

THERMODYNAMIQUE - TD 6

Phénomènes de transport

I - Modèle de la cave

On cherche à déterminer la distribution de température dans le sol ($z \geq 0$) en fonction de la température de surface ($z = 0$). On suppose que cette dernière oscille de façon sinusoïdale autour d'une valeur moyenne T_0 , avec une pulsation ω .

1. Ecrire l'équation de la chaleur. Par un raisonnement dimensionnel, donner l'échelle caractéristique du problème.
2. Résoudre cette équation en utilisant une représentation complexe.
3. Interpréter le résultat obtenu en termes d'atténuation, de longueur d'onde et de vitesse de phase. Ce phénomène vous évoque-t-il d'autres situations physiques?
4. Calculer la profondeur de pénétration de l'onde de chaleur dans le cas des fluctuations journalières et dans celui des fluctuations annuelles. On utilisera les valeurs suivantes:

$$\kappa = 0,4 \text{ J.m}^{-1}.\text{s}^{-1}.\text{K}^{-1}, \quad C = 800 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} \quad \text{et} \quad \rho = 3.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$$

II - Température de contact

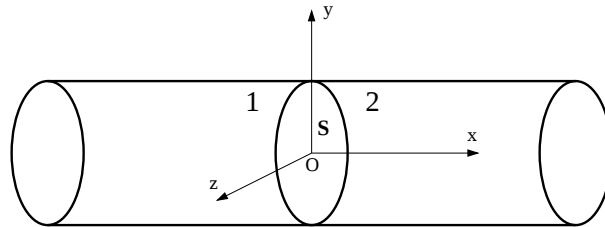
1. On considère un barreau semi-infini occupant le demi-espace $x \geq 0$, à la température initiale T_i . Il est isolé sur sa surface latérale. A l'instant $t = 0$, on met son extrémité $x = 0$ en contact avec un thermostat à température T_0 et on l'y laisse pour tout $t \geq 0$. Le barreau a une conductivité thermique κ , une capacité calorifique massique C et une masse volumique ρ . On note D le coefficient de diffusion thermique. Ecrire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la distribution de température dans le barreau. Montrer, en utilisant un argument dimensionnel, que la solution de cette équation est fonction d'une variable réduite qu'on explicitera. En déduire l'expression de la distribution de température. Déterminer la densité de courant de chaleur en $x = 0$ à l'instant t .
2. Utiliser les résultats précédents pour déterminer l'évolution de la température dans un barreau où la distribution initiale de température est quelconque.
3. On considère maintenant deux barreaux semi-infinis caractérisés par les coefficients κ_i , C_i et ρ_i , et les températures initiales T_i avec $i \in \{1, 2\}$. A l'instant $t = 0$ on met les deux barreaux en contact par une extrémité en $x = 0$. En supposant qu'il existe une solution pour laquelle la température de contact $T_0 = T(x = 0)$ reste constante au cours du temps et en utilisant les résultats de la première question, déterminer la distribution de température dans les deux barreaux. Calculer la densité de courant de chaleur en $x = 0$ dans les deux matériaux et en déduire T_0 . En application numérique, on calculera la température de contact entre la main et un matériau à 20 °C, dans le cas de l'eau, du bois, et de l'aluminium. On assimilera

le corps humain à de l'eau à 37 °C. On donne les coefficients suivants

eau	$D = 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	$\kappa = 0,63 \text{ J} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
bois	$D = 3 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	$\kappa = 0,13 \text{ J} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
aluminium	$D = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	$\kappa = 236 \text{ J} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

III - Diffusion moléculaire et libre parcours moyen

On considère une conduite contenant un gaz dont toutes les molécules ont la même vitesse en module, égale à $\bar{v}$, et ne pouvant se déplacer que le long d'une des trois directions Ox , Oy ou Oz , comme indiqué sur la figure. On note S une section droite de la conduite, la séparant en deux parties notées 1 et 2.



1. Sachant que la diffusion résulte d'un excédent de molécules dans la partie 1 par rapport à la partie 2, faire le bilan de matière à la traversée de S . En déduire une expression de la densité de courant de particules. En comparant avec la loi de Fick, exprimer le coefficient de diffusion D en fonction de $\bar{v}$ et du libre parcours moyen l . Donner un ordre de grandeur de D dans le cas d'un gaz parfait dans les conditions usuelles.
3. On considère maintenant la diffusion de molécules "marquées" au sein du gaz, à partir de l'abscisse $x = 0$. A partir de la loi de conservation de ces molécules et de la loi de Fick, écrire l'équation de la diffusion.
4. Etudier l'évolution de l'étalement des molécules marquées - qu'on définira - en fonction du temps. Evaluer le temps nécessaire pour que la distribution initiale soit étalée sur 1 cm. Sachant que le coefficient de diffusion dans un liquide est environ 10^4 fois plus faible que dans un gaz, expliquer pourquoi il est conseillé d'agiter son café quand on y verse du sucre.