

CINQUIÈME TD

31 mars 2020

I - Durée de vie d'une étoile

On souhaite faire une estimation en ordre de grandeur de certaines caractéristiques d'une étoile à partir des lois de l'équilibre hydrostatique et de la conservation de l'énergie. On considérera que l'étoile est assimilable à un gaz parfait d'hydrogène atomique.

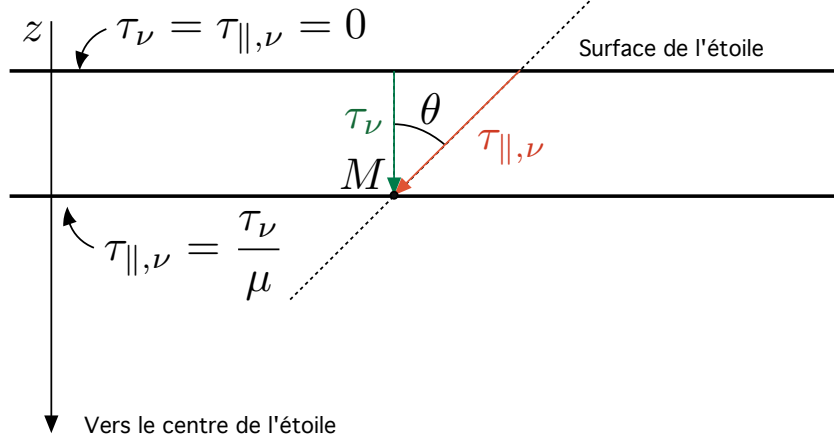
1. Rappeler la condition d'équilibre hydrostatique d'une colonne de matière située à une distance r du centre de l'étoile, et en déduire deux relations donnant l'ordre de grandeur de la pression P_* et de la température T_* au centre d'une étoile en fonction de sa masse M_* et de son rayon R_* . Faire l'application numérique dans le cas du Soleil.

2. Donner un ordre de grandeur de l'énergie potentielle gravitationnelle de l'étoile, dont on supposera la masse volumique ρ uniforme. En déduire l'énergie libérée par la formation de l'étoile lors de l'effondrement du nuage de gaz dont elle est issue. On considérera que l'état initial correspond à l'éloignement à l'infini de toutes les particules constituant l'étoile. Calculer numériquement cette énergie dans le cas du Soleil. En supposant que celui-ci tire sa luminosité, supposée constante, de cette libération d'énergie potentielle gravitationnelle, en déduire un ordre de grandeur de son âge. Cela vous semble-t-il raisonnable ?

3. De quelle autre source d'énergie faut-il tenir compte ? Sachant que la fusion de l'hydrogène en hélium libère une énergie $\varepsilon = 0.007m_Hc^2$ par nucléon et qu'une étoile peut utiliser tout le combustible contenu dans une fraction $x < 1$ de sa masse totale, donner un ordre de grandeur de l'énergie disponible et estimer le temps caractéristique associé (on prendra $x = 0.1$).

II - Relation masse-luminosité

L'intérieur des étoiles est caractérisé par une grande épaisseur optique τ_ν , et du coup la fonction source y tend vers la fonction de Planck, $S_\nu \rightarrow B_\nu(T)$, la température T variant en fonction de la profondeur. Dans ces régions, les photons diffusent suivant une marche aléatoire, dont le libre parcours moyen l_p est faible, de sorte que la courbure de l'étoile peut être ignorée. On se place donc en géométrie plane, comme décrit sur la figure ci-après, où l'on note τ_ν la profondeur optique comptée radialement depuis la surface de l'étoile vers son centre, et $\tau_{\parallel,\nu}$ la profondeur optique comptée le long d'un rayon lumineux incliné par rapport à normale, toujours depuis la surface de l'étoile. Avec $\mu = \cos \theta \geq 0$, on a la relation



géométrique $\tau_\nu = \mu\tau_{\parallel, \nu}$. La solution de l'équation du transfert le long de ce rayon prend alors la forme

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(\tau'_\nu) \exp\left(-\frac{\tau'_\nu - \tau_\nu}{\mu}\right) \frac{d\tau'_\nu}{\mu}.$$

D'autre part, le développement de Taylor de S_ν en $\tau_\nu \gg 1$ donne, puisque $S_\nu \simeq B_\nu$,

$$S_\nu(\tau_\nu + \delta\tau_\nu) = \sum_{n \geq 0} \frac{\delta\tau_\nu^n}{n!} \frac{\partial^n B_\nu}{\partial \tau_\nu^n}(\tau_\nu).$$

La variation de B_ν avec la profondeur optique τ_ν se fait via la température $T(\tau_\nu)$.

