Formation Interuniversitaire de Physique
Option de L3
Ecole Normale Supérieure de Paris

Astrophysique

Nicholas Kaiser
François Levrier

Sixième TD

28 avril 2020

I - Coefficients d'Einstein et transfert

Les raies spectrales, observées en émission ou en absorption, sont liées aux transitions entre deux niveaux discrets dans un atome ou une molécule. Ces niveaux ne sont pas infiniment fins, de sorte que la raie est élargie [1], avec un profil $\phi(\nu)$ centré sur $\nu_0 = \Delta E/h$, avec $\Delta E > 0$ l'écart en énergie entre les niveaux. La fonction ϕ est normalisée, c'est-à-dire que

$$\int_0^\infty \phi(\nu)\mathrm{d}\nu = 1.$$

On considère un système à deux niveaux l et u, d'énergies E_l et $E_u = E_l + \Delta E$ et de poids statistiques (nombre de sous-niveaux) g_l et g_u. On note n_l et n_u les populations (nombre de particules par unité de volume) de chacun des deux niveaux. La variation de la population du niveau inférieur est donnée par la combinaison des processus d'émission spontanée, d'émission induite et d'absorption :

$$\frac{\mathrm{d}n_l}{\mathrm{d}t} = A_{ul}n_u + B_{ul}n_u\overline{u} - B_{lu}n_l\overline{u} \quad \text{avec} \quad \overline{u} = \int_0^\infty u_\nu \phi(\nu)\mathrm{d}\nu$$

Cette quantité $\overline{u}$ est la densité d'énergie du rayonnement moyennée sur le profil de la raie. On rappelle que la densité spectrale et volumique du rayonnement est

$$u_\nu = \frac{1}{c}\int I_\nu \mathrm{d}\Omega.$$

Les coefficients d'Einstein A_{ul}, B_{ul} et B_{lu} sont liés entre eux par les *relations d'Einstein* :

$$\frac{A_{ul}}{B_{ul}} = \frac{8\pi h\nu_0^3}{c^3} \qquad \text{et} \qquad g_u B_{ul} = g_l B_{lu}.$$

Comme une transition radiative $u \leftrightarrow l$ s'accompagne de l'émission ou de l'absorption d'un photon, on peut relier cette variation $\mathrm{d}n_l/\mathrm{d}t$ à la variation de l'intensité spécifique I_ν le long du rayon lumineux repéré par une abscisse s, c'est-à-dire à l'équation du transfert

$$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}s} = j_\nu - \kappa_\nu I_\nu$$

1. Cet élargissement a plusieurs causes : largeur naturelle liée au temps de vie sur le niveau supérieur, qui peut être altéré par les collisions ; effet Doppler lié à l'agitation thermique, à la turbulence, ou à des mouvements d'ensemble à grande échelle ; décalage vers le rouge dû à un potentiel gravitationnel intense...

où j_ν est l'émissivité et κ_ν est le coefficient d'absorption. On montre alors (voir le corrigé) que ceux-ci s'écrivent, en fonction des coefficients d'Einstein, comme

$$j_\nu = A_{ul} n_u \frac{h\nu}{4\pi}\phi(\nu) \quad \text{et} \quad \kappa_\nu = \frac{h\nu}{c}\phi(\nu)\left(B_{lu}n_l - B_{ul}n_u\right)$$

1. Exprimer la fonction source $S_\nu = j_\nu/\kappa_\nu$ sous la forme d'une fonction de Planck $B_{\nu_0}(T_x)$, en définissant la température T_x, appelée température d'excitation. Réécrire alors le coefficient d'absorption monochromatique dans la raie, κ_ν, en fonction de A_{ul}, n_l, g_u, g_l et T_x.

2. Il arrive que $T_x < 0$. Dans quelles conditions ? Quel en est l'effet sur le rayonnement ?

II - Mesure de la masse de gaz d'hydrogène d'une galaxie

La raie de transition hyperfine à 21 cm de longueur d'onde ($\nu_0 = 1420.405751\,\mathrm{MHz}$) de l'hydrogène atomique neutre (HI) est un traceur puissant de l'espèce la plus abondante dans l'Univers. Elle se forme lorsque les spins du proton et de l'électron passent d'un état parallèle ($g_u = 3$) à un état antiparallèle ($g_l = 1$), de moindre énergie. C'est une transition fortement interdite[1] ($A_{ul} = 2.85\ 10^{-15}\ \mathrm{s}^{-1}$), mais la quantité d'hydrogène sur la ligne de visée est si grande, et les densités du gaz interstellaire si faibles, qu'elle est parfaitement observable. On représente ci-après le signal de cette raie en provenance de la galaxie UGC11707. L'unité de densité spectrale de flux F_ν utilisée est le Jansky : 1 Jy=10^{-26} W.m^{-2}.Hz^{-1}. On rappelle que cette quantité est définie à partir de l'intensité spécifique comme

