

CINQUIÈME TD - CORRIGÉ

31 mars 2020

I - Durée de vie d'une étoile

1. On rappelle que l'équation d'équilibre hydrostatique d'une colonne de matière de section dS , entre les rayons r et $r + dr$, sous l'action de la force gravitationnelle et des forces de pression s'écrit

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M(r)\rho(r)}{r^2}$$

avec $M(r)$ la masse située à l'intérieur de la sphère de rayon r (théorème de Gauss), $P(r)$ la pression et $\rho(r)$ la masse volumique.

En ordre de grandeur, cette relation donne

$$\frac{P_\star}{R_\star} \sim G \frac{M_\star \rho_\star}{R_\star^2} \sim G \frac{M_\star^2}{R_\star^5} \Rightarrow P_\star \sim G \frac{M_\star^2}{R_\star^4}$$

D'autre part, comme on suppose que l'étoile est constituée d'un gaz parfait d'hydrogène atomique, la relation des gaz parfaits donne

$$P_\star R_\star^3 \sim N_\star k T_\star \sim \frac{M_\star}{m_H} k T_\star$$

Par suite

$$T_\star \sim \frac{m_H}{k} \frac{P_\star R_\star^3}{M_\star} \sim \frac{G m_H}{k} \frac{M_\star}{R_\star}$$

Cela revient à écrire, pour une particule, l'équipartition entre l'énergie thermique $kT_\star$ et l'énergie gravitationnelle $GM_\star m_H / R_\star$. Pour le Soleil, on a numériquement

$$P_\odot \sim G \frac{M_\odot^2}{R_\odot^4} \simeq \frac{2}{3} 10^{-10} \times \frac{(2 \cdot 10^{30})^2}{(7 \cdot 10^8)^4} \simeq \frac{1}{3 \times 7^3} 10^{18} \simeq 10^{15} \text{ Pa}$$

et

$$T_\odot \sim \frac{G m_H}{k} \frac{M_\odot}{R_\odot} \simeq \frac{2}{3} 10^{-10} \times \frac{5}{3} 10^{-27} \times \frac{1}{(7/5)} \frac{2 \cdot 10^{30}}{7 \cdot 10^8} \simeq \frac{20 \times 5}{9 \times 7 \times 7} 10^8 \simeq 2 \cdot 10^7 \text{ K}$$

Les valeurs réelles sont respectivement $2.48 \cdot 10^{16} \text{ Pa}$ et $1.57 \cdot 10^7 \text{ K}$.

2. L'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle pour une distribution de masse sphérique de rayon R_* est, d'après le théorème de Gauss,

$$E_{g*} = - \int_0^{R_*} G \frac{M(r)\rho(r)}{r} 4\pi r^2 dr$$

avec $M(r)$ la masse interne au rayon r . En supposant que l'étoile est homogène, on a

$$\rho(r) = \rho_0 = \text{cte} \quad \text{et} \quad M(r) = \frac{4\pi}{3} \rho_0 r^3$$

On a donc

$$E_{g*} = - \int_0^{R_*} G \frac{\rho_0}{r} 4\pi r^2 \times \frac{4\pi}{3} \rho_0 r^3 dr = - \frac{16\pi^2 G \rho_0^2}{3} \times \frac{R_*^5}{5}$$

En introduisant la masse M_* de l'étoile via

$$\rho_0 = \frac{3M_*}{4\pi R_*^3}$$

on a

$$E_{g*} = - \frac{16\pi^2 G}{3} \times \frac{R_*^5}{5} \times \frac{9M_*^2}{16\pi^2 R_*^6} = - \frac{3}{5} \frac{GM_*^2}{R_*}$$

Lors de sa formation à partir de particules éloignées à l'infini ($R_0 \rightarrow \infty$), l'étoile subit une variation d'énergie potentielle gravitationnelle

$$\Delta E_{g*} = - \frac{3}{5} \frac{GM_*^2}{R_*} + \frac{3}{5} \frac{GM_*^2}{R_0} \simeq - \frac{3}{5} \frac{GM_*^2}{R_*} < 0$$

