à l'indice spectral β_v du champ de vitesse sous-jacent.

Les cartes de centroïdes présentées sur la figure **XII.5** montrent déjà clairement que le champ de densité n'a pas d'influence sur la structure de ces cartes, puisqu'elles sont toutes identiques. On remarque d'ailleurs que la normalisation ne modifie pas cette structure. Dans le cadre de ces simulations, les propriétés statistiques des centroïdes de vitesse sont donc essentiellement déterminés par le champ de vitesse. Plus précisément, si l'on construit les spectres de puissance des cartes de centroïdes non normalisés représentées sur la figure **XII.4**, c'est-à-dire pour $\beta_\rho = 4$ et toutes les valeurs de β_v , on obtient la figure **XII.10**, qui montre que les indices spectraux β_C et β_{C_0} sont bien égaux aux indices β_v des champs de vitesse.

Ce résultat, obtenu avec un champ de densité caractérisé par un indice spectral $\beta_\rho = 4$, est vérifié quel que soit le champ de densité utilisé. L'ajustement de lois de puissance sur les spectres de puissance des cartes de centroïdes fournit toujours l'indice spectral du champ de vitesse. Cependant, il faut remarquer que ces mesures sont faites sur les moyennes azimutales des spectres de puissance. En effet, et comme le montre la figure **XII.11**, les spectres de puissance représentés sous la forme de nuages de points peuvent être affectés d'une forte dispersion. On note que cette dispersion autour de la loi de puissance décroît quand le spectre

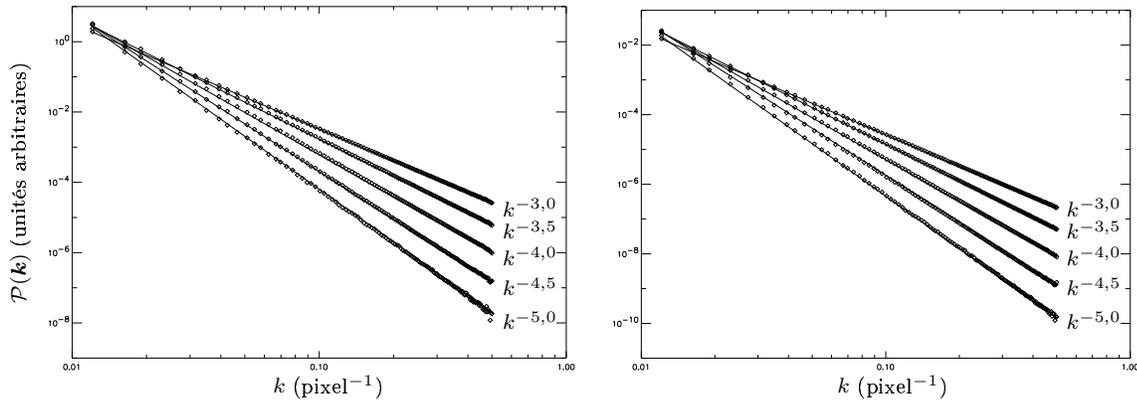


FIG. XII.10 – Spectres de puissance, moyennés azimutalement, des cartes de centroïdes non normalisés (à gauche) et normalisés (à droite) constituant respectivement les deuxième et troisième colonnes de la figure XII.4. Les mesures sont représentées par les losanges. Les droites correspondent à des lois de puissance dont les formes sont indiquées en regard de chacune des courbes.

de puissance du champ de densité devient plus raide⁷, et dans la limite d'un champ de densité uniforme, on retrouve la dispersion nulle caractéristique de l'isotropie. Réciproquement, pour un indice β_ρ donné, les spectres de puissance des cartes de centroïdes sont plus dispersés pour des valeurs de β_v plus grandes. Ceci peut s'expliquer par le fait que les fluctuations de densité se manifestent plus clairement lorsque le champ de vitesse est plus lisse.

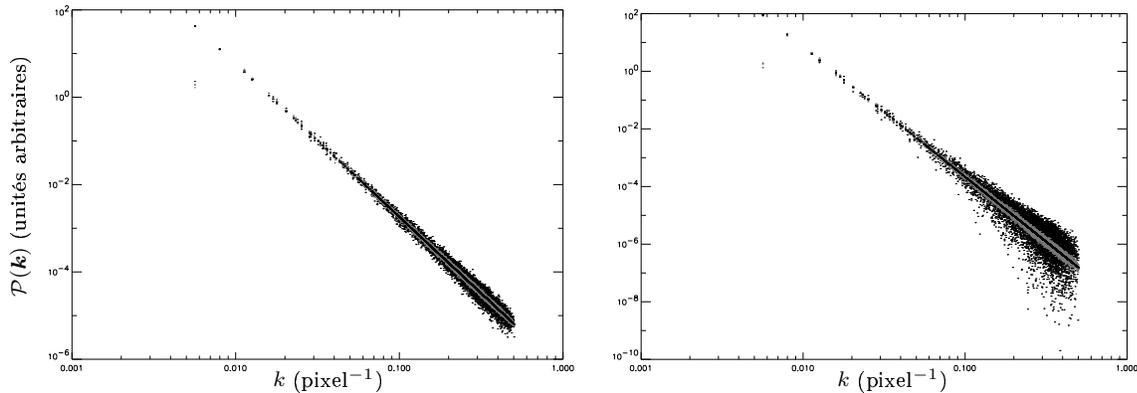


FIG. XII.11 – Spectres de puissance, non moyennés azimutalement, des cartes de centroïdes non normalisés correspondant aux champs de vitesse $\beta_v = 3,5$ (à gauche) et $\beta_v = 4,5$ (à droite). Sur chaque figure, on a représenté les données issues de trois cubes de densité, soit $\beta_\rho = 3$ (en noir, forte dispersion), $\beta_\rho = 4$ (en gris) et le cube de densité uniforme (en noir, sans dispersion).

XII.6.b Influence des différents paramètres

Influence de la température cinétique

Les conditions de validité de ce résultat doivent être déterminées, les simulations faites jusqu'à présent ne représentant qu'une petite partie des conditions possibles pour les paramètres du problème. On désire avant tout vérifier que le résultat reste valable quelle que soit la température cinétique, comme le suggère l'écriture du centroïde sous la forme d'une intégrale du produit ρv . Pour cela, on choisit arbitrairement un champ de densité d'indice β_ρ et un champ de vitesse d'indice β_v , et on construit, de la manière décrite plus

⁷C'est-à-dire quand le champ de densité lui-même devient plus lisse.

haut, les cubes de données correspondant à une série de températures différentes. Les indices spectraux des centroïdes de vitesse non normalisés calculés à partir de ces cubes sont reportés sur la figure **XII.12**. On voit clairement que β_C est indépendant de la température cinétique. Aux incertitudes près, on retrouve $\beta_C = \beta_v$, en remarquant que l'erreur systématique s'interprète comme une preuve de l'indépendance des cartes du centroïde vis-à-vis de T .

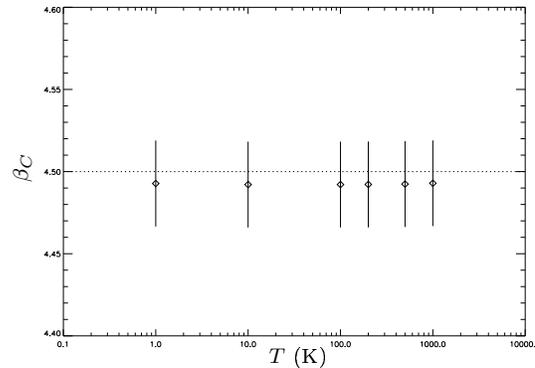


FIG. XII.12 – Indices spectraux mesurés sur les cartes de centroïdes non normalisés construits à partir des cubes de densité $\beta_\rho = 3,5$ et de vitesse $\beta_v = 4,5$, en fonction de la température cinétique utilisée, entre $T = 1$ K et $T = 1000$ K. Les barres d'erreur recouvrent la valeur attendue $\beta_C = 4,5$.

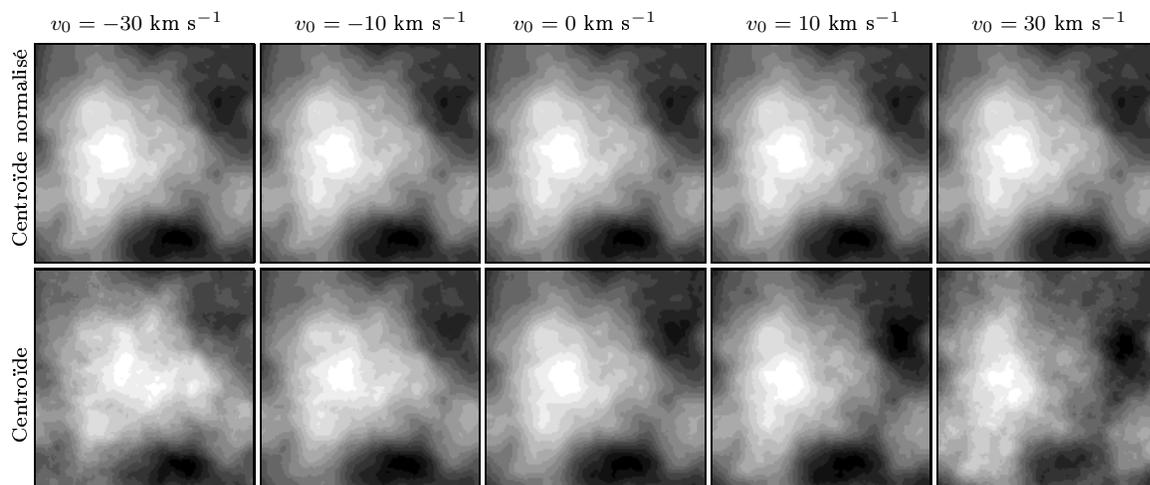


FIG. XII.13 – Cartes des centroïdes de vitesse normalisés (ligne du haut) et non normalisés (ligne du bas) correspondant aux cubes de données construits à partir du cube de densité $\beta_\rho = 3,5$ et des cubes de vitesse $\beta_v = 4,5$ modifiés de façon à obtenir une vitesse moyenne v_0 indiquée au dessus de chaque colonne.

