Formation Interuniversitaire de Physique
Option de L3
Ecole Normale Supérieure de Paris

Astrophysique

Nicholas Kaiser
François Levrier

Troisième TD

17 mars 2020

I - Invariance relativiste de la fonction de distribution

On va montrer, à partir d'une approche cinétique, que la fonction de distribution d'un ensemble de particules est un invariant relativiste. On rappelle que cette fonction $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)$ est définie en écrivant que le nombre de particules d'impulsion $\boldsymbol{p}$ à $\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}$ près situées dans un volume $\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$ autour de $\boldsymbol{r}$ à l'instant t est $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}$. On se place en un point donné de l'espace-temps, et on va donc simplifier les notations en supprimant la référence à $\boldsymbol{r}$ et t. On écrira donc $f(\boldsymbol{p})$ pour désigner la fonction de distribution.
On considère un ensemble de particules relativistes, de masse au repos m_0, et on note $\boldsymbol{u}$ la vitesse d'une particule donnée dans le référentiel du laboratoire. Cette vitesse peut se décomposer en $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{v}$, où $\boldsymbol{v}$ est la vitesse locale du fluide de particules, c'est-à-dire moyennée dans un petit voisinage spatial

$$\boldsymbol{v} = \frac{\displaystyle\int \boldsymbol{u} f(\boldsymbol{p})\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\displaystyle\int f(\boldsymbol{p})\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}$$

et $\boldsymbol{U}$ est la composante aléatoire de la vitesse de la particule (mesurée dans le même référentiel du laboratoire). Le référentiel en mouvement à la vitesse $\boldsymbol{v}$ par rapport au laboratoire est le *référentiel comobile*. On notera avec un indice "0" les quantités mesurées dans ce référentiel. Par exemple, la vitesse aléatoire d'une particule dans ce référentiel sera notée $\boldsymbol{U}_0$, son impulsion $\boldsymbol{p}_0$ et la fonction de distribution dans ce référentiel est $f_0(\boldsymbol{p}_0)$.
Il existe un troisième ensemble de référentiels d'intérêt : les *référentiels propres* attachés à chacune des particules. Les quantités mesurées dans l'un de ces référentiels seront notées avec un prime.

1. Quelle relation peut-on écrire entre f et f_0 pour exprimer que le nombre de particules est le même, qu'on soit dans le référentiel du laboratoire ou dans le référentiel comobile ?

2. Écrire la relation entre l'élément de volume $\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'$ dans le référentiel propre d'une particule donnée et l'élément de volume $\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_0$ dans le référentiel comobile. Faire de même entre l'élément de volume $\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'$ dans le référentiel propre et l'élément de volume $\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$ dans le référentiel du laboratoire. En déduire la relation entre $\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$ et $\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_0$, en fonction de $\boldsymbol{U}_0$ et $\boldsymbol{u}$.

3. Donner l'énergie ε_0 de la particule dans le référentiel comobile, en fonction de m_0 et $U_0 = |\boldsymbol{U}_0|$, et son énergie ε dans le référentiel du laboratoire en fonction de m_0 et de $u = |\boldsymbol{u}|$.

4. De manière générale, la transformation de l'élément de volume dans l'espace des impulsions entre le référentiel du laboratoire et le référentiel comobile s'écrit $\mathrm{d}^3\boldsymbol{p} = J(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_0)\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_0$ où $J = |\mathfrak{J}|$ est le Jacobien de la transformation

$$\mathfrak{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial p_x}{\partial p_{0,x}} & \dfrac{\partial p_x}{\partial p_{0,y}} & \dfrac{\partial p_x}{\partial p_{0,z}} \\ \dfrac{\partial p_y}{\partial p_{0,x}} & \dfrac{\partial p_y}{\partial p_{0,y}} & \dfrac{\partial p_y}{\partial p_{0,z}} \\ \dfrac{\partial p_z}{\partial p_{0,x}} & \dfrac{\partial p_z}{\partial p_{0,y}} & \dfrac{\partial p_z}{\partial p_{0,z}} \end{bmatrix}$$

En se plaçant dans un système de coordonnées tel que le référentiel comobile est en mouvement à la vitesse v le long de l'axe z, écrire la transformation de Lorentz du quadrivecteur $(\varepsilon_0/c, p_0)$ en $(\varepsilon/c, p)$.

5. En utilisant la relation $\varepsilon_0^2 - p_0^2 c^2 = m_0^2 c^4$, montrer que $J = \varepsilon/\varepsilon_0$.

6. En déduire que l'élément de l'espace des phases $\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}$ est un invariant relativiste et conclure.

II - Intensité spécifique invariante

Le résultat obtenu à l'exercice précédent peut également s'appliquer aux photons, particules relativistes par excellence. On va en déduire une grandeur liée à l'intensité spécifique et qui est un invariant relativiste.
On note $f_\alpha(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)$ la fonction de distribution des photons, telle que $f_\alpha(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}$ représente le nombre de photons dont l'état de spin [1] est α, et qui se trouvent à l'instant t dans le petit volume $\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$ autour de la position $\boldsymbol{r}$, et dont l'impulsion est $\boldsymbol{p}$ à $\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}$ près.

1. Exprimer l'énergie radiative $\mathrm{d}E_\nu$ contenue dans une cellule $\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}$ de l'espace des phases, connaissant la relation entre l'impulsion $\boldsymbol{p}$ et la fréquence ν d'un photon.

2. On rappelle que l'intensité spécifique est définie à partir de l'énergie $\mathrm{d}E_\nu$ portée par les photons de fréquence ν à $\mathrm{d}\nu$ près traversant une surface $\mathrm{d}\Sigma$ dans l'élément d'angle solide $\mathrm{d}\Omega$ pendant $\mathrm{d}t$, avec

$$\mathrm{d}E_\nu = I_\nu \mathrm{d}\Sigma \cos\theta \mathrm{d}t \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}\nu$$

où θ est l'angle entre la direction de propagation considérée et la normale à la surface $\mathrm{d}\Sigma$. Comment s'écrivent les éléments de volume $\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$ et $\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}$ à considérer pour relier I_ν à la fonction de distribution des photons ?

3. En déduire que

$$I_\nu = \frac{h^4\nu^3}{c^2}\sum_\alpha f_\alpha(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) = \frac{h^4\nu^3}{c^2} f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) \tag{2.1}$$

en notant f la somme des fonctions de distributions associées aux deux états possibles de spin. Que peut-on alors en déduire sur la quantité I_ν/ν^3 ?

1. qui peut être *droite* ou *gauche*