Préparation à l'Agrégation de Sciences Physiques — François Levrier
Centre de Montrouge

Thermodynamique - Corrigé du TD 6

Phénomènes de transport

I - Modèle de la cave

1. On considère un élément de volume $\mathrm{d}\tau$ dans le sol. Son énergie interne varie pendant l'intervalle de temps $\mathrm{d}t$ selon le premier principe de la thermodynamique, $\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$. Pour simplifier, on suppose que le sol est indéformable, de sorte que le travail des forces de pression est nul. Comme il n'y a *a priori* pas d'autres forces s'exercant sur le système, le premier principe se réduit à $\mathrm{d}U = \delta Q$. La chaleur reçue par l'élément de volume, en l'absence de source de chaleur interne, telle que la radioactivité naturelle du sol par exemple, est alors exprimée en fonction du vecteur densité de courant de chaleur $\mathbf{J}_Q$ par

$$\frac{\delta Q}{\mathrm{d}t} = -\iint \mathbf{J}_Q.\mathrm{d}\mathbf{S},$$

l'intégration portant sur la surface délimitant le volume considéré, et le vecteur $\mathrm{d}\mathbf{S}$ étant porté par la normale externe. On en déduit, en introduisant l'énergie interne volumique u, puis la capacité calorifique massique C et la masse volumique ρ du sol,

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\tau = C\rho\frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}\tau = \frac{\delta Q}{\mathrm{d}t} = -\iint \mathbf{J}_Q.\mathrm{d}\mathbf{S} = -\mathrm{div}(\mathbf{J}_Q)\mathrm{d}\tau,$$

où l'on a utilisé le théorème de Green-Ostrogradsky et le fait que $\mathrm{d}\tau$ est un volume élémentaire. La loi de Fourier permet de relier $\mathbf{J}_Q$ au gradient de la température $T(\mathbf{r}, t)$ et on a donc

$$C\rho\frac{\partial T}{\partial t} = -\mathrm{div}[-\kappa\mathbf{grad}(T)] = \kappa\nabla^2 T,$$

où ∇^2 est l'opérateur Laplacien. A une dimension, l'équation de la chaleur s'écrit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad \text{avec le coefficient de diffusion} \quad D = \frac{\kappa}{\rho C}.$$

L'équation aux dimensions issue de l'équation de la chaleur s'écrit

$$[T][t]^{-1} = [D][T][L]^{-2} \quad \Rightarrow \quad [L] = [D]^{1/2}[t]^{1/2}.$$

Par conséquent, si on se donne une échelle de temps t_0, il apparaît naturellement une échelle de longueur z_0 définie par $z_0 = \sqrt{Dt_0}$.

2. Le problème posé est celui de la propagation à l'intérieur du sol d'une onde thermique imposée par l'extérieur, en $z = 0$, par exemple par l'effet des fluctuations journalières

d'éclairement. La forme la plus naturelle pour ces fluctuations est une sinusoïde de pulsation ω, autour de la valeur moyenne T_0. Naturellement, on recherche alors la distribution de température sous la forme complexe suivante,

$$T^*(z,t) = T_0 + F(z)\exp(i\omega t),$$

où $F(z)$ est une fonction éventuellement complexe de la profondeur z. L'équation de la chaleur s'écrivant alors $i\omega F(z)\exp(i\omega t) = DF''(z)\exp(i\omega t)$, la fonction F doit vérifier

$$F'' - \frac{i\omega}{D}F = 0 \quad \Rightarrow \quad F(z) = A\exp\left[(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z\right] + B\exp\left[-(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z\right],$$

où A et B sont des constantes. La température devant rester finie pour $z \to \infty$, on en déduit que $A = 0$, et par conséquent, en notant ΔT l'amplitude des fluctuations à la surface,

$$T^*(z,t) = T_0 + \Delta T\exp\left[-(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z\right]\exp(i\omega t).$$

En repassant en notation réelle, on obtient la forme de la distribution de température,

$$T(z,t) = T_0 + \Delta T\exp\left(-\frac{z}{z_0}\right)\cos\left(\omega t - \frac{z}{z_0}\right) \quad \text{avec} \quad z_0 = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}.$$