Influence de la vitesse moyenne v_0

En ce qui concerne l'influence des paramètres numériques caractérisant les champs de densité et de vitesse, à savoir ρ_0 , σ_ρ , v_0 et σ_v , le premier test effectué est l'introduction d'une vitesse moyenne non nulle. On se donne donc une série de cubes de vitesse en ajoutant différentes constantes v_0 au cube déjà construit et caractérisé par $\beta_v = 4,5$. La figure **XII.13** montre, en fonction de v_0 , l'évolution des cartes des deux types de centroïdes construits à partir de ces cubes de vitesse modifiés et du cube de densité $\beta_\rho = 3,5$.

On remarque notamment que la structure des centroïdes non normalisés change légèrement avec la vitesse moyenne, alors que les centroïdes normalisés semblent indépendants de v_0 . Pour préciser ce comportement en termes statistiques, on présente sur la figure **XII.14** les spectres de puissance, moyennés azimutalement, de six des dix cartes de la figure **XII.13**, à savoir celles des deux types de centroïdes de vitesse dans les cas

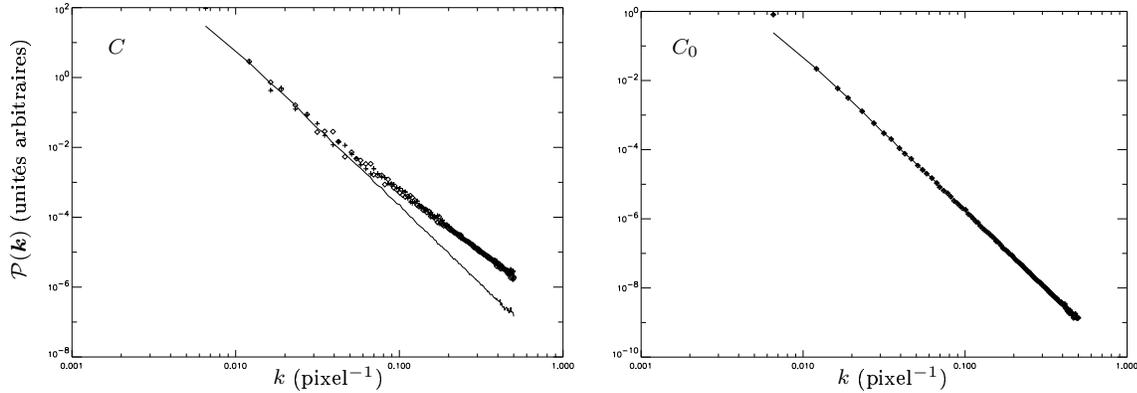


FIG. XII.14 – Spectres de puissance, moyennés azimutalement, des cartes de centroïdes non normalisés (à gauche) et normalisés (à droite) correspondant aux cubes de données construits à partir du cube de densité $\beta_\rho = 3,5$ et des cubes de vitesse $\beta_v = 4,5$ modifiés de façon à obtenir $v_0 = -30 \text{ km s}^{-1}$ (losanges) et $v_0 = +30 \text{ km s}^{-1}$ (croix). La courbe en trait plein correspond au cas $v_0 = 0 \text{ km s}^{-1}$.

d'une valeur nulle et d'une valeur extrême de la vitesse moyenne. Clairement, l'égalité $\beta_C = \beta_v$ est mise en défaut lorsque la vitesse moyenne prend des valeurs non nulles, tandis qu'on a toujours $\beta_{C_0} = \beta_v$.

Étant donnée la forme (58) de la fonction d'autocorrélation A_C , la dépendance en v_0 de la structure des cartes des centroïdes non normalisés est évidemment liée au terme $v_0^2 M_{\rho,\rho}$. On le vérifie tout d'abord en montrant, sur la figure XII.14, que le signe de v_0 est sans importance. D'autre part, si l'on devait construire la quantité $A_C - v_0^2 A_I$, soit $\mathcal{P}_C - v_0^2 \mathcal{P}_I$ dans l'espace de Fourier, on s'attendrait à retrouver le spectre de puissance de la carte du centroïde non normalisé dans le cas $v_0 = 0$. La figure XII.15 semble montrer la validité de cette analyse, bien que le spectre obtenu soit entaché d'une dispersion assez importante⁸. En ce qui concerne les centroïdes normalisés, le calcul de la fonction d'autocorrélation A_{C_0} a été poussé au second ordre en fluctuations de densité, ce qui permet de voir que le terme $v_0^2 M_{\rho,\rho}$ est supprimé. On comprend alors que la vitesse moyenne n'affecte pas, semble-t-il, les spectres de puissance correspondants. On va voir cela plus en détail dans ce qui suit.

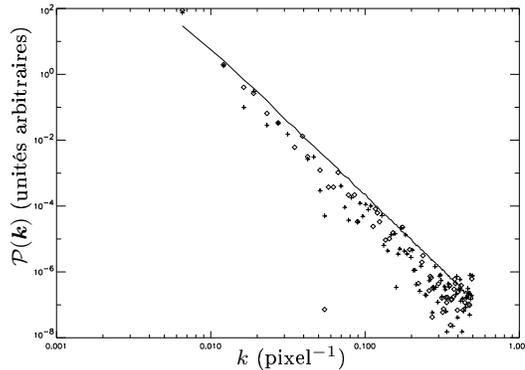


FIG. XII.15 – Spectre de puissance, moyenné azimutalement, de la carte des centroïdes non normalisés dans le cas $v_0 = \pm 30 \text{ km s}^{-1}$ (notations de la figure XII.14), corrigé d'un terme $v_0^2 \mathcal{P}_I$, où \mathcal{P}_I est le spectre de puissance de l'intensité intégrée calculée sur le même cube de données. La courbe en trait plein représente toujours le cas du centroïde non normalisé dans le cas $v_0 = 0 \text{ km s}^{-1}$.

Influence des petites fluctuations de densité

Revenant au cas des centroïdes non normalisés, la modification du spectre de puissance \mathcal{P}_C du fait de la présence d'une vitesse moyenne non nulle, dont l'origine est donc le terme $v_0^2 M_{\rho,\rho}$ dans l'expression de A_C , doit par conséquent dépendre des propriétés statistiques du champ de densité. Nos simulations permettent

⁸Cette dispersion est issue de celle affectant le spectre de puissance de la carte des centroïdes, non moyenné azimutalement.

d'étudier cette dépendance, en construisant des cartes de centroïdes de vitesse à partir d'un cube de vitesse de moyenne non nulle et de divers cubes de densité. C'est ce que montre la figure **XII.16**, sur laquelle on peut voir que l'indice spectral de la carte des centroïdes non normalisés est en fait donné par le plus petit des deux indices β_ρ et β_v , tandis que les cartes des centroïdes normalisés donnent encore $\beta_{C_0} = \beta_v$. Autrement dit, les contributions de la densité au spectre de puissance des cartes de centroïdes non normalisés dominent les contributions cinématiques pures dès lors que $\beta_\rho < \beta_v$, ce qui s'interprète à l'aide la figure **XII.17**. Sur la figure de gauche, on voit que la puissance correspondant aux fluctuations de densité est effectivement plus importante que celle correspondant aux structures en vitesse à la même échelle, si l'on a $\beta_\rho < \beta_v$. En revanche, on pressent que si l'on diminue globalement l'amplitude des fluctuations de densité quel que soit leur spectre, comme sur la figure de droite, alors on devrait retrouver l'égalité $\beta_C = \beta_v$. Pour le vérifier, on montre, sur la figure **XII.18**, l'évolution de l'indice spectral β_C en fonction du rapport σ_ρ/ρ_0 , pour un cube de densité $\beta_\rho = 3,5$ et un cube de vitesse $\beta_v = 4,5$ avec une vitesse moyenne $v_0 = 30 \text{ km s}^{-1}$.

