

NEUVIÈME TD

19 mai 2020

Les étoiles dont la masse initiale est comprise entre $\sim 8 M_\odot$ et $\sim 30 M_\odot$ peuvent devenir des étoiles à neutrons à la fin de leur vie, en éjectant une partie importante de leur masse au cours du phénomène de supernova. Ces étoiles extrêmement denses peuvent être grossièrement assimilées à un gaz de neutrons dont la pression de dégénérescence¹ s'oppose à l'effondrement gravitationnel². Les masses des étoiles à neutrons sont toutes proches de la masse limite de Chandrasekhar $M_c = 1.457 M_\odot$ calculée au TD sur les naines blanches. Pour les applications, on prendra $M = 1.5 M_\odot$, $R = 10 \text{ km}$ et $T = 10^7 \text{ K}$.

I - Quelques propriétés des étoiles à neutrons

1. Évaluer la masse volumique moyenne de l'étoile à neutrons et la comparer à celles du Soleil et d'une naine blanche (on se reportera aux valeurs numériques du TD correspondant).
2. Rappeler l'expression de l'impulsion de Fermi p_F pour un système de N fermions de spin s enfermés dans un volume V , à $T = 0$. Montrer que les neutrons de l'étoile sont relativistes et que l'approximation de température nulle est parfaitement justifiée.
3. Évaluer l'énergie d'interaction gravitationnelle de l'étoile et son énergie de masse Mc^2 . En faisant le rapport des deux, en déduire que les effets de relativité générale ne peuvent être ignorés. On comparera aux cas du Soleil et d'une naine blanche.

II - Pulsars

Les pulsars sont des objets émettant des ondes radio sous la forme de *pulses* réguliers et très brefs. Ils furent découverts en 1967 par Jocelyn Bell et Antony Hewish, et leur régularité fit un temps croire qu'il s'agissait de signaux d'origine artificielle ("Little Green Men").

1. On considère un astre en rotation, de masse M et de rayon R . Expliquer pourquoi la période P de rotation ne peut être arbitrairement petite. En faisant un bilan des forces sur un élément de masse à la surface de l'astre au niveau de l'équateur, établir l'expression de la période minimale $P_{\min}$. À partir de cette constatation, montrer que si l'on observe un

1. On rappelle que les neutrons sont des fermions de spin $1/2$.

2. En réalité, ce n'est pas la pression de Fermi qui intervient, mais les interactions nucléaires fortes. Le traitement correct de ce problème dépasse largement le niveau du cours et est encore loin de faire l'unanimité à ce jour : la physique de ces états ultra-condensés est très mal connue et impossible à reproduire en laboratoire.

signal de période P attribué à la rotation d'un astre, la densité moyenne de cet astre est nécessairement

$$\bar{\rho} \geq \frac{3\pi}{GP^2}$$

Calculer numériquement cette limite dans le cas du pulsar du Crabe ($P = 0,033$ s). En déduire que les pulsars doivent être des étoiles à neutrons en rotation¹. Qualitativement, comment est modifiée cette limite inférieure à la densité de l'astre lorsqu'on tient compte de l'aplatissement aux pôles ?

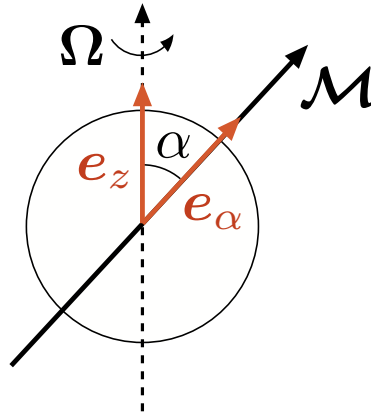
2. Le champ magnétique des étoiles à neutrons est de type dipolaire. La puissance rayonnée du fait de la rotation de ce dipôle magnétique $\mathcal{M}$ est analogue à la formule de Larmor,

$$\mathcal{P}_{\text{rad}} = \frac{\mu_0}{6\pi c^3} \left| \frac{d^2 \mathcal{M}_{\perp}}{dt^2} \right|^2$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide, et $\mathcal{M}_{\perp}$ est la composante de $\mathcal{M}$ perpendiculaire à l'axe de rotation. En assimilant l'étoile à une sphère de rayon R uniformément magnétisée, dont le moment dipolaire est donné par

$$\mathcal{M} = \frac{2\pi}{\mu_0} BR^3 \mathbf{e}_{\alpha},$$

exprimer $\mathcal{P}_{\text{rad}}$ en fonction de B , R , P et α , angle entre l'axe de rotation $\mathbf{e}_z$ et celui du dipôle $\mathbf{e}_{\alpha}$. On commencera par écrire l'équation d'évolution de $\mathcal{M}_{\perp}$ en fonction de la vitesse angulaire de rotation Ω .