3. On voit que l'onde thermique se propage vers l'intérieur du sol ($z > 0$) avec une amplitude décroissant exponentiellement, l'échelle caractéristique de l'atténuation étant z_0, qui est, au facteur numérique près, l'échelle trouvée à la première question, puisque l'échelle de temps naturelle est précisément l'inverse de la pulsation. Le nombre d'onde de la propagation est égal à $k = 1/z_0$ et la longueur d'onde est donc $\lambda = 2\pi z_0$. La propagation se fait à la vitesse de phase $v_\phi = \omega/k = \omega z_0 = \sqrt{2D\omega}$.
On peut comparer ce phénomène à l'effet de peau en électromagnétisme. Il y a là aussi une pénétration limitée de l'onde de courant à l'intérieur du matériau. Cependant, dans le cas de l'effet de peau, la profondeur de pénétration diminue lorsque la conductivité électrique augmente, alors qu'elle augmente avec la conductivité thermique.
4. La profondeur de pénétration est donnée, en fonction de la période du forçage et des coefficients donnés relatifs au sol, est fournie par la relation suivante,

$$z_0 = \sqrt{\frac{2D}{\omega}} = \sqrt{\frac{DT}{\pi}} = \sqrt{\frac{\kappa T}{\pi\rho C}}.$$

Pour les fluctuations journalières, $T = 86400$ s, d'où $z_0 \simeq 6,8$ cm, et pour les fluctuations annuelles ($T \simeq 3,15.10^7$ s) on a $z_0 \simeq 1,3$ m. Ce sont ces chiffres qui justifient d'une part qu'on conserve des produits à la cave pour leur éviter les variations rapides de température qui pourraient les dégrader, et d'autre part qu'on enterre les canalisations pour éviter qu'elles éclatent en hiver .

II - Température de contact

1. L'équation de la chaleur appliquée à la distribution de température dans le barreau supposé unidimensionnel s'écrit naturellement

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad D = \frac{\kappa}{\rho C}.$$

La dimension du coefficient de diffusion D étant $[D] = [L]^2[t]^{-1}$, il convient d'introduire la variable réduite y définie par le rapport de x à l'échelle caractéristique au temps t, soit

$$y = \frac{x}{\sqrt{Dt}} \quad \text{et de faire le changement de variables} \quad (x,t) \to (y,t).$$

La fonction $T(x,t)$ recherchée est alors égale à une fonction $\mathcal{T}(y,t)$. On calcule alors les dérivées partielles de T en fonction de celles de $\mathcal{T}$, sachant que $T(x,t) = \mathcal{T}[y(x,t),t]$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{Dt}}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{Dt}\frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial y^2} \quad \text{d'une part,}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} = -\frac{y}{2t}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} \quad \text{d'autre part.}$$

Insérant ces expressions dans l'équation de la chaleur, il vient

$$t\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial y^2} + \frac{y}{2}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y}.$$

On cherche alors une solution "stationnaire" dans le sens où elle ne dépend de t qu'au travers de y, c'est-à-dire, plus précisément, qu'on recherche une solution autosimilaire ne dépendant que de la variable sans dimension. Dans ce cas, $\mathcal{T}$ est telle que

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{T}}{\mathrm{d}y^2} + \frac{y}{2}\frac{\mathrm{d}\mathcal{T}}{\mathrm{d}y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\mathcal{T}}{\mathrm{d}y} = A\exp\left(-\frac{y^2}{4}\right).$$

D'où l'expression générale de $\mathcal{T}(y)$, donnée par la fonction d'erreur Erf,

$$\mathcal{T}(y) = \mathcal{T}(0) + \sqrt{\pi}A\mathrm{Erf}\left[\frac{y}{2}\right] \quad \text{avec} \quad \mathrm{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

La distribution de température $T(x,t)$ dans le barreau est alors

$$T(x,t) = T(0,t) + \sqrt{\pi}A\mathrm{Erf}\left[\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right].$$

Les conditions aux limites sont d'une part $T(0,t) = T_0$ pour tout $t > 0$ en raison du contact avec le thermostat, et d'autre part $T(\infty,t) = T_i$ puisque le choc thermique se propage à vitesse finie. Donc, comme la fonction d'erreur tend vers 1 à l'infini, on a

$$T_i = T_0 + \sqrt{\pi}A \quad \text{et donc} \quad T(x,t) = T_0 + (T_i - T_0)\mathrm{Erf}\left[\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right].$$

Le vecteur densité de courant de chaleur est donné par la loi de Fourier

$$\mathbf{J}_Q = -\kappa\mathbf{grad}(T) = -\kappa\frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{e}_x = -\kappa\frac{1}{\sqrt{Dt}}\frac{\mathrm{d}\mathcal{T}}{\mathrm{d}y}\mathbf{e}_x = -\kappa\frac{T_i - T_0}{\sqrt{\pi Dt}}\exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right]\mathbf{e}_x.$$

En $x = 0$, cette expression devient tout simplement

$$\mathbf{J}_Q(0) = -\kappa \frac{T_i - T_0}{\sqrt{\pi D t}} \mathbf{e}_x.$$

Par conséquent, si $T_i > T_0$, le flux est dirigé vers les x décroissant, c'est-à-dire que le barreau perd de la chaleur au profit du thermostat, comme il est naturel puisque sa température initale est supérieure à celle de ce dernier. A l'inverse, si $T_i < T_0$, le flux de chaleur est positif, ce qui traduit le transfert de chaleur du thermostat vers le barreau.