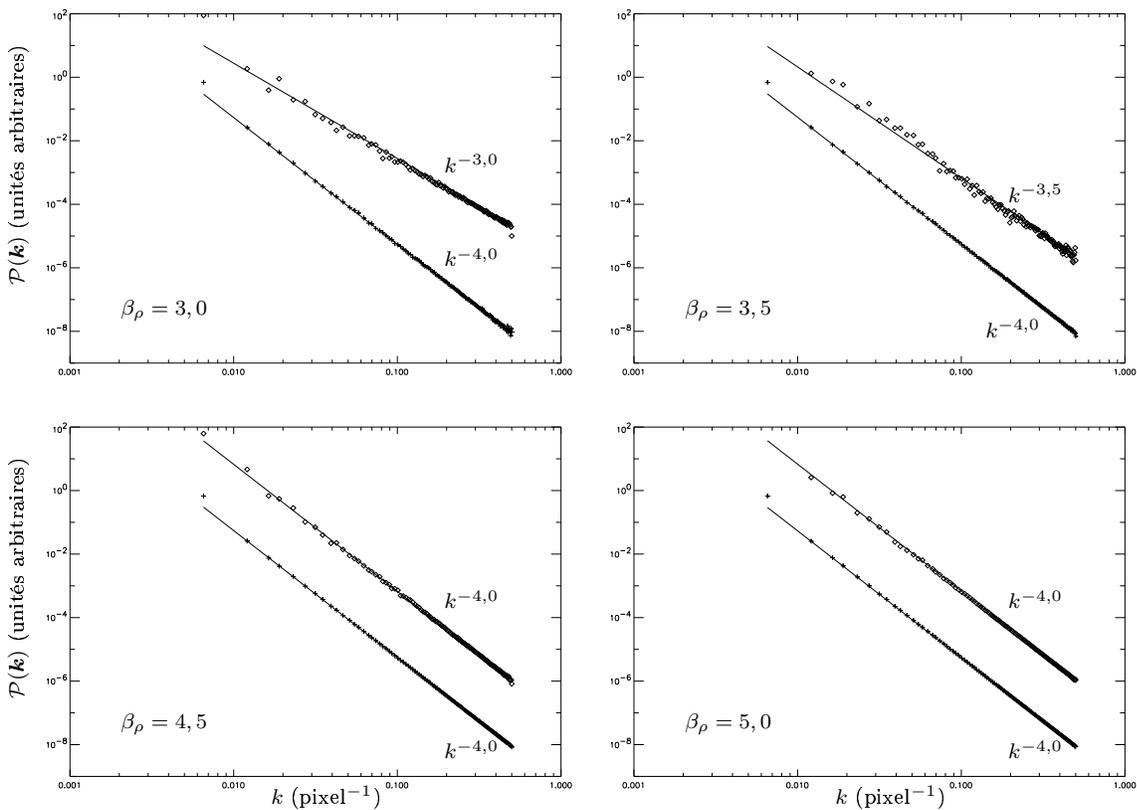


FIG. **XII.16** – Spectres de puissance, moyennés azimutalement, des cartes de centroïdes non normalisés (losanges) et normalisés (croix) construits à partir du cube de vitesse caractérisé par $\beta_v = 4,0$ et $v_0 = 30 \text{ km s}^{-1}$ et de quatre cubes de densité. Les droites représentent des lois de puissances dont les formes sont indiquées.

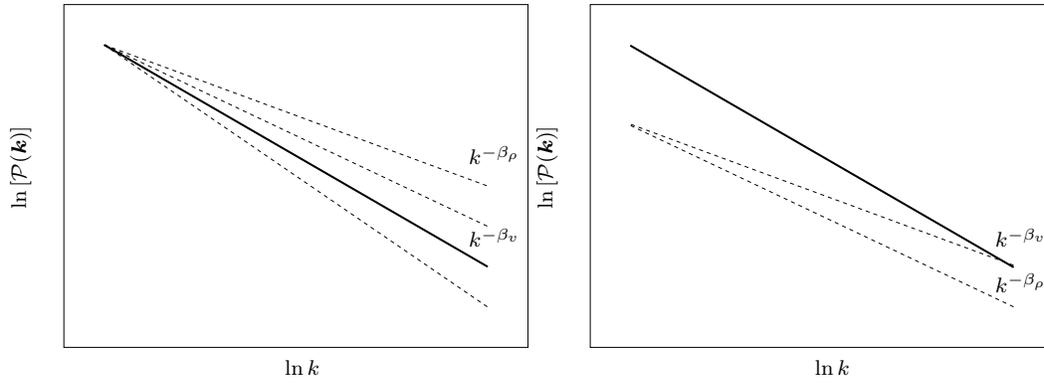


FIG. XII.17 – *Interprétation de l'effet observé sur la figure XII.16. Le trait plein représente le spectre de puissance du champ de vitesse et les tirets le spectre de puissance du champ de densité, pour différentes valeurs de l'indice β_ρ . La puissance contenue dans les fluctuations de vitesse est la même sur les deux figures. La puissance correspondant aux fluctuations de densité est plus importante sur la figure de gauche que sur la figure de droite.*

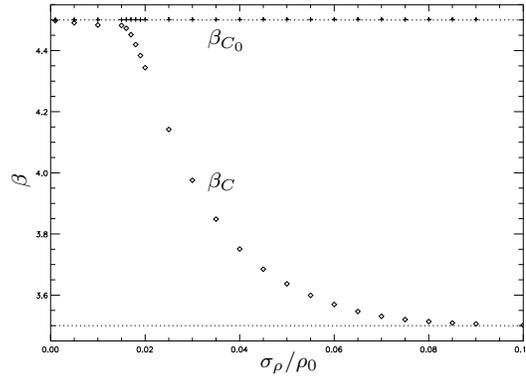


FIG. XII.18 – *Évolution des indices spectraux β_C (losanges) et β_{C_0} (croix) en fonction du rapport σ_ρ/ρ_0 , pour un cube de densité d'indice spectral $\beta_\rho = 3,5$ et un cube de vitesse $\beta_v = 4,5$ dont la valeur moyenne est $v_0 = 30 \text{ km s}^{-1}$. Les pointillés indiquent les asymptotes à $\beta = 3,5$ et $\beta = 4,5$.*

On peut y voir qu'effectivement, dans la limite des petites fluctuations de densité, on retrouve le résultat $\beta_C = \beta_v$, et qu'en revanche, lorsque ces fluctuations deviennent trop importantes, l'indice spectral de la carte des centroïdes non normalisés prend la valeur de β_ρ . L'hypothèse des petites fluctuations de densité, qu'on avait utilisée comme condition de validité d'un développement limité au chapitre X, est donc nécessaire en pratique si l'on veut retrouver les statistiques de la vitesse à partir de celles des cartes de centroïdes non normalisés, dans le cas où la vitesse moyenne n'est pas nulle. Notons cependant qu'il est toujours possible se ramener au cas $v_0 = 0$ en calibrant correctement les canaux en vitesse.

Le cas des grandes fluctuations de densité

On peut donc se placer dans le cas d'une vitesse moyenne nulle à l'aide d'une calibration adéquate. Dans cette hypothèse, les fluctuations de densité peuvent *a priori* être augmentées sans modifier le résultat $\beta_C = \beta_v$, puisque le terme $v_0^2 M_{\rho,\rho}$ est alors nul. Ce cas de figure est intéressant d'un point de vue pratique, car les champs de densité du milieu interstellaire présentent fréquemment de grandes variations. Cependant, comme on l'a dit plus haut, les fluctuations des browniens fractionnaires sont limitées par construction, avec typiquement $\sigma_\rho/\rho_0 \lesssim 0,3$, ce qui impose de trouver un autre modèle de champ de densité. Une possibilité qui s'offre à nous est de considérer les exponentielles de champs browniens fractionnaires. On obtient alors des distributions lognormales de la densité avec des excursions importantes. Partant d'un champ caractérisé par un indice spectral $\beta = 4$, on obtient par ce biais un champ de densité dont les valeurs sont comprises

entre $\sim 0,6 \text{ cm}^{-3}$ et $\sim 2700 \text{ cm}^{-3}$, si l'on pose que la valeur moyenne est $\rho_0 = 90 \text{ cm}^{-3}$. Le rapport σ_ρ/ρ_0 est alors de l'ordre de 1,22. Comme on peut le voir sur la figure **XII.19**, ce cube de densité présente des grandes déviations loin de la valeur moyenne. On remarque également que son spectre de puissance suit une loi de puissance presque parfaite, dont l'indice spectral est justement $\beta_\rho = 4$.

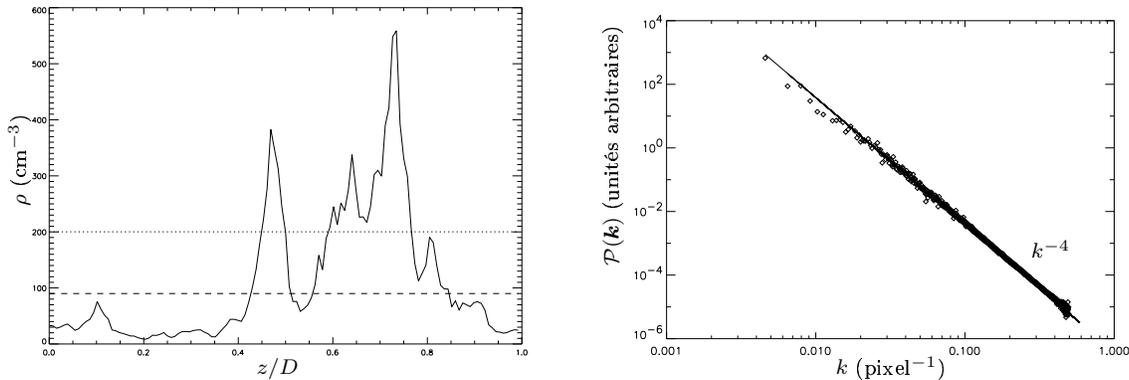


FIG. **XII.19** – Exemple de ligne de visée (à gauche) et spectre de puissance moyenné azimutalement (à droite) du cube de densité construit comme exponentielle d'un brownien fractionnaire d'indice $\beta = 4$.

À partir de ce cube et des cinq champs de vitesse de type brownien fractionnaire avec $v_0 = 0$, on construit cinq cubes de données et les centroïdes de vitesse correspondants. Les spectres de puissance des cartes de centroïdes normalisés et non normalisés sont présentés sur la figure **XII.20**. On voit que contrairement au cas précédent, la nullité de la vitesse moyenne ne suffit pas à assurer l'égalité des indices spectraux $\beta_C = \beta_v$. En fait, on retrouve la même situation que celle rencontrée dans le cas d'un champ de densité de type brownien fractionnaire avec une vitesse moyenne non nulle (figure **XII.16**) c'est-à-dire que l'indice spectral obtenu est le plus petit des deux nombres β_ρ et β_v . Plus gênant encore, on arrive à la même conclusion en ce qui concerne β_{C_0} , alors que tout montrait jusqu'à présent que ce dernier fournissait toujours la valeur de l'indice spectral de la vitesse.