3. Évaluer l'énergie cinétique de rotation du pulsar du Crabe en supposant qu'il s'agit d'un astre homogène. Du fait de l'émission dipolaire, cette énergie diminue, et la période P augmente (on supposera la masse et le rayon constants). Établir le lien entre $\mathcal{P}_{\text{rad}}$ et la dérive $\dot{P}$ en fonction de M , R et P . Sachant qu'on mesure $\dot{P} = 10^{-12.4}$ pour ce pulsar, calculer

1. D'autres phénomènes (oscillations de naines blanches ou d'étoiles à neutrons, système binaire d'étoiles à neutrons, etc...) peuvent être évoqués pour expliquer ces pulses, mais aucun ne résiste à l'analyse.

numériquement la puissance rayonnée et en déduire une limite inférieure $B_{\min}$ du champ magnétique à la surface.

4. On fait l'hypothèse que $B \sin \alpha$ ne change pas significativement au cours de l'évolution du pulsar. Établir la loi de variation de la période P au cours du temps en supposant que la rotation était initialement beaucoup plus rapide qu'aujourd'hui. En déduire un âge caractéristique τ_c en fonction de P et $\dot{P}$. Faire l'application numérique dans le cas du pulsar du Crabe, reste de la supernova observée par les chinois en 1054.

5. Dans un diagramme $(\log P, \log \dot{P})$, tracer les courbes représentant un âge caractéristique τ_c donné, celles représentant un champ magnétique minimal $B_{\min}$ donné, et celles représentant une puissance radiative $\mathcal{P}_{\text{rad}}$ donnée. Ce diagramme permet de suivre l'évolution d'un pulsar, à la manière du diagramme de Hertzsprung-Russell pour les étoiles ordinaires.

III - Propagation de l'émission des pulsars

1. Pour nous parvenir, l'émission radio des pulsars doit traverser le milieu interstellaire, qu'on peut assimiler à un plasma diffus de densité électronique n_e . La relation de dispersion pour une onde plane monochromatique se propageant dans ce milieu est donnée par

$$k^2 = \frac{1}{c^2}(\omega^2 - \omega_p^2) \quad \text{avec} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e}} \quad \text{la pulsation plasma.}$$

Calculer la vitesse de phase v_ϕ et la vitesse de groupe v_g d'un paquet d'ondes se propageant dans ce milieu, en fonction de c , ω et ω_p .

2. Calculer numériquement la fréquence plasma ν_p dans le milieu interstellaire, où typiquement $n_e = 0.03 \text{ cm}^{-3}$. À quelle condition l'émission radio du pulsar peut-elle nous parvenir ?

3. En remarquant que la plupart des observations de pulsars se font à des fréquences de l'ordre de plusieurs centaines de MHz, soit pour $\omega \gg \omega_p$, en déduire que le temps d'arrivée d'un pulse (paquet d'ondes) émis par un pulsar à la distance d dépend de la fréquence ν et écrire son écart avec le temps hors dispersion (d/c) sous la forme

$$\delta t(\nu) = \frac{A}{\nu^2} \int_0^d n_e ds$$

où l'intégrale de n_e le long de la ligne de visée est appelée mesure de dispersion (DM). Comment peut-on la mesurer ?

L'émission des pulsars est fortement polarisée linéairement. Si d'autre part le milieu interstellaire que traverse cette radiation est magnétisé, la relation de dispersion dépend de l'état de polarisation circulaire de l'onde :

$$k_\pm^2 = \frac{1}{c^2} \left(\omega^2 - \frac{\omega \omega_p^2}{\omega \pm \omega_c} \right)$$

avec $\omega_c = eb_z/m_e$ la pulsation cyclotron et b_z la composante du champ magnétique le long de la ligne de visée¹.

4. Comment s'écrit le champ électrique $\mathbf{E}$ d'une onde polarisée linéairement, décomposée en ondes circulaires droite (+) et gauche (−)? On prendra comme axes un repère $Oxyz$ avec Oz dirigé vers l'observateur, et on supposera la polarisation initiale le long de Ox . On rappelle que les vecteurs unitaires portant les polarisations circulaires droite et gauche sont donnés par

$$\mathbf{e}_{\pm} = \frac{\mathbf{e}_x \mp i\mathbf{e}_y}{2}$$

On prendra garde que les nombres d'onde sont différents pour les deux polarisations circulaires, à savoir $k_+(\omega)$ et $k_-(\omega)$.

5. En déduire que la traversée du milieu fait tourner l'angle de polarisation de l'onde et donner une approximation de cet angle ψ à la sortie du milieu en supposant que $\omega \gg \omega_c$ et $\omega \gg \omega_p$.

6. Déduire de ce qui précède une méthode approximative de mesure du champ magnétique moyen le long de la ligne de visée $\langle b_z \rangle$.

$h = 6.6260 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$	$k_B = 1.38062 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
$G = 6.670 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$	$1L_{\odot} = 3.826 \cdot 10^{26} \text{ W}$
$c = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$	$1M_{\odot} = 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
$m_n = 1.675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	$1R_{\odot} = 6.9599 \cdot 10^8 \text{ m}$
$m_e = 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	$1 \text{ pc} = 3.085678 \cdot 10^{16} \text{ m}$
$\epsilon_0 = 8.854187 \cdot 10^{-12} \text{ A.s.V}^{-1}.\text{m}^{-1}$	$\mu_0 = 1.256637 \cdot 10^{-6} \text{ V.s.A}^{-1}.\text{m}^{-1}$
$e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	

1. On trouvera une démonstration de cette relation dans tout bon cours de physique des plasmas.