2. Deux remarques préliminaires s'imposent. Premièrement, si une fonction $T(x,t)$ est solution de l'équation de la chaleur, alors ses dérivées partielles premières par rapport à t et x le sont aussi. En effet, il est possible d'intervertir l'ordre des dérivations:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{solution.}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{solution.}$$

D'autre part, l'équation de la chaleur est une équation linéaire, et on a donc un théorème de superposition. Si T_1 et T_2 sont deux solutions, la combinaison linéaire $\lambda T_1 + \mu T_2$ l'est aussi,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda T_1 + \mu T_2\right) = \lambda \frac{\partial T_1}{\partial t} + \mu \frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda D \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \mu D \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\lambda T_1 + \mu T_2\right).$$

Donc, d'après la question précédente, la fonction

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right]$$

est solution de l'équation de la chaleur. Or, lorsque $t \to 0$, cette fonction s'approche d'une distribution de Dirac $\delta(x)$, ce qu'on interpréte physiquement en disant qu'un point chaud parfaitement localisé en $x = 0$ provoque une augmentation de température le long de la barre selon la distribution $f(x,t)$. Dès lors, comme une distribution initiale quelconque de température $T_i(x)$ peut s'écrire comme une superposition de distributions de Dirac, l'évolution de la température dans un barreau est donnée par la forme générale

$$T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \int_{-\infty}^{\infty} T_i(x_0) \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}\right] \mathrm{d}x_0.$$

3. Dans le cas considéré ici de deux barreaux mis en contact à l'instant $t = 0$ par leur extrémité en $x = 0$, on cherche une solution particulière telle $T(0,t)$ soit une constante, égale à T_0. Dans ce cas, chaque barreau se comporte comme dans la première question,

$$T_1(x,t) = T_0 + (T_1^0 - T_0)\mathrm{Erf}\left[\frac{-x}{2\sqrt{Dt}}\right] \quad \text{et} \quad T_2(x,t) = T_0 + (T_2^0 - T_0)\mathrm{Erf}\left[\frac{x}{2\sqrt{D_2 t}}\right],$$

en remarquant qu'on a pris $-x = |x|$ comme argument de la fonction Erf pour le barreau situé aux $x \leqslant 0$. T_1^0 et T_2^0 sont les températures initiales respectives des deux barreaux.

Pour que la propriété $T(0,t) = \text{Cte}$ soit valable, il ne faut pas qu'il y ait accumulation ni déperdition de chaleur à l'interface. En conséquence, on doit avoir égalité des vecteurs densité de flux de chaleur dans l'un et l'autre barreau,

$$\mathbf{J}_Q^{(1)}(0) = \mathbf{J}_Q^{(2)}(0) \quad \text{soit} \quad \kappa_1 \frac{T_1^0 - T_0}{\sqrt{\pi D_1 t}} = -\kappa_2 \frac{T_2^0 - T_0}{\sqrt{\pi D_2 t}},$$

en prenant bien garde que, le sens des axes choisis dans les deux matériaux étant différents, il convient de changer le signe d'un des deux membres. Celà revient en fait à la dérivation de $-x$ dans l'argument de $T_1(x,t)$. On en déduit alors sans difficulté la température T_0, dite température de contact,

$$T_0 = \frac{b_1 T_1^0 + b_2 T_2^0}{b_1 + b_2} \quad \text{avec} \quad b_1 = \frac{\kappa_1}{\sqrt{D_1}} \quad \text{et} \quad b_2 = \frac{\kappa_2}{\sqrt{D_2}}.$$

Les quantités b_i sont appelées effusivités thermiques. Avec les valeurs numériques données, on trouve ainsi $28,5$ °C pour l'eau, $34,8$ °C pour le bois, et $24,2$ °C pour l'aluminium. On explique ainsi la sensation de froid au toucher des métaux, par exemple.

III - Diffusion moléculaire et libre parcours moyen

1. Le courant de particules à la traversée de la section S située à l'abscisse x est la somme algébrique du courant de particules allant de 1 vers 2 et du courant de particules allant de 2 vers 1. Considérant un intervalle de temps $\mathrm{d}t$ entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$, le nombre de particules traversant S dans le sens $1 \to 2$ est égal au nombre de particules contenues à l'instant t dans le cylindre de volume $S\overline{v}\mathrm{d}t$ et de vitesse $\mathbf{v} = \overline{v}\mathbf{e}_x$. Les particules dans ce cylindre n'ont en moyenne pas subi de choc depuis la position $x - l$, elles arrivent donc en x avec la densité qu'elles ont en $x - l$. Le nombre de particules allant de 1 vers 2 est donc

$$\mathrm{d}N_{1\to 2} = \frac{1}{6} n(x-l) S\overline{v}\mathrm{d}t \quad \text{et pareillement} \quad \mathrm{d}N_{2\to 1} = \frac{1}{6} n(x+l) S\overline{v}\mathrm{d}t.$$