Étant donné que cet effet ne peut donc être attribué au terme $v_0^2 M_{\rho,\rho}$ dans l'expression (58) de la fonction d'autocorrélation A_C , il faut en chercher la cause dans les autres termes dépendant des fluctuations de densité, à savoir les termes corrélés $2\rho_0 M_{\rho v,v}$ et $M_{\rho v,\rho v}$. Ceci expliquerait également le fait que les cartes des centroïdes normalisés soient aussi affectées, puisque A_{C_0} comporte des termes corrélés semblables. On ne poussera cependant pas plus loin l'analyse dans le cadre de cette thèse.

XII.7 Une ébauche de conclusion critique

Ce chapitre nous a permis, à partir de la simulation de champs de densité et de vitesse possédant des propriétés statistiques bien déterminées, de construire des observables synthétiques sous forme de cubes de données PPV, d'où l'on a tiré des cartes de l'intensité intégrée et des deux types de centroïdes de vitesse. Il s'agissait de vérifier, en utilisant ces simulations, les résultats analytiques obtenus aux chapitres **X** et **XI** dans le cadre de transitions optiquement minces.

Les résultats obtenus confirment tout d'abord que l'indice spectral β_I de la carte d'intensité intégrée est le même que celui du champ de densité tridimensionnel β_ρ , lorsque la profondeur D du milieu le long de la ligne de visée est au moins de l'ordre de la plus grande échelle transverse considérée. Pour des profondeurs plus faibles, le spectre de puissance de l'émission intégrée montre deux pentes asymptotiques égales respectivement à β_ρ et $\beta_\rho - 1$ aux petites et aux grandes échelles, la transition ayant lieu à une fréquence spatiale caractéristique $k_D = 1/2D$. Cette propriété du spectre de puissance de l'émission intégrée peut être utilisée pour estimer la profondeur des nuages interstellaires et pour déduire les propriétés statistiques tridimensionnelles de milieux optiquement épais.

En ce qui concerne les cartes des centroïdes de vitesse, le résultat analytique du chapitre **XI**, correspondant à l'ordre non trivial le plus bas en fluctuations de densité, dont l'expression dans l'espace de Fourier revient à écrire l'égalité des trois indices spectraux β_C , β_{C_0} et β_v , est vérifié parfaitement lorsque ces fluctuations sont effectivement très faibles ($\sigma_\rho/\rho_0 \lesssim 0,015$ pour $|v_0|=30 \text{ km s}^{-1}$) mais l'influence de la structure en

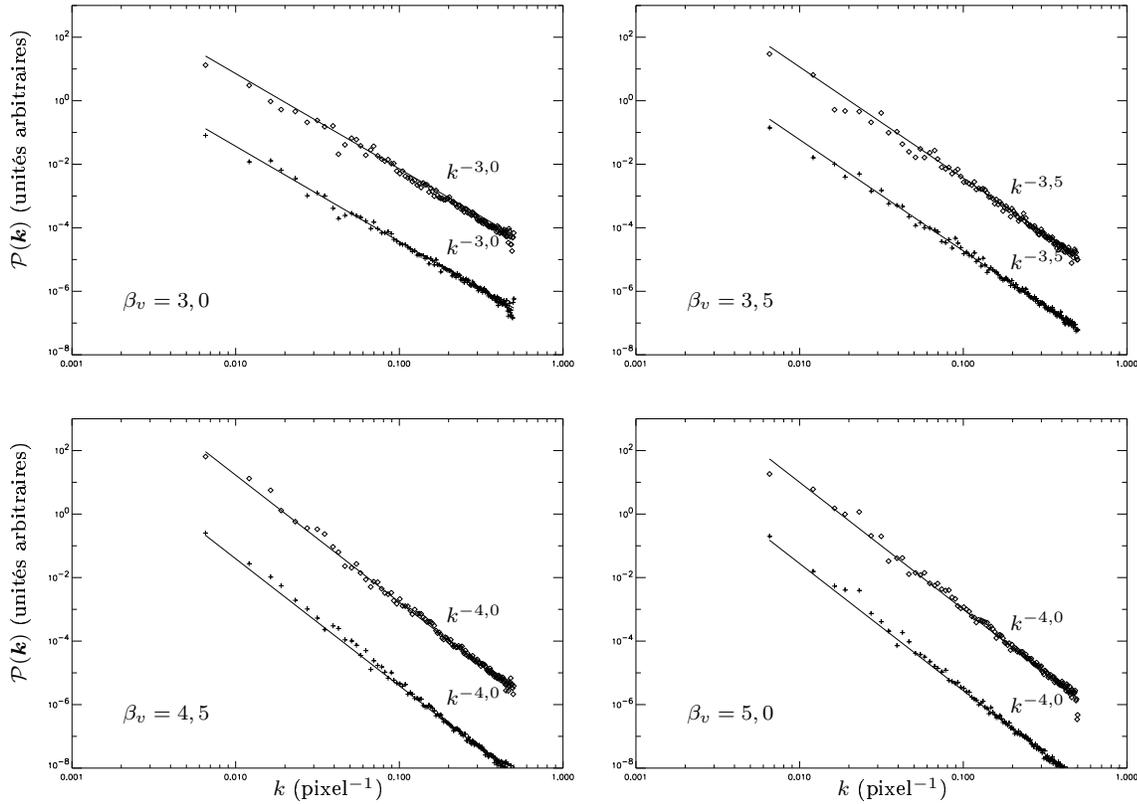


FIG. XII.20 – Spectres de puissance, moyennés azimutalement, des cartes de centroïdes non normalisés (losanges) et normalisés (croix) obtenues à partir du cube de densité construit comme une exponentielle de champ brownien fractionnaire et de quatre cubes de vitesse. Les droites en trait plein représentent des lois de puissances dont les formes sont indiquées.

densité dans les cartes des centroïdes non normalisés se fait de plus en plus sentir lorsque l'on sort de ce régime, que la vitesse moyenne v_0 est non nulle et que l'indice du spectre de puissance de la densité est plus faible que celui de la vitesse. Le spectre de puissance des cartes de centroïdes normalisés reste quant à lui représentatif de la structure cinématique. Cependant, quand les fluctuations de densité deviennent trop importantes ($\sigma_\rho/\rho_0 \gtrsim 1$), la fiabilité du centroïde normalisé s'effondre également, dans le cas où $\beta_\rho < \beta_v$, et ce quelle que soit la vitesse moyenne, ce qu'on interprète comme l'effet des termes corrélés apparaissant dans les formes analytiques des fonctions A_C et A_{C_0} .

Cette limitation des centroïdes de vitesse, y compris dans leur version normalisée, justifie *a posteriori* la recherche de nouvelles méthodes d'extraction des statistiques des champs de vitesse interstellaires. L'une d'elles, la méthode d'analyse des tranches en vitesse (VCA) de [Lazarian & Pogosyan, 2000], fait l'objet d'une étude numérique dans le chapitre suivant.

□

CHAPITRE XIII

Analyse des tranches en vitesse

XIII.1 Introduction

Comme on vient de le voir, dans le cas de champs de densité présentant de fortes fluctuations, tels qu'on peut en rencontrer dans le milieu interstellaire et dans les simulations de turbulence compressible, les cartes de centroïdes de vitesse donnent une image biaisée de la structure cinématique des écoulements. La normalisation permet de s'affranchir de ce problème dans une certaine mesure, jusqu'à ce que les fluctuations de densité deviennent trop importantes. Dans ce cas de figure, il est nécessaire d'avoir recours à d'autres méthodes d'analyse des données permettant de retrouver le comportement statistique du champ de vitesse tridimensionnel.

Dans cette optique, Lazarian & Pogosyan [Lazarian & Pogosyan, 2000] ont proposé une méthode, justifiée analytiquement, se fondant sur l'étude des propriétés statistiques des cartes par canaux d'un cube de données PPV. Prenant l'exemple de la variation de l'indice spectral d'une carte d'intensité intégrée avec la profondeur du nuage observé, cette analyse cherche à estimer β_v à partir de la variation de l'indice spectral des cartes par canaux en fonction de leur largeur en vitesse. On peut comprendre cette approche en notant que, dans le cas incompressible, les structures apparaissant dans les cartes par canaux reflètent exactement la structure cinématique de l'écoulement. Cette remarque n'est pas anodine, car elle souligne qu'encore une fois, comme dans le cas des cartes de centroïdes de vitesse, c'est la limite de la densité uniforme qui montre la voie à suivre, ce qui invite nécessairement à la prudence quant à l'utilisation de la méthode d'analyse des tranches en vitesse. Pourtant, les travaux de [Lazarian *et al.*, 2001] et [Esquivel *et al.*, 2003] ont analysé des simulations de turbulence magnétohydrodynamique fortement compressibles à l'aide de cette méthode, et en ont semble-t-il confirmé les prédictions. Dans les deux cas, le spectre de puissance des champs de vitesse simulés a été modifié de façon à suivre une loi de puissance exacte, afin d'étendre artificiellement le domaine inertiel. Cette méthode préserve les phases en Fourier et donc l'essentiel de l'information physique, comme on le soulignera au chapitre **XVII**. D'autre part, un grand nombre de travaux récents sur des observations HI [Stanimirovic & Lazarian, 2001, Elmegreen *et al.*, 2001, Dickey *et al.*, 2001] sont fondés sur la méthode de [Lazarian & Pogosyan, 2000].

L'objectif de ce chapitre, étant donné que nous disposons de simulations d'observations pour lesquelles les champs de densité et de vitesse ont des propriétés statistiques parfaitement connues, est de tester ces prédictions théoriques sur des cubes de densité et de vitesse de type brownien fractionnaire, dont les deux principaux avantages sont d'une part qu'ils possèdent intrinsèquement des spectres de puissance en loi de puissance et d'autre part qu'ils obéissent à des statistiques gaussiennes, ce qui constitue les hypothèses de départ du modèle de [Lazarian & Pogosyan, 2000].

