Formation Interuniversitaire de Physique
Option de L3
Ecole Normale Supérieure de Paris

Astrophysique

Nicholas Kaiser
François Levrier

Huitième TD

12 mai 2020

I - Naines blanches : masse de Chandrasekhar

Les naines blanches sont le stade ultime de la vie des étoiles de faible masse, après la fin des réactions thermonucléaires. Formées d'un gaz de noyaux atomiques et d'un gaz d'électrons, ces étoiles ont une masse et une température interne de l'ordre de celles du Soleil, mais un rayon voisin de celui de la Terre [1].
Le gaz d'électrons des naines blanches est un système de fermions, pour lequel le nombre d'occupation moyen d'un état individuel $|\lambda\rangle$ est donné par la statistique de Fermi-Dirac,

$$\overline{N_\lambda} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)} + 1}$$

Dans cette expression, $\beta = 1/(k_B T)$, ε_λ est l'énergie de l'état $|\lambda\rangle$ et μ le potentiel chimique.
Considérant d'autre part une particule de masse m et de spin s enfermée dans un volume V, on peut calculer sa densité d'états $f(\varepsilon)$, définie en notant $f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon$ le nombre d'états microscopiques dont l'énergie est comprise entre ε et $\varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon$. On peut montrer que celle-ci s'écrit, dans le cas non-relativiste, c'est-à-dire lorsque l'énergie ε et l'impulsion p sont liées par $\varepsilon = p^2/(2m)$, comme

$$f(\varepsilon) = \frac{2s+1}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3} V m^{3/2} \varepsilon^{1/2}.$$

Dans le cas relativiste, pour lequel $\varepsilon^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, on a d'autre part [2]

$$f(\varepsilon) = \frac{(2s+1)V}{2\pi^2\hbar^3 c^3} (\varepsilon^2 - m^2c^4)^{1/2} \varepsilon.$$

On peut alors utiliser cette densité d'états, combinée à la statistique de Fermi-Dirac, pour calculer les propriétés d'un gaz de N fermions dans un volume V, à une température T.
À température nulle, chaque état individuel est occupé par un et un seul fermion, depuis le fondamental (ε_0) jusqu'au niveau de plus haute énergie (ε_{F}), qu'on appelle niveau de Fermi. Suivant le nombre N de particules en jeu, ce niveau est plus ou moins haut en énergie par rapport au fondamental. On définit alors l'impulsion de Fermi p_{F} comme étant celle des particules qui se trouvent au niveau de Fermi, et la température de Fermi est définie par la relation $k_B T_{\mathrm{F}} = \varepsilon_{\mathrm{F}} - \varepsilon_0$. On peut montrer [3] que l'on peut faire une approximation de température nulle dès lors que $T \ll T_{\mathrm{F}}$. Inversement, lorsque $T \gg T_F$, le gaz est non dégénéré et peut être décrit par un modèle de gaz parfait classique.

1. Pour les applications, on prendra $M = 2\,10^{30}$ kg, $T = 10^7$ K, $R = 5\,10^6$ m, et on pourra supposer que les noyaux atomiques sont uniquement du ^{12}C, de sorte que $Z = 6$ et $A = 12$.
2. On peut d'ailleurs vérifier que cette seconde expression redonne la première dans le cas où $pc \ll mc^2$.
3. Cf. Diu et al. "Physique Statistique" chapitre VI.

On montre sans difficulté - mais on ne le demande pas - que l'impulsion de Fermi a la même expression dans les cas relativiste et non-relativiste, à savoir

$$p_{\mathrm{F}} = \hbar \left(\frac{6\pi^2}{2s+1} \frac{N}{V} \right)^{1/3}$$

tandis que la température de Fermi s'écrit

$$T_{\mathrm{F}} = \frac{\hbar^2}{2mk_B} \left[\frac{6\pi^2}{2s+1} \frac{N}{V} \right]^{2/3} \quad \text{et} \quad T_{\mathrm{F}} = \frac{mc^2}{k_B} \left[\sqrt{1 + \frac{\hbar^2}{m^2c^2} \left(\frac{6\pi^2}{2s+1} \frac{N}{V} \right)^{2/3}} - 1 \right]$$

respectivement dans les cas non-relativiste et relativiste.

1. Évaluer la masse volumique moyenne de la naine blanche et la comparer à celle du Soleil.

2. Évaluer le nombre N_n de noyaux et celui N_e d'électrons, ainsi que les densités n_n et n_e et les distances moyennes entre particules a_n et a_e correspondantes. Commentaire ?