On en déduit que le vecteur densité de courant de particules $\mathbf{J}_N$ est donné par

$$\mathbf{J}_N = \frac{\mathrm{d}N_{1\to 2} - \mathrm{d}N_{2\to 1}}{S\mathrm{d}t}\mathbf{e}_x = \frac{\overline{v}}{6}\left[n(x-l) - n(x+l)\right]\mathbf{e}_x \simeq -\frac{\overline{v}l}{3}\frac{\partial n}{\partial x}\mathbf{e}_x.$$

On retrouve donc la loi de Fick à l'approximation linéaire, avec un coefficient de diffusion

$$D = \frac{\overline{v}l}{3}.$$

Dans le cas du gaz parfait, on a alors, en fonction des paramètres accessibles

$$l = \frac{1}{n\sigma} = \frac{kT}{p\sigma} \quad \text{et} \quad \overline{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad \text{donc} \quad D = \sqrt{\frac{8}{9\pi}}\frac{(RT)^{3/2}}{p\sigma\mathcal{N}\sqrt{M}}.$$

Pour l'air dans les conditions usuelles, on a approximativement $D \simeq 0,1\ \mathrm{cm}^2.\mathrm{s}^{-1}$.
2. La loi de conservation du nombre de particules, associée à la loi de Fick, permet de montrer que la densité numérique de particules suit une équation aux dérivées partielles.

En effet, si l'on considère un élément de volume $\mathrm{d}\tau$ centré sur la position $\mathbf{r}$, le nombre $N(\mathbf{r})$ de particules qu'il contient varie entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$ du fait des échanges à travers la surface qui le délimite,

$$\frac{\mathrm{d}N(\mathbf{r})}{\mathrm{d}t} = -\iint \mathbf{J}_N.\mathrm{d}\mathbf{S} = -\mathrm{div}(\mathbf{J}_N)\mathrm{d}\tau \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n.$$

A une dimension, cette équation - équation de la diffusion - devient

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}.$$

3. On peut déjà vérifier que le nombre total N de particules est conservé,

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int n(x,t)\mathrm{d}x = \int \frac{\partial n}{\partial t}\mathrm{d}x = \int D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}\mathrm{d}x = D\left[\frac{\partial n}{\partial x}(+\infty) - \frac{\partial n}{\partial x}(-\infty)\right] = 0.$$

De même, on peut calculer l'évolution avec le temps de la position moyenne des particules, laquelle est naturellement définie par

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\int xn(x,t)\mathrm{d}x.$$

En procédant de la même manière que pour la conservation de N, on montre que

$$\frac{\mathrm{d}\overline{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int xn(x,t)\mathrm{d}x = \frac{1}{N}\int x\frac{\partial n}{\partial t}\mathrm{d}x = \frac{D}{N}\int x\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}\mathrm{d}x,$$

qu'on intègre alors par parties

$$\frac{\mathrm{d}\overline{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{D}{N}\int x\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}\mathrm{d}x = \frac{D}{N}\left[x\frac{\partial n}{\partial x} - n\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

la densité de particules à l'infini étant nulle ainsi que toutes ses dérivées. Finalement, la mesure de l'étalement Δx des particules passe par le calcul du moment d'ordre 2,

$$E = (\Delta x)^2 = \overline{x^2} = \frac{1}{N}\int x^2 n(x,t)\mathrm{d}x.$$

Au cours du temps, l'évolution de E est donnée par la relation

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int x^2 n(x,t)\mathrm{d}x = \frac{1}{N}\int x^2\frac{\partial n}{\partial t}\mathrm{d}x = \frac{D}{N}\int x^2\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}\mathrm{d}x.$$

Par une succession de deux intégration par parties, on obtient sans problème

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 2D = \mathrm{Cte} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta x = \sqrt{2Dt}.$$

L'étalement est donc proportionnel à la racine carrée du temps, propriété caractéristique des marches au hasard. Si on se place dans un gaz, le temps nécessaire pour que $\Delta x \simeq 1$ cm est de l'ordre de 5 s. En revanche, dans un liquide, le coefficient de diffusion est environ 10^4 fois plus faible que dans un gaz, et le temps d'étalement est donc 10^4 fois plus grand, de l'ordre de 14 heures. C'est en fait la convection qui est le "processus de transport" le plus efficace. Une illustration frappante de la lenteur de la diffusion seule est l'expérience de Kelvin: il y a plus d'un siècle qu'il a placé une solution de cuivre (II) surmontée d'eau pure dans un long tube vertical. De nos jours, la solution n'est toujours pas uniformément colorée.