Cela signifie qu'elle a libéré une énergie $-\Delta E_{g*} > 0$. Le temps, dit temps de Kelvin-Helmholtz, qu'il lui a fallu pour libérer cette énergie si elle l'est sous la forme de la luminosité L_* (supposée constante) est

$$t_* = \frac{-\Delta E_{g*}}{L_*}$$

Pour le cas du Soleil, on a, en ordre de grandeur

$$-\Delta E_{g\odot} \simeq \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} 10^{-10} \times \frac{(2 \cdot 10^{30})^2}{7 \cdot 10^8} \simeq \frac{1}{5} 10^{42} \simeq 2 \cdot 10^{41} \text{ J.}$$

Avec la luminosité donnée, on en déduit le temps de Kelvin-Helmholtz ($1 \text{ an} \simeq 3 \cdot 10^7 \text{ s}$) :

$$t_{\odot} = \frac{-\Delta E_{g\odot}}{L_{\odot}} \simeq \frac{1}{5 \times 3.8} 10^{16} \simeq 5 \cdot 10^{14} \text{ s} \simeq \frac{5 \cdot 10^{14}}{365 \times 86400} \simeq \frac{5 \cdot 10^{14}}{3 \cdot 10^7} \simeq 1.5 \cdot 10^7 \text{ ans}$$

Comme on trouve des roches largement plus vieilles que cela sur Terre, c'est déraisonnable.

3. Il faut tenir compte de l'énergie nucléaire $E_{N*} \simeq 0.007 m_H c^2 x N_* = 0.007 c^2 x M_*$. Pour le Soleil, on a numériquement, en prenant $x = 0.1$,

$$E_{N\odot} \simeq 7 \cdot 10^{-3} \times (3 \cdot 10^8)^2 \times 10^{-1} \times 2 \cdot 10^{30} \simeq 1.26 \cdot 10^{44} \text{ J.}$$

Le rapport des énergies nucléaire et gravitationnelle est alors

$$\frac{E_{N\odot}}{E_{g\odot}} \simeq \frac{1.26 \cdot 10^{44}}{2 \cdot 10^{41}} \simeq 600$$

On en déduit la durée de vie :

$$t_{\odot} \simeq 600 \times 3 \cdot 10^7 \simeq 1.8 \cdot 10^{10} \text{ ans}$$

Le facteur x est strictement plus petit que 1, puisque les conditions de température et de pression nécessaires à l'allumage des réactions thermonucléaires ne se produisent que dans les parties les plus internes de l'étoile.

II - Relation masse-luminosité

1. L'insertion du développement de Taylor de la fonction source en τ_{ν}

$$S_{\nu}(\tau_{\nu} + \delta\tau_{\nu}) = \sum_{n \geq 0} \frac{\delta\tau_{\nu}^n}{n!} \frac{\partial^n B_{\nu}}{\partial \tau_{\nu}^n}(\tau_{\nu})$$

dans la solution formelle en géométrie plane de l'équation du transfert

$$I_{\nu}(\tau_{\nu}, \mu) = \int_{\tau_{\nu}}^{\infty} S_{\nu}(\tau'_{\nu}) \exp\left(-\frac{\tau'_{\nu} - \tau_{\nu}}{\mu}\right) \frac{d\tau'_{\nu}}{\mu}$$

donne (avec $\tau'_{\nu} = \tau_{\nu} + \delta\tau_{\nu}$)

$$I_{\nu}(\tau_{\nu}, \mu) = \int_{\tau_{\nu}}^{\infty} \sum_{n \geq 0} \frac{(\tau'_{\nu} - \tau_{\nu})^n}{n!} \frac{\partial^n B_{\nu}}{\partial \tau_{\nu}^n}(\tau_{\nu}) \exp\left(-\frac{\tau'_{\nu} - \tau_{\nu}}{\mu}\right) \frac{d\tau'_{\nu}}{\mu} = \sum_{n \geq 0} \mu^n \frac{\partial^n B_{\nu}}{\partial \tau_{\nu}^n}(\tau_{\nu}) \int_0^{\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-x} dx$$

en posant

$$x = \frac{\tau'_{\nu} - \tau_{\nu}}{\mu}$$

Chaque intégrale restante vaut 1, donc

$$I_{\nu}(\tau_{\nu}, \mu) = \sum_{n \geq 0} \mu^n \frac{\partial^n B_{\nu}}{\partial \tau_{\nu}^n}(\tau_{\nu})$$