1. Montrer, en posant $\tau'_\nu = \tau_\nu + \delta\tau_\nu$, que l'intensité spécifique peut alors s'écrire comme

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = \sum_{n \geq 0} \mu^n \frac{\partial^n B_\nu}{\partial \tau_\nu^n}(\tau_\nu).$$

On utilisera les intégrales suivantes :

$$\int_0^\infty \frac{x^n}{n!} e^{-x} dx = 1.$$

2. On rappelle que les trois premiers moments de l'intensité spécifique I_ν sont donnés par

$$J_\nu(r) = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu(r, \theta) d\Omega \quad F_\nu(r) = \int \cos \theta I_\nu(r, \theta) d\Omega \quad p_\nu(r) = \frac{1}{c} \int \cos^2 \theta I_\nu(r, \theta) d\Omega.$$

Réécrire ces moments en fonction des variables (r, μ) . On notera que I_ν ne dépend pas de l'angle azimutal ϕ .

3. Exprimer J_ν , F_ν et p_ν sous forme de séries, à partir de l'expression de I_ν obtenue à la première question.

4. Estimer le rapport entre deux termes successifs de ces séries, en fonction de τ_ν . En notant l la longueur caractéristique sur laquelle varient significativement les propriétés du système (notamment la température), exprimer ce rapport en fonction de l/l_p . On utilisera le lien entre le coefficient d'absorption κ_ν et le libre parcours moyen l_p . Conclure, sachant que pour le Soleil, on peut prendre $l \sim 10^2$ à 10^3 km et $l_p \sim 1$ cm.

5. Ecrire la densité spectrale et volumique d'énergie u_ν en fonction de B_ν . Quels commentaires peut-on faire sur les expressions obtenues pour J_ν , F_ν , u_ν et p_ν ?

6. Exprimer F_ν en fonction de B_ν , T et du coefficient d'absorption κ_ν , et en déduire que la luminosité bolométrique¹ au rayon r , notée $L(r)$, s'écrit

$$L(r) = \int_0^\infty 4\pi r^2 F_\nu(r) d\nu = -\frac{64\pi\sigma}{3\kappa_R} r^2 T^3 \frac{dT}{dr}$$

où σ est la constante de Stefan-Boltzmann et κ_R l'opacité moyenne de Rosseland définie par

$$\kappa_R = \frac{\int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}.$$

On prendra garde que la profondeur optique est définie par $d\tau_\nu = -\kappa_\nu dr$, étant données les conventions d'orientation.

7. En utilisant à nouveau le lien entre coefficient d'absorption et libre parcours moyen des photons, écrire κ_R sous la forme $\kappa_R = \chi\rho$, où ρ est la masse volumique et χ un coefficient indépendant de la densité. Traduire alors la relation luminosité-température en ordre de grandeur, et en déduire que la masse d'une étoile et sa luminosité sont liées par $L_\star \propto M_\star^3$. Donner alors une estimation du temps caractéristique (durée de vie sur la séquence principale) d'une étoile de $10 M_\odot$ et de celui d'une étoile de $0.2 M_\odot$, connaissant celui du Soleil, estimé à l'exercice précédent.

$$\begin{aligned} c &= 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1} \\ m_H &= 1.660 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\ k &= 1.38062 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1} \\ G &= 6.670 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1L_\odot &= 3.826 \cdot 10^{26} \text{ W} \\ 1M_\odot &= 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg} \\ 1R_\odot &= 6.9599 \cdot 10^8 \text{ m} \end{aligned}$$

1. i.e. intégrée sur toutes les fréquences