XIII.2 Épaisseur des tranches en vitesse

XIII.2.a Définition

Les observables considérées dans la méthode de [Lazarian & Pogosyan, 2000] sont les tranches en vitesse dans le cube de données, qu'on définit comme l'intensité intégrée limitée à un certain domaine en vitesse,

$$S(\mathbf{X}, u, \Delta u) = \int T_b(\mathbf{X}, u) du \quad \text{où l'intégrale est prise entre } u - \frac{\Delta u}{2} \text{ et } u + \frac{\Delta u}{2}.$$

Cette expression est semblable à celle de la carte d'un canal en vitesse dont la bande passante serait une fonction porte de largeur Δu . En pratique, la construction de tranches en vitesse de différentes largeurs se

fait justement en sommant des cartes par canaux. L'hypothèse sous-jacente relative à la bande passante est implicitement admise, comme elle l'a été dans les chapitres **X**, **XI** et **XII**.

La largeur en vitesse Δu peut être comparée à la dispersion des vitesses dans le cube tridimensionnel, ce qui permet une classification des tranches en vitesse, en fonction de l'échelle. En effet, la dispersion des vitesses $\sigma(l)$ à une échelle l dépend de cette dernière au travers de la relation

$$\sigma(l) = \sigma_v \left(\frac{l}{L} \right)^{H_v} \quad \text{où } H_v \text{ est l'exposant de Hurst du champ de vitesse.} \quad (71)$$

Dans cette expression, σ_v est la dispersion des vitesses totale, sur l'ensemble du cube, laquelle est fixée à 3 km s^{-1} dans nos simulations, et L est la plus grande échelle tridimensionnelle.

XIII.2.b Tranches minces et tranches épaisses

Étant donnée cette relation, on dit qu'une tranche en vitesse de largeur Δu est mince à l'échelle l si la dispersion des vitesses $\sigma(l)$ est plus grande que Δu . Réciproquement, une tranche est dite épaisse à l'échelle l si $\sigma(l) < \Delta u$. Il est clair, d'après l'équation (71), que les tranches en vitesse ont plus de chances d'être minces aux grandes échelles qu'aux petites, puisque l'exposant de Hurst est strictement positif. En fait, la plus petite échelle l_m à laquelle une tranche en vitesse de largeur Δu fixée peut être considérée comme mince est donnée par ce qu'on appellera l'échelle limite du régime mince,

$$l_m = L \left(\frac{\Delta u}{\sigma_v} \right)^{1/H_v} \quad \text{à comparer avec les échelles caractéristiques des simulations.} \quad (72)$$

Dans le cas où une tranche en vitesse est mince à toutes les échelles présentes dans les simulations, c'est-à-dire si l_m est plus petite que l'échelle du pixel l_p , on dira que cette tranche est entièrement mince. Réciproquement, si la tranche considérée est épaisse à l'échelle L , elle le sera à toutes les échelles et on dira qu'elle est entièrement épaisse. Bien entendu, les tranches en vitesse présentent généralement, en fonction de l'échelle, une transition entre les deux régimes.

À partir de là, il est important de vérifier si nos simulations permettent d'explorer les deux régimes possibles. Étant donné que la largeur maximale Δu accessible est par construction plus grande que σ_v , il ne fait pas de doute qu'il existe, dans nos simulations, des tranches entièrement épaisses. L'accès aux tranches entièrement minces est, lui, plus problématique. Pour étudier ce problème, il convient de calculer la dispersion de vitesse $\sigma(l_p)$ à l'échelle du pixel, qui est donnée par l'équation (71), en notant que les simulations sont de taille $128 \times 128 \times 128$, de sorte que $L = 128l_p$. Les courbes représentant l'évolution de la dispersion de vitesse avec l'échelle sont présentées sur la figure **XIII.1**, afin de faciliter la compréhension. Le cas particulier de l'exposant de Hurst nul, correspondant à un indice spectral β_v de la vitesse égal à 3, n'est pas représenté, car dans ce cas la dispersion de vitesse est évidemment constante en fonction de l'échelle et égale à σ_v .

Le régime entièrement mince est accessible à nos simulations à la seule condition que des tranches en vitesse de largeur Δu significative, c'est-à-dire plus grande que la résolution effective δu_e , soient elles-mêmes entièrement minces, ce qui revient à rechercher l'inégalité $\sigma(l_p) > \delta u_e$. Avec les valeurs numériques choisies, soit $T = 100 \text{ K}$ et $\delta u = 0,25 \text{ km s}^{-1}$, la résolution effective est égale à $2,16 \text{ km s}^{-1}$ (voir le chapitre **XII**), et est représentée par une ligne en tirets sur la figure **XIII.1**. On voit que dans tous les cas où H_v n'est pas nul, la dispersion de vitesse à l'échelle du pixel est plus petite que la résolution effective, ce qui signifie qu'il n'existe alors pas de tranches en vitesse entièrement minces. La position de l'échelle limite du régime mince, représentée sur la figure **XIII.1** par des pointillés, montre cependant que les tranches en vitesse de largeur comparable à la résolution effective présentent une transition entre les deux régimes. Seul le cas $H_v = 0$, néanmoins, permet d'accéder à des tranches entièrement minces. L'accès aux tranches en vitesse entièrement minces pour des valeurs non nulles de l'exposant de Hurst demanderait une augmentation de la dispersion de vitesse ou une diminution de la température cinétique. La première solution est nécessaire si l'on souhaite conserver la même résolution effective. Cependant, l'augmentation de σ_v amène une augmentation du nombre de canaux dans le cube de données, la résolution δu étant constante, et donc un bruit dit de *shot noise* plus important, comme on le verra plus tard.

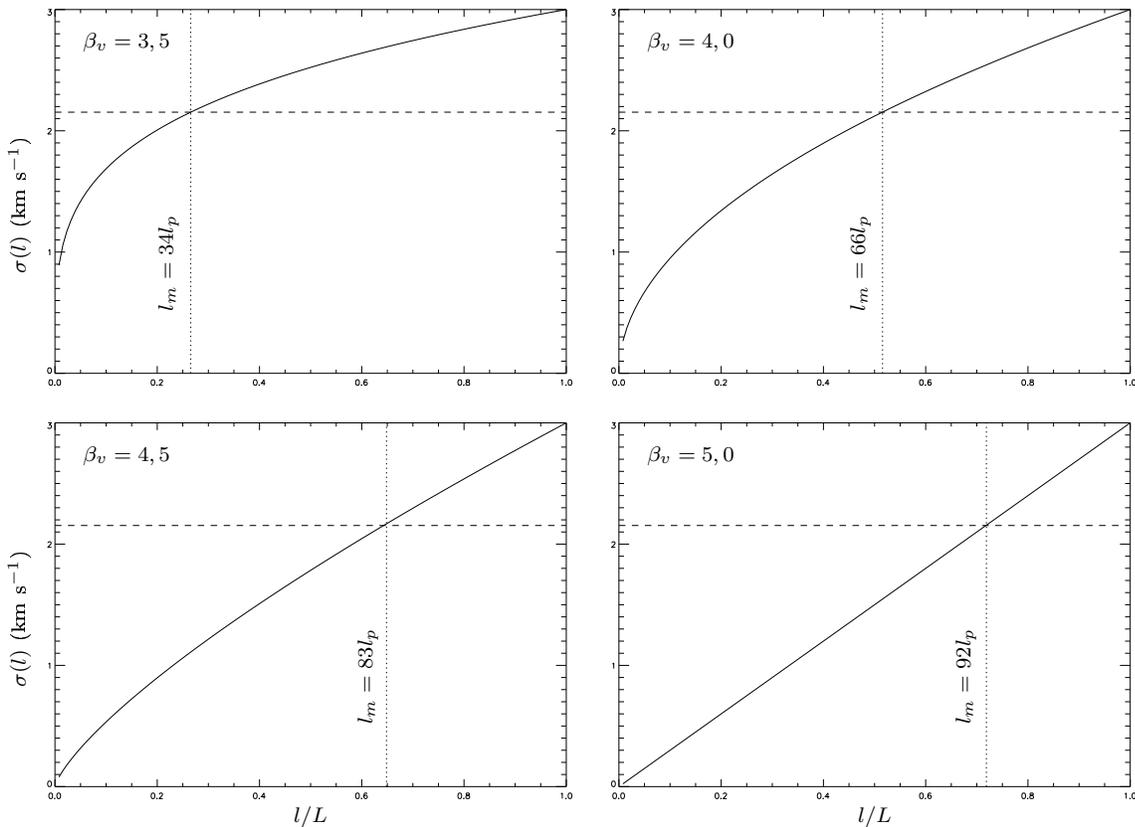


FIG. XIII.1 – Courbes représentant la dispersion de vitesse en fonction de l'échelle, suivant la valeur de l'indice spectral β_v de la vitesse, dont on rappelle qu'il est lié à l'exposant de Hurst H_v par $\beta_v = 2H_v + 3$ dans le cas tridimensionnel. La résolution effective δu_e est indiquée par les tirets, et la position de l'échelle limite du régime mince l_m par des pointillés. Sa valeur est notée verticalement, en unités de l'échelle d'un pixel l_p .