Le résultat pour $\mu < 0$ ne diffère que par des termes en $\mathcal{O}(e^{-\tau_{\nu}/|\mu|})$, donc on peut utiliser la formule ci-dessus pour toutes les valeurs de μ à suffisamment grande profondeur optique.

2. On réécrit les moments de l'intensité spécifique en variables (r, μ) , en commençant par l'intensité moyenne

$$J_{\nu} = \frac{1}{4\pi} \int I_{\nu} d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} I_{\nu} \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_{-1}^{-1} I_{\nu} \times (-d\mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_{\nu} d\mu$$

puis la densité spectrale de flux

$$F_\nu = \int I_\nu \cos \theta d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta = 2\pi \int_{-1}^1 \mu I_\nu d\mu$$

et enfin la densité spectrale de pression de radiation

$$p_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu \cos^2 \theta d\Omega = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi I_\nu \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 \mu^2 I_\nu d\mu$$

3. On a alors, avec l'expression de I_ν obtenue au **1.**, pour l'intensité moyenne

$$J_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu d\mu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sum_{n \geq 0} \mu^n \frac{\partial^n B_\nu}{\partial \tau_\nu^n}(\tau_\nu) d\mu = \sum_{n \geq 0} \frac{\partial^n B_\nu}{\partial \tau_\nu^n}(\tau_\nu) \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2(n+1)}$$

ce qui donne

$$J_\nu(\tau_\nu) = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)} \frac{\partial^{2p} B_\nu}{\partial \tau_\nu^{2p}}(\tau_\nu) \simeq B_\nu(\tau_\nu) + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 B_\nu}{\partial \tau_\nu^2}(\tau_\nu) + \dots$$

Pour la densité spectrale de flux, on a de la même façon,

$$F_\nu(\tau_\nu) = 2\pi \int_{-1}^1 \mu I_\nu d\mu = 2\pi \int_{-1}^1 \sum_{n \geq 0} \mu^{n+1} \frac{\partial^n B_\nu}{\partial \tau_\nu^n}(\tau_\nu) d\mu = 2\pi \sum_{n \geq 0} \frac{\partial^n B_\nu}{\partial \tau_\nu^n}(\tau_\nu) \frac{1 - (-1)^{n+2}}{n+2}$$

ce qui donne

$$F_\nu(\tau_\nu) = 4\pi \sum_{p \geq 0} \frac{1}{2p+3} \frac{\partial^{2p+1} B_\nu}{\partial \tau_\nu^{2p+1}}(\tau_\nu) \simeq \frac{4\pi}{3} \frac{\partial B_\nu}{\partial \tau_\nu}(\tau_\nu) + \frac{4\pi}{5} \frac{\partial^3 B_\nu}{\partial \tau_\nu^3}(\tau_\nu) + \dots$$

Enfin, pour la densité spectrale de pression de radiation,

$$p_\nu(\tau_\nu) = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 \mu^2 I_\nu d\mu = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 \sum_{n \geq 0} \mu^{n+2} \frac{\partial^n B_\nu}{\partial \tau_\nu^n}(\tau_\nu) d\mu = \frac{2\pi}{c} \sum_{n \geq 0} \frac{\partial^n B_\nu}{\partial \tau_\nu^n}(\tau_\nu) \frac{1 - (-1)^{n+3}}{n+3}$$

et donc

$$p_\nu(\tau_\nu) = \frac{4\pi}{c} \sum_{p \geq 0} \frac{1}{2p+3} \frac{\partial^{2p} B_\nu}{\partial \tau_\nu^{2p}}(\tau_\nu) \simeq \frac{4\pi}{3c} B_\nu(\tau_\nu) + \frac{4\pi}{5c} \frac{\partial^2 B_\nu}{\partial \tau_\nu^2}(\tau_\nu) + \dots$$