$$F_\nu = \int I_\nu \cos\theta \mathrm{d}\Omega.$$

1. Quelle est la taille caractéristique du lobe du radiotélescope de 140 pieds à cette fréquence ? Commenter, sachant que la taille du disque de gaz HI de UGC11707 est de 8 minutes d'arc dans sa plus grande dimension.

2. Calculer $x = h\nu_0/kT$, sachant que les températures cinétiques T typiques du milieu atomique neutre sont de l'ordre de 50 à 10^4 K. Quelle approximation est-on en droit de faire dans ce domaine de fréquences ?

3. On suppose que le gaz HI est thermalisé, de sorte que la température cinétique est égale à la température d'excitation de la transition hyperfine, qu'on nomme dans ce cas précis température de spin et qu'on note T_s. Que vaut le rapport des populations n_u/n_l ? En déduire une expression approchée du coefficient d'absorption monochromatique κ_ν faisant intervenir la densité totale des atomes d'hydrogène neutre n_{H}, puis, en supposant que le milieu est homogène, montrer que la profondeur optique monochromatique τ_ν s'écrit

$$\tau_\nu \equiv \int \kappa_\nu \mathrm{d}s = \frac{3c^2 h\nu}{32\pi\nu_0^2 kT_s} A_{ul} N_{\mathrm{H}} \phi(\nu),$$

1. C'est-à-dire que, laissé à lui-même, sans interaction, un atome d'hydrogène placé dans le niveau u met en moyenne un temps très long $1/A_{ul} \simeq 3 \times 10^{14}\,\mathrm{s} \simeq 10^7$ ans à se désexciter.

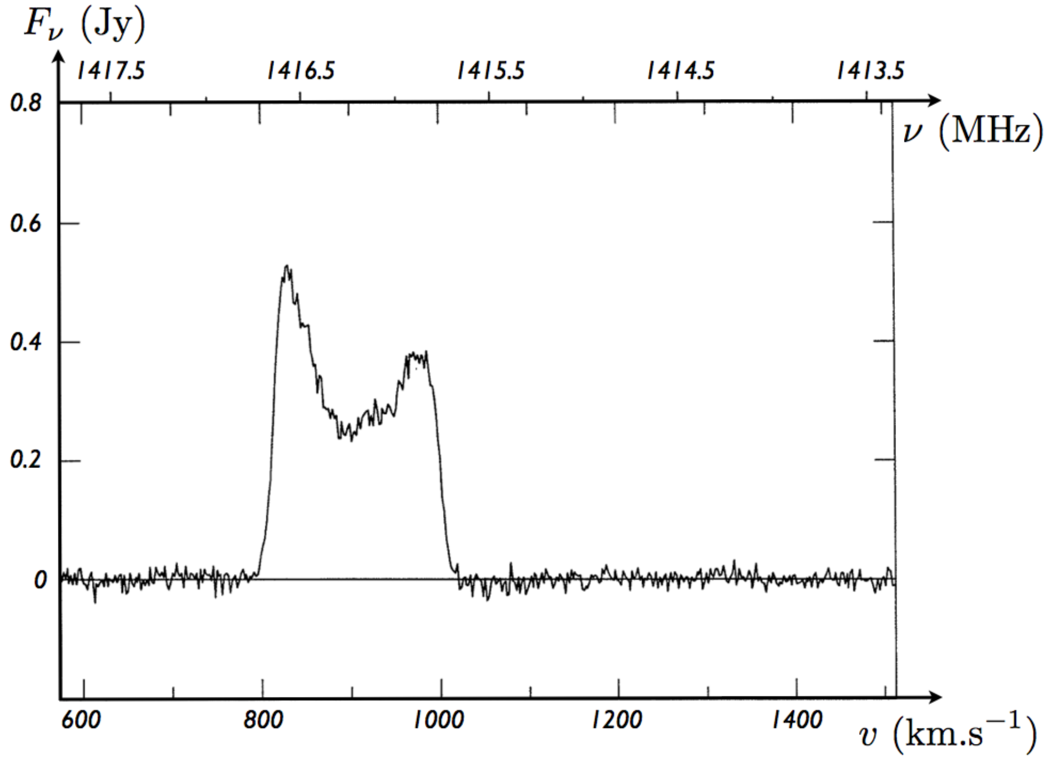

FIGURE 2.1 – Signal HI observé en direction de la galaxie UGC11707 avec le radiotélescope de 140 pieds (43 m de diamètre) du NRAO à Green Bank (Virginie Occidentale).