XIII.3 Étude numérique des tranches en vitesse

XIII.3.a Les prédictions de l'analyse des tranches en vitesse

D'après [Lazarian & Pogosyan, 2000], les tranches en vitesse, qui sont donc des cartes bidimensionnelles puisqu'elles sont intégrées sur la vitesse, possèdent, lorsqu'elles sont entièrement minces, un spectre de puissance dont l'indice β_m est donné par une relation linéaire dépendant uniquement de l'indice spectral de la vitesse,

$$\beta_m = 3 + \frac{3 - \beta_v}{2} \quad \text{soit} \quad H_m = \frac{1 - H_v}{2} \quad \text{en termes d'exposants de Hurst.} \quad (73)$$

De même, les tranches en vitesse entièrement épaisses sont caractérisées par un indice spectral β_e dont l'expression est très similaire à celle de β_m ,

$$\beta_e = 3 - \frac{3 - \beta_v}{2} \quad \text{soit} \quad H_e = \frac{1 + H_v}{2} \quad \text{en termes d'exposants de Hurst.} \quad (74)$$

Étant donné que la tranche en vitesse dont la largeur couvre toute l'étendue de la distribution des vitesses n'est autre que l'intensité intégrée, dont on a vu au XII.5 que son indice spectral est égal à celui de la densité, il apparaît que le régime des tranches en vitesse entièrement épaisses est un régime de transition entre le régime entièrement mince et ce qu'on convient d'appeler régime "très épais", pour lequel une partie importante de l'émission est intégrée, l'indice spectral tendant alors vers celui du champ de densité tridimensionnel β_ρ .

XIII.3.b Spectres de puissance observés

Pour tester les prédictions de [Lazarian & Pogosyan, 2000], on a calculé les indices spectraux de tranches en vitesse de différentes épaisseurs, extraites des cubes de données simulés au chapitre XII. On rappelle que la température cinétique utilisée est $T = 100$ K. Les spectres de puissance de certaines de ces tranches sont présentés sur la figure XIII.2. Chaque graphe correspond à un cube de données particulier, caractérisé par l'ensemble des deux indices spectraux β_ρ et β_v et montre, pour ce cube, le spectre de puissance de quatre tranches en vitesse dont les largeurs vont de $\Delta u = 1,25 \text{ km s}^{-1}$ à $\Delta u = 10 \text{ km s}^{-1}$.

Dans chaque cas, les droites représentent les prédictions de [Lazarian & Pogosyan, 2000] pour les régimes mince et épais décrits respectivement par les équations (73) et (74), et le petit trait vertical indique l'échelle de transition l_m donnée par (72). La tranche en vitesse considérée est alors mince aux échelles situées à gauche de cette marque¹, et épaisse aux échelles situées à droite. Les spectres de puissance montrés sur la figure XIII.2 sont en relativement bon accord avec les prédictions de [Lazarian & Pogosyan, 2000]. On observe des spectres de puissance courbés, avec une rupture de pente aux alentours de l_m . Cependant, la faible plage d'échelles sur laquelle les tranches en vitesse sont minces rend la comparaison avec les prédictions difficile. De plus, les spectres de puissance des tranches en vitesse pour β_v plus grand que 4,5 s'éloignent de la prédiction de [Lazarian & Pogosyan, 2000] aux petites échelles, car ces tranches passent dans le régime très épais à ces échelles. Ce comportement est en effet corrélé à la valeur de β_ρ , et ce d'autant plus que β_ρ diffère plus fortement de β_v . Une autre particularité de la figure XIII.2 est l'augmentation de la puissance aux petites échelles pour $\beta_v = 3$, due au *shot noise*.

XIII.3.c Effet de *shot noise* dû à la taille finie

Le calcul des cubes de données à partir de champs tridimensionnels de taille finie amène une augmentation artificielle des fluctuations à haute fréquence dans les cartes par canaux [Lazarian *et al.*, 2001, Brunt & Heyer, 2002, Esquivel *et al.*, 2003]. En effet, comme remarqué par [Esquivel *et al.*, 2003], la taille limitée des lignes de visée simulées introduit des variations brusques de l'émission d'un canal à l'autre, et implique l'existence de canaux presque vides. Cet effet est d'autant plus important que la résolution spectrale effective est meilleure, c'est-à-dire que δu_e est plus petit. L'aplatissement à haute fréquence, caractéristique du bruit que représentent ces fluctuations de l'émission, est clairement visible sur les spectres de puissance des tranches en vitesse dans le cas $\beta_v = 3$ (figure XIII.2). Comme attendu, l'amplitude de cette composante à haute fréquence augmente quand la taille des champs tridimensionnels diminue. Cet effet, qu'on ne montre pas ici mais qui a été vérifié, affecte de manière importante les spectres de puissance des canaux simulés.

Une solution pour réduire les effets du *shot noise* est d'appliquer un lissage gaussien aux spectres simulés, ce qui revient à augmenter l'élargissement thermique. Mais un tel lissage augmente également la valeur de δu_e , ce qui réduit nécessairement le domaine d'échelles minces accessibles. Un exemple de l'effet de la température cinétique sur l'analyse des tranches en vitesse est montré sur la figure XIII.3, où sont représentés les spectres de puissance de tranches en vitesse d'épaisseur Δu égale à la résolution effective δu_e , pour des cubes de données correspondant d'une part à $\beta_\rho = 4$ et $\beta_v = 3$, d'autre part à $\beta_\rho = 3$ et $\beta_v = 4,5$, calculés à différentes températures entre $T = 1$ K et $T = 200$ K. Le cas $\beta_v = 3$ est particulièrement intéressant car les tranches en vitesse sont minces à toutes les échelles dès lors que $\Delta u \leq \sigma_v$, ce qui est le cas ici puisque $\delta u_e \simeq \sigma_v$ pour la plus haute température considérée $T = 200$ K. Ceci permet d'étudier séparément les effets de lissage gaussien sur la réduction du *shot noise* et sur la minceur des tranches en vitesse. Sur la figure XIII.3, le panneau de gauche montre que le lissage gaussien réduit significativement le *shot noise*. En effet, l'augmentation de la température cinétique provoque un affaiblissement de la composante haute fréquence associée au bruit, et donc un raidissement du spectre de puissance. Il semble cependant que même à la température la plus élevée, $T = 200$ K, le *shot noise* ne soit pas complètement nettoyé. À plus haute température, la condition de minceur des tranches en vitesses² $\delta u_e \leq \sigma_v$ ne serait de son côté plus remplie. Le panneau de droite illustre quant à lui l'effet du lissage gaussien à la fois sur le *shot noise* et sur l'épaisseur de la tranche en vitesse. À basse température ($T = 1$ K), la tranche est mince à presque toutes les échelles, mais on voit clairement l'effet du *shot noise* sur les composantes à haute fréquence spatiale. Lorsque la température augmente, l'amplitude du *shot noise* et la plage d'échelles pour

¹Quand celle-ci est absente, c'est que les tranches en vitesse sont entièrement épaisses.

²On est ici dans le régime entièrement mince, car avec $\beta_v = 3$, la dispersion de vitesse est indépendante de l'échelle.

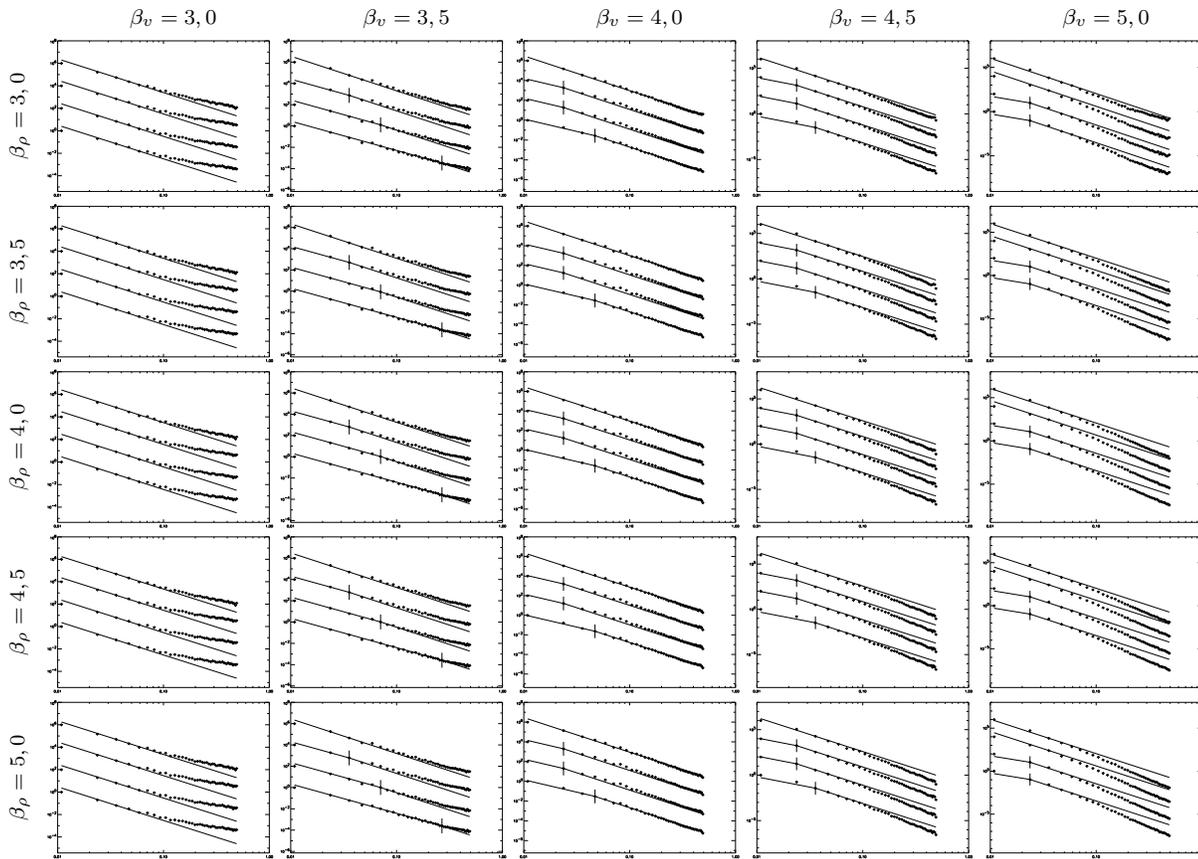


FIG. XIII.2 – Spectres de puissance, moyennés azimutalement, de tranches en vitesse extraites de chacun des 25 cubes de données construits à partir de champs de densité et de vitesse de type brownien fractionnaire. Sur chaque figure, les points représentent les spectres de puissance de quatre tranches en vitesse d'épaisseurs respectives $\Delta u = 1,25 \text{ km s}^{-1}$, $\Delta u = 1,75 \text{ km s}^{-1}$, $\Delta u = 2,25 \text{ km s}^{-1}$ et $\Delta u = 10 \text{ km s}^{-1}$ (de bas en haut). Les droites correspondent aux prédictions de l'analyse des tranches en vitesse, ajustées de manière à se croiser à l'échelle de transition l_m , repérée par un trait vertical.