4. La convergence de ces séries est extrêmement rapide. En effet, en ordre de grandeur, on a

$$B_\nu^{(n)} \equiv \frac{\partial^n B_\nu}{\partial \tau_\nu^n} \sim \frac{B_\nu}{\tau_\nu^n} \quad \text{donc} \quad \frac{B_\nu^{(n+2)}}{B_\nu^{(n)}} \sim \frac{1}{\tau_\nu^2} \sim \frac{1}{(\kappa_\nu \times l)^2} \sim \left(\frac{l_p}{l} \right)^2$$

où l est la longueur caractéristique sur laquelle changent significativement les propriétés du système étudié. Dans les atmosphères stellaires, on prendra l'échelle de hauteur de pression,

typiquement 10^2 à 10^3 km pour le Soleil, de la surface vers l'intérieur. Comme le libre parcours moyen est de l'ordre du cm ou moins, on a au plus l_p/l de l'ordre de 10^{-7} , et donc chaque terme est d'ordre $\mathcal{O}(10^{-14})$ par rapport au terme précédent.

5. On peut donc ne garder que les premiers termes.

$$J_\nu \simeq B_\nu \quad F_\nu \simeq \frac{4\pi}{3} \frac{\partial B_\nu}{\partial \tau_\nu} \quad p_\nu \simeq \frac{4\pi}{3c} B_\nu$$

Par ailleurs, le lien de proportionnalité entre J_ν et la densité spectrale et volumique d'énergie du rayonnement permet d'écrire directement cette dernière comme

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu \simeq \frac{4\pi}{c} B_\nu \simeq 3p_\nu.$$

On note que le flux à l'ordre zéro est nul, et que c'est l'asymétrie créée par le gradient de température et donc le gradient de B_ν qui le rend non nul : l'anisotropie, même très faible¹, est essentielle pour qu'il y ait un flux lumineux vers la surface de l'étoile ! D'autre part, on confirme l'équilibre thermique du rayonnement dans les couches internes de l'étoile par les relations

$$u_\nu \simeq \frac{4\pi}{c} B_\nu(T) \quad \text{et} \quad p_\nu \simeq \frac{4\pi}{3c} B_\nu(T)$$

6. On réécrit l'expression de la densité spectrale de flux en introduisant le coefficient d'absorption κ_ν via $d\tau_\nu = -\kappa_\nu dr$, ainsi que la variation de la température avec le rayon r ,

$$F_\nu \simeq -\frac{4\pi}{3\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} \frac{dT}{dr}$$

Notons que la relation $d\tau_\nu = -\kappa_\nu dr$ au lieu de $d\tau_\nu = \kappa_\nu dr$ correspond à la définition de la profondeur optique, comptée positivement de la surface vers le centre de l'étoile. La luminosité bolométrique $L(r)$ au rayon r est alors

$$L(r) = 4\pi r^2 \int_0^\infty F_\nu d\nu = -\frac{16\pi^2}{3} r^2 \frac{dT}{dr} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu$$

On introduit la *profondeur optique moyenne de Rosseland* par

$$\kappa_R = \frac{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}$$

ce qui permet d'écrire $L(r)$ sous la forme

$$L = -\frac{16\pi^2}{3} \frac{1}{\kappa_R} r^2 \frac{dT}{dr} \int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu = -\frac{16\pi^2}{3} \frac{1}{\kappa_R} r^2 \frac{dT}{dr} \frac{d}{dT} \left(\int_0^\infty B_\nu d\nu \right)$$