3. Le gaz d'électrons est décrit par la statistique de Fermi-Dirac. Évaluer l'impulsion de Fermi p_{F} et la comparer à $m_e c$, où m_e est la masse de l'électron. Les électrons au niveau de Fermi sont-ils relativistes ? Évaluer la température de Fermi. Conclusion ?

4. En supposant ici que les noyaux sont aussi des fermions, évaluer leur impulsion de Fermi. Sont-ils relativistes ? Évaluer leur température de Fermi et conclure. On admettra que la même conclusion est valable si les noyaux sont des bosons.

Un calcul statistique semblable à celui de la pression cinétique d'un gaz classique montre que la pression du gaz d'électrons - isotrope et à température nulle - s'écrit sous la forme

$$P_e = \frac{1}{3V} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_{\mathrm{F}}} p(\varepsilon) v(\varepsilon) f(\varepsilon) \mathrm{d}\varepsilon \quad \text{avec } p \text{ l'impulsion et } v = \frac{p}{\gamma m_e} \text{ la vitesse.}$$

On rappelle l'expression du facteur de Lorentz

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

5. Montrer que la pression du gaz d'électrons s'écrit

$$P_e = \frac{m_e^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3} F\left(\frac{p_{\mathrm{F}}}{m_e c} \right) \quad \text{avec} \quad F(x) = \int_0^x \frac{u^4}{\sqrt{1+u^2}} \mathrm{d}u.$$

On posera $u = p/(m_e c)$ à partir de l'expression générale de P_e pour aboutir à cette forme.

6. On admet que $F(x)$ a les comportements asymptotiques suivants :

$$F(x) \sim \frac{x^5}{5} \text{ pour } x \ll 1 \text{ et } F(x) \sim \frac{x^4}{4} \text{ pour } x \gg 1.$$

À quoi correspondent ces régimes ? Montrer que dans ces deux limites, la pression électronique prend la forme $P_e = K_\alpha \rho^\alpha$, où ρ est la masse volumique, α un exposant et K_α une constante, qu'on explicitera en fonction de $\hbar$, m_e, m_p, c et de la fraction électronique $Y_e = Z/A$. On parle d'équation d'état *polytropique* lorsque $P \propto \rho^\alpha$. Comparer P_e à la pression P_n des noyaux et à la pression de radiation P_r à la température T. Conclusion ?

7. Considérant une naine blanche homogène de masse M et de rayon R, on peut définir une "pression gravitationnelle" $P_g < 0$ comme dérivée de l'énergie potentielle gravitationnelle :

$$P_g = -\frac{\partial E_g}{\partial V} \quad \text{avec} \quad E_g = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

En écrivant l'équilibre de pression dans l'étoile, montrer que dans le domaine non relativiste on a $RM^{1/3} = C$ où C est une constante qu'on explicitera, et que dans le domaine ultra-relativisite, on est amené à définir une masse M_0 indépendante du rayon R, qu'on calculera numériquement. En réécrivant $P + P_g$ en fonction de M et M_0, proposer une interprétation physique.

8. En réalité, les équations d'état polytropiques $P_e = K_\alpha \rho^\alpha$ obtenues à la question **6.** suggèrent que l'approximation d'un astre de densité uniforme est incorrecte. Le profil de densité d'un astre sphérique au sein duquel la gravitation est équilibrée par une pression polytropique est solution de *l'équation de Lane-Emden*

$$\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(u^2 \frac{\mathrm{d}\psi_\alpha}{\mathrm{d}u}\right) = -\psi_\alpha^n \quad \text{avec} \quad n = \frac{1}{\alpha - 1} \qquad \psi_\alpha = \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right)^{\alpha-1} \qquad u = \frac{r}{r_\alpha}$$

où ρ_c est la densité centrale, et la longueur caractéristique r_α est donnée par

$$r_\alpha = \sqrt{\frac{\alpha K_\alpha \rho_c^{\alpha-2}}{4\pi G(\alpha - 1)}}$$

On admet que pour $\alpha > 1.2$, la fonction $\psi_\alpha(u)$ admet un premier zéro noté x_α. Calculer le rayon R_α de l'étoile et sa masse M_α. En déduire une relation entre M_α et R_α. Quelle propriété retrouve-t-on dans le cas ultra-relativiste ? Calculer la masse correspondante, qu'on appelle masse de Chandrasekhar M_c, sachant que $x_{4/3} = 6.897$ et $\psi'_{4/3}(x_{4/3}) = -0.0424279$, et la comparer à M_0 trouvée plus haut.

9. L'étoile émet un rayonnement, elle se refroidit donc. Quel effet ce refroidissement a-t-il sur l'équilibre de l'étoile ?