lesquelles la tranche en vitesse est mince décroissent toutes les deux, comme on s'y attendait. À haute température, le *shot noise* est complètement nettoyé mais la tranche en vitesse est entièrement épaisse. On comprend donc que l'utilisation d'un lissage gaussien impose nécessairement un compromis entre la réduction du *shot noise* et la minceur des tranches en vitesse. En ce qui concerne nos simulations, les spectres de puissance de la figure XIII.2 montrent que le *shot noise* est significatif seulement pour $\beta_v = 3$, ce qui indique que les paramètres choisis, à savoir σ_v , T et δu , forment un bon compromis, pour la plupart des valeurs de l'indice spectral de la vitesse β_v , entre la réduction du *shot noise* et l'accessibilité du régime mince des tranches en vitesse.

XIII.3.d Analyse des résultats obtenus

La méthode d'analyse des tranches en vitesse proposée par [Lazarian & Pogoyan, 2000] pour déterminer les indices spectraux β_ρ et β_v consiste à étudier l'indice spectral β_s des tranches en vitesse en fonction de l'épaisseur Δu de celles-ci. D'après les prédictions analytiques, la courbe de β_s en fonction de Δu doit avoir deux limites aux petites valeurs et aux grandes valeurs de Δu , correspondant respectivement aux régimes entièrement mince et très épais, et permettant de déterminer β_ρ et β_v .

Nous avons fait cette analyse des tranches en vitesse sur nos simulations, et les résultats sont présentés sur la figure XIII.4, qui montre les variations de l'indice β_s , déterminé par un ajustement du spectre de puissance, moyenné azimutalement, sur l'ensemble des nombres d'onde k , en fonction de l'épaisseur en vitesse Δu . Les courbes, une pour chaque combinaison (β_ρ, β_v) des indices spectraux des champs tridimensionnels, sont

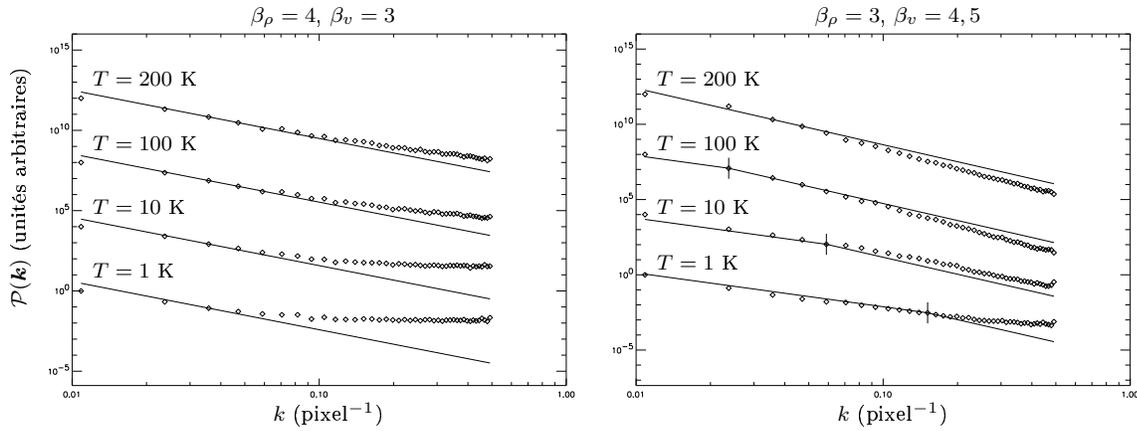


FIG. XIII.3 – Spectres de puissance, moyennés azimuthalement, de tranches en vitesse de largeur $\Delta u = \delta u_e$ pour quatre températures cinétiques. La figure de gauche correspond au cas $\beta_\rho = 4$ et $\beta_v = 3$, la figure de droite au cas $\beta_\rho = 3$ et $\beta_v = 4, 5$. Les droites représentent les prédictions de [Lazarian & Pogosyan, 2000] dans les régimes d'échelles minces et épaisses, la transition étant marquée par le trait vertical.

regroupées par valeur de β_v . On distingue bien entendu le régime entièrement mince, pour lequel la tranche en vitesse est mince à toutes les échelles, soit $\Delta u \leq \sigma(l_p)$, le régime entièrement épais, déterminé par la relation $\Delta u \geq \sigma_v$, et le régime très épais, caractérisé par l'égalité $\beta_s = \beta_\rho$, qu'on observe typiquement pour $\Delta u \geq 20 \text{ km s}^{-1}$. On indique également le régime transitoire pour lequel la tranche en vitesse est mince aux grandes échelles et épaisse aux petites échelles. Les tirets marquent quant à eux la position de la résolution spectrale effective δu_e de nos simulations. Le plateau observé à gauche de cette dernière séparation reflète le fait que les structures en vitesse plus petites que la résolution effective ne peuvent pas être résolues.

Dans la limite des grandes épaisseurs en vitesse, on retrouve le fait que les indices spectraux des tranches en vitesse convergent vers la valeur de β_ρ . Inversement, aux petites épaisseurs en vitesse, on voit qu'en accord avec [Lazarian & Pogosyan, 2000], le spectre de puissance des tranches en vitesses devient indépendant du champ de densité, sauf dans les cas où $\beta_v \geq 4, 5$, comme expliqué au paragraphe suivant. La forte corrélation entre le champ de vitesse tridimensionnel et les cartes par canaux était déjà visible sur la figure XII.5, où l'on voit notamment que la structure des cartes par canaux est dominée par le champ de vitesse puisqu'elle varie très peu avec l'indice spectral du champ de densité.

Sur la figure XIII.4, on remarque que les courbes correspondant à $\beta_v = 3$ décroissent aux petites épaisseurs en vitesse Δu , jusqu'à une valeur de 1,8 environ. Puisque l'indice spectral β_s est calculé sur l'ensemble des valeurs de k , cet effet peut être entièrement attribué au *shot noise*, dont l'amplitude est importante dans ce cas, comme on le voit sur la figure XIII.3. Pour $\beta_v = 3, 5$, l'effet du *shot noise* est réduit, et dans ce cas, les courbes sont en relativement bon accord avec les prédictions de [Lazarian & Pogosyan, 2000]. Il existe un plateau significatif dans le régime épais, à une valeur proche de la valeur prédite β_e , donnée par l'équation (74). De plus, la transition marquée par $\Delta u = \delta u_e$ n'est pas très éloignée du régime des tranches en vitesse entièrement minces, et il est donc cohérent de trouver, pour une tranche de cette épaisseur en vitesse, un indice spectral β_s proche de la valeur prédite β_m . Pour les valeurs plus grandes de β_v , l'accord avec [Lazarian & Pogosyan, 2000] n'est pas clair. Dans les trois cas restants, en effet, on peut sans problème négliger le *shot noise* du fait du lissage gaussien, mais on est en revanche très loin d'avoir des tranches en vitesse entièrement minces, ce qui ne permet pas de tester les prédictions de [Lazarian & Pogosyan, 2000] dans le régime mince. D'autre part, on observe un semblant de plateau au sein du régime épais, en tous cas pour $\beta_v = 4$ et $\beta_v = 4, 5$, mais pas à la valeur β_e prédite. Ceci est dû au fait que les plus petites échelles deviennent en fait très épaisses. C'est également pour cette dernière raison que, dans les cas $\beta_v = 4, 5$ et $\beta_v = 5$, les courbes dépendent de β_ρ et ne convergent pas toutes vers la même valeur aux petites largeurs en vitesse.