1. puisque le premier terme non nul de F_ν est d'ordre $\mathcal{O}(10^{-7})$ par rapport à $J_\nu \dots$

or l'intégrale de B_ν sur la fréquence est déjà connue puisque

$$\int_0^\infty \pi B_\nu d\nu = \sigma T^4$$

on a donc

$$\frac{d}{dT} \left(\int_0^\infty B_\nu d\nu \right) = \frac{d}{dT} \left(\frac{\sigma T^4}{\pi} \right) = \frac{4\sigma T^3}{\pi}$$

et par conséquent

$$L = -\frac{64\pi\sigma}{3} \frac{1}{\kappa_R} r^2 T^3 \frac{dT}{dr} = -\frac{16\pi ac}{3} \frac{1}{\kappa_R} r^2 T^3 \frac{dT}{dr} \quad \text{avec} \quad a = \frac{4\sigma}{c}$$

qui constitue une équation fondamentale de la physique stellaire. La constante a est celle qui intervient dans l'expression de la densité volumique totale d'énergie du rayonnement du corps noir :

$$u = \int_0^\infty u_\nu d\nu = \int_0^\infty \frac{4\pi}{c} B_\nu d\nu = \frac{4}{c} \times \sigma T^4 = a T^4.$$

L'équation reliant L au gradient de la température a la forme d'une équation de diffusion, puisque le flux bolométrique sortant au rayon r se met sous la forme

$$F = \frac{L(r)}{4\pi r^2} = -\frac{4ac}{3\kappa_R} T^3 \frac{dT}{dr}$$

soit comme la projection sur le vecteur unitaire radial de l'équation

$$\mathbf{F} = -K_R \nabla T$$

avec la *conductivité radiative*

$$K_R = \frac{4ac}{3\kappa_R} T^3.$$

On prendra garde, si l'on souhaite écrire la divergence de ce flux vectoriel (pour aboutir à une "équation de la chaleur"), que cette conductivité dépend de la température T .

7. Le coefficient d'absorption κ_R est de l'ordre de l'inverse du libre parcours moyen l_p des photons. On peut donc écrire, en introduisant la densité numérique n des centres diffuseurs et la section efficace Σ

$$\kappa_R \sim \frac{1}{l_p} \simeq n\Sigma = \frac{\rho}{m_H} \Sigma = \chi\rho$$

avec $\chi = \Sigma/m_H$ un coefficient indépendant de la densité et ρ la masse volumique de l'étoile. On rappelle que le calcul d'ordre de grandeur de la première partie donnait

$$T_\star \sim \frac{Gm_H}{k} \frac{M_\star}{R_\star}$$

et la question précédente donne, en ordre de grandeur,

$$L_\star \sim \frac{\sigma}{\kappa_\star} R_\star T_\star^4$$

En combinant les deux, et en posant donc $\kappa_\star = \chi_\star \rho_\star$:

$$L_\star \sim \frac{\sigma}{\kappa_\star} R_\star \left(\frac{Gm_H}{k} \frac{M_\star}{R_\star} \right)^4 \sim \frac{\sigma}{\chi_\star} \left(\frac{Gm_H}{k} \right)^4 \frac{M_\star^4}{\rho_\star R_\star^3} \sim \frac{\sigma}{\chi_\star} \left(\frac{Gm_H}{k} \right)^4 M_\star^3$$

On a donc

$$L_\star \propto M_\star^3 \quad \text{et} \quad t_\star \propto \frac{E_{N\star}}{L_\star} \propto \frac{M_\star}{L_\star} \propto M_\star^{-2}$$

On en déduit que puisque le Soleil a une durée de vie sur la séquence principale de 10^{10} ans, une étoile de $10 M_\odot$ y passe environ 10^8 ans, et une étoile de $0.2 M_\odot$ environ $2,5 \cdot 10^{11}$ ans (supérieur à l'âge de l'Univers).

En réalité, la relation masse-luminosité dépend de la masse de l'étoile et de sa composition chimique, via le détail des processus nucléaires dominants au centre de l'étoile (chaîne proton-proton ou cycle CNO pour la fusion de l'hydrogène en hélium). L'exposant α de la relation $L_\star \propto M_\star^\alpha$ peut ainsi varier significativement.