où $N_{\rm H}$ est la densité de colonne[2] d'hydrogène atomique neutre. On rappelle que τ_ν est l'intégrale de κ_ν sur la ligne de visée.

4. On définit la température de brillance $T_b(\nu)$ par $I_\nu = B_\nu[T_b(\nu)]$, c'est-à-dire comme la température du corps noir qui émet la même intensité spécifique à la fréquence considérée. La solution générale de l'équation du transfert est donnée par

$$I_\nu = I_\nu^0 e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu e^{-\tau'} \mathrm{d}\tau'$$

où S_ν est la fonction source et I_ν^0 la radiation incidente à l'arrière du nuage de gaz HI. En supposant que celle-ci est nulle, que le nuage est homogène, et que la profondeur optique

2. Intégrale de la densité sur la ligne de visée, qui a donc la dimension de l'inverse d'une surface.

dans la raie est faible ($\tau_\nu \ll 1$), montrer que cette solution mène à la relation

$$\frac{1}{\exp\left[\dfrac{h\nu}{kT_b(\nu)}\right]-1} \simeq \frac{3c^2}{32\pi\nu^2} A_{ul} N_{\mathrm{H}} \phi(\nu).$$

5. Quelle est la largeur en fréquence $\delta\nu$ du profil de l'émission HI de UGC11707 ? En déduire l'ordre de grandeur de la fonction ϕ. Sachant que la densité de colonne typique de l'hydrogène atomique neutre dans UGC11707 est $N_{\mathrm{H}} = 10^{25}$ m^{-2}, montrer que l'on peut appliquer l'approximation de Rayleigh-Jeans à la température de brillance $T_b(\nu)$. En déduire l'expression de la densité de colonne du gaz HI en fonction de $T_b(\nu)$. On fera les approximations permises par le fait que la largeur de la raie est faible devant la fréquence centrale, $\delta\nu \ll \nu_0$.

6. Le *redshift* ou décalage vers le rouge z est défini via la formule de l'effet Doppler (avec $v > 0$ pour un objet s'éloignant de l'observateur) :

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{1}{1+z} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}.$$

Mettre alors la relation du **5.** sous la forme (attention aux unités non-SI)

$$\frac{N_{\mathrm{H}}}{\mathrm{cm}^{-2}} \simeq 1.82\ 10^{18} \int \frac{T_b(v)\mathrm{d}v}{\mathrm{K.km.s}^{-1}}.$$

On remarquera que $v \ll c$ pour faire les approximations qui s'imposent.

7. Pour une galaxie à la distance D, la relation du **6.** permet de calculer la masse de gaz d'hydrogène M_{H} à partir de la mesure de la densité spectrale de flux F_ν, selon

$$\frac{M_{\mathrm{H}}}{\mathrm{M}_\odot} \simeq 2.36\ 10^5 \left(\frac{D}{\mathrm{Mpc}}\right)^2 \int \frac{F_\nu \mathrm{d}v}{\mathrm{Jy.km.s}^{-1}}.$$

On ne cherchera pas à démontrer cette formule. Estimer le redshift z de UGC11707 et la vitesse relative de cette galaxie par rapport à la Terre. En prenant $H_0 = 67.4\,\mathrm{km.s}^{-1}.\mathrm{Mpc}^{-1}$ pour la constante de Hubble apparaissant dans la loi de Hubble $v = H_0 D$, en déduire une estimation de D puis de la masse M_{H}. Commentaires ?

8. L'agitation thermique d'un gaz à la température T provoque un élargissement de la distribution des vitesses donné par

$$\sigma_{\mathrm{th}} = \sqrt{\frac{kT}{m}}$$

où m est la masse d'une particule du gaz. Donner une estimation de cet élargissement pour la raie HI observée en direction de UGC11707. Quels autres phénomènes physiques peut-on invoquer pour interpréter le profil de la raie ?