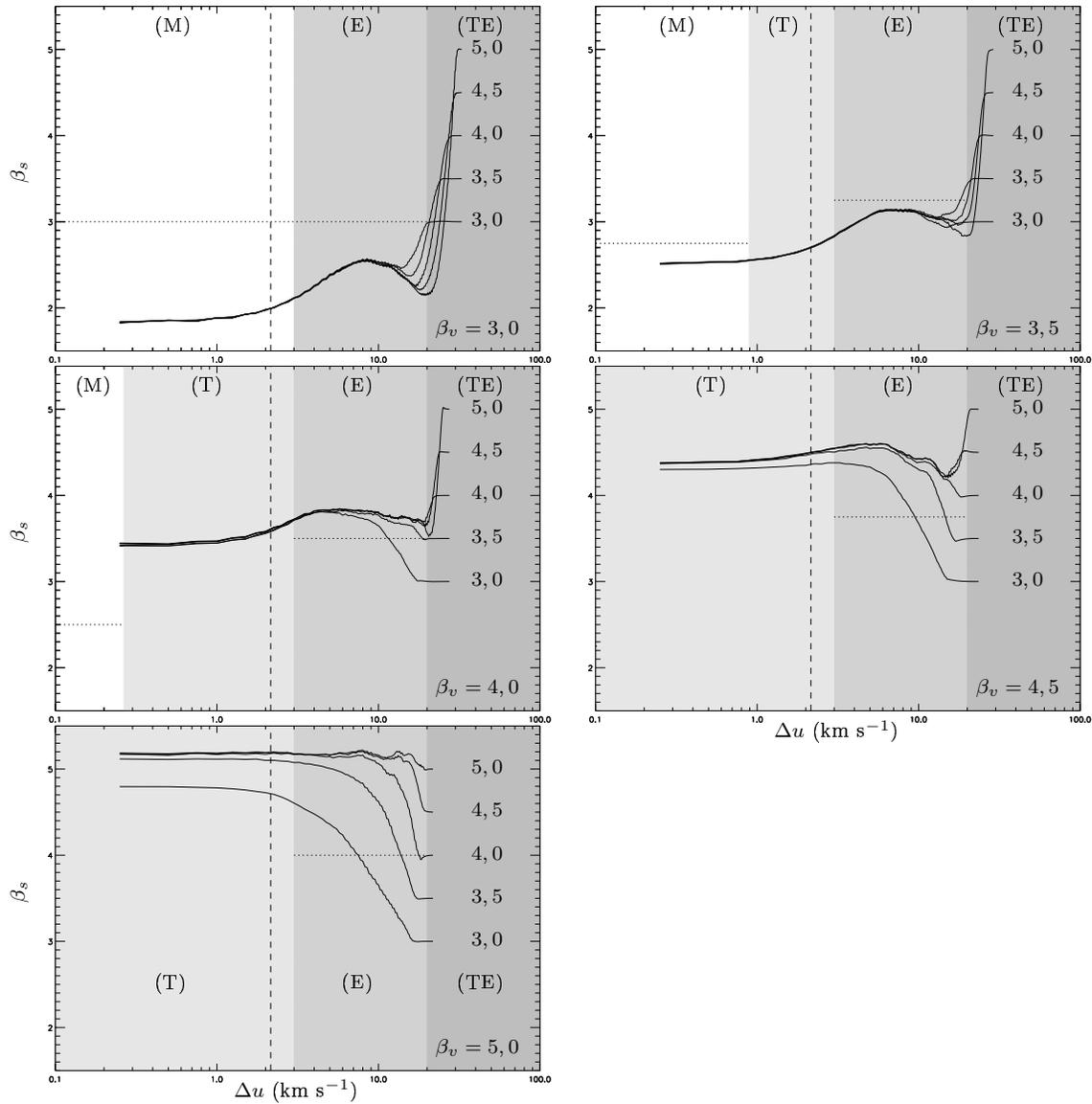


FIG. XIII.4 – Indice spectral β_s des tranches en vitesse extraites des différents cubes de données, en fonction de la largeur Δu . Les courbes sont regroupées en fonction de l'indice spectral β_v , indiqué en bas à droite de chaque figure. Les zones grisées indiquent les domaines correspondant aux régimes mince (M), de transition (T), épais (E) et très épais (TE). Les tirets verticaux indiquent la résolution en vitesse effective, et les pointillés horizontaux représentent les prédictions de [Lazarian & Pogosyan, 2000] dans les régimes mince et épais, respectivement $\beta_s = \beta_m$ et $\beta_s = \beta_e$. Chaque courbe correspond à une valeur de β_ρ , indiquée en regard.

XIII.4 Discussion et conclusions

Du fait du lissage gaussien utilisé, l'effet du *shot noise* sur nos simulations est relativement limité, à part dans le cas extrême $\beta_v = 3$. Cependant, ceci se fait au prix d'un rétrécissement du régime mince accessible, car on a vu que précisément seul le cas $\beta_v = 3$ permettait d'observer des tranches en vitesse entièrement minces significatives, c'est-à-dire telles que $\Delta u \geq \delta u_e$.

Dans ces conditions, l'interprétation des courbes montrant l'évolution de l'indice spectral β_s des tranches en vitesse en fonction de la largeur Δu de celles-ci (figure XIII.4) est particulièrement ambiguë, ce qui rend la détermination de l'indice spectral du champ de vitesse très difficile par le biais du régime mince. D'un autre côté, le spectre de puissance de tranches en vitesse entièrement épaisses peut en fait dépendre de β_p , ce qui rend également difficile la déduction de β_v à partir de l'indice spectral de ces tranches suivant l'équation (74). Il s'avère donc qu'en raison de ces différentes limitations, il est prématuré de conclure que la méthode de [Lazarian & Pogosyan, 2000] peut effectivement être utilisée pour déterminer les propriétés statistiques du champ de vitesse tridimensionnel.

Ce qu'on peut toutefois remarquer, c'est qu'une limite pratique de la méthode de Lazarian et Pogosyan est qu'elle requiert de savoir si oui ou non le régime entièrement mince est atteint, pour une observation donnée. Si un plateau asymptotique significatif est trouvé aux petites épaisseurs Δu sur les courbes de β_s en fonction de Δu , on pourrait penser que c'est le cas. Mais malheureusement, comme on le voit sur la figure XIII.4, un tel plateau peut être observé également dans le régime épais, et amener une estimation fautive de β_v . De plus, le seul moyen d'estimer la position de l'échelle de transition l_m entre les deux régimes pour une tranche donnée passe par l'équation (72), qui nécessite justement la connaissance de β_v . Par suite, il n'y a pas de moyen indépendant de déterminer si le régime des tranches entièrement minces est effectivement atteint. Ceci étant dit, la détermination de β_v dans le petit nuage de Magellan (SMC) par [Stanimirovic & Lazarian, 2001], faite en utilisant la méthode de [Lazarian & Pogosyan, 2000] peut être mise en doute, car leurs observations ne semblent pas leur permettre d'atteindre le régime asymptotique mince.

À ce sujet, il est important d'estimer dans quelles conditions la méthode de [Lazarian & Pogosyan, 2000] peut être utilisée sur des observations réelles, pour un nuage HI à haute latitude, par exemple. On a montré que la plus petite épaisseur en vitesse pertinente pour cette analyse est $\Delta u = \delta u_e \simeq \sqrt{8 \ln 2} \sigma_{th}$, en considérant ici que la résolution spectrale effective est dominée par l'élargissement thermique, ce qui est clairement le cas à $T = 100$ K. Pour estimer β_v en utilisant la méthode de [Lazarian & Pogosyan, 2000], on doit pouvoir observer un plateau aux petites largeurs en vitesse dans la courbe de β_s en fonction de Δu , ce qui nécessite des tranches en vitesse entièrement minces sur une plage relativement importante de largeurs Δu , disons pour $\delta u_e \leq \Delta u \leq 2 \delta u_e$. On se souvient qu'une tranche en vitesse de largeur donnée Δu est mince aux échelles $l \geq l_m$ où l'échelle limite l_m est fournie par l'équation (72). Donc, pour évaluer sur quelles échelles la méthode de [Lazarian & Pogosyan, 2000] peut être utilisée pour déduire β_v , il faut estimer cette échelle limite l_m pour une tranche en vitesse d'épaisseur $\Delta u = 2 \delta u_e$.

Comme montré par [Miville-Deschênes *et al.*, 2003a], le spectre d'énergie du HI est compatible avec la cascade d'énergie de Kolmogorov [Kolmogorov, 1941], selon laquelle la dispersion de vitesse en fonction de l'échelle est de la forme $\sigma(l) = A l^{1/3}$. Le facteur de normalisation A peut être estimé à partir d'observations du HI à haute latitude, comme dans [Joncas *et al.*, 1992], où la dispersion de vitesse interne à une échelle de 1 pc est de l'ordre de 4 km s^{-1} . Dans ces conditions, l'échelle limite du régime mince pour une tranche d'épaisseur $\Delta u = 2 \delta u_e$ est donnée par

$$\sigma(l_m) = 2\delta u_e = 2\sqrt{8 \ln 2} \sigma_{th} \quad \text{et donc} \quad \frac{l_m}{1 \text{ pc}} \simeq 1,223 \cdot 10^{-3} \left(\frac{T}{1 \text{ K}} \right)^{3/2} \left(\frac{m}{1 \text{ u.m.a.}} \right)^{-3/2}$$

Si l'on considère le gaz du milieu neutre froid (CNM) à $T = 100$ K, la plus petite échelle mince l_m pour un nuage à une distance de 100 pc est alors environ égale à $42'$, et est donc notablement supérieure à la résolution angulaire à 21 cm du radio interféromètre du Dominion Radio Astrophysical Observatory (DRAO), qui est de l'ordre de la minute d'arc. De plus, si l'on considère la présence de gaz HI plus chaud (Warm Neutral Medium) dont la température est comprise entre $T = 5000$ K et $T = 8000$ K, ou celle de gaz thermiquement instable à $T \sim 1000$ K, l'élargissement thermique plus important augmente la valeur de l'échelle limite et rend la détermination de β_v à partir de la méthode de [Lazarian & Pogosyan, 2000] possible uniquement sur des échelles plus grandes que quelques degrés, du moins pour le HI du voisinage

solaire.

En conclusion, on voit qu'en raison de la résolution limitée de nos simulations, nous ne sommes pas en mesure de confirmer les prédictions de [Lazarian & Pogosyan, 2000], mais nous pouvons d'ores et déjà affirmer que la méthode d'analyse des tranches en vitesse, en tant qu'outil permettant de remonter aux propriétés statistiques du champ de vitesse tridimensionnel, est dans la pratique difficilement applicable aux observations réelles. Il semble, malgré les défauts remarqués au chapitre **XII**, que la méthode fondée sur les centroïdes de vitesse soit mieux adaptée à la détermination du spectre de puissance de la vitesse, en particulier parce qu'elle ne dépend pas de la température du gaz, et qu'elle permet la détermination des statistiques de la vitesse jusqu'à des échelles comparables à la résolution angulaire des observations, tant que les fluctuations de densité restent faibles.

□