Formation Interuniversitaire de Physique
Option de L3
Ecole Normale Supérieure de Paris

Astrophysique

Nicholas Kaiser
François Levrier

Deuxième TD - Corrigé

10 mars 2020

I - Magnitudes, luminosités, températures effectives

1. La luminosité bolométrique d'une étoile, L, est la puissance totale qu'elle rayonne sur toute sa surface. C'est donc le produit de cette surface, $4\pi R^2$, par la puissance émise par unité de surface, qui est le flux bolométrique. Pour un corps noir à la température T, ce flux bolométrique est égal à σT^4, où σ est la constante de Stefan. On a donc $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$. Cette puissance se dilue au fur et à mesure qu'on s'éloigne de l'étoile, de sorte qu'à la distance d, la puissance totale par unité de surface, c'est-à-dire le flux bolométrique, vaut

$$F = \frac{L}{4\pi d^2} = \sigma T^4 \left(\frac{R}{d}\right)^2$$

2. Par définition, la magnitude apparente bolométrique m est liée au flux bolométrique F par une relation logarithmique (logarithme en base 10)

$$m = -2.5 \log F + C = -2.5 \log \left(\frac{L}{4\pi d^2}\right) + C$$

La constante C peut être éliminée en notant donc que

$$m_\odot = -26.81 = -2.5 \log \left(\frac{L_\odot}{4\pi d_\odot^2}\right) + C$$

avec $L_\odot = 3.828\,10^{26}$ W et $d_\odot = 1.5\,10^{11}$ m. On a donc

$$m = m_\odot - 2.5 \log \left(\frac{L}{L_\odot}\right) + 5 \log \left(\frac{d}{d_\odot}\right)$$

3. La magnitude bolométrique absolue M est alors

$$M = m_\odot - 2.5 \log \left(\frac{L}{L_\odot}\right) + 5 \log \left(\frac{d_0}{d_\odot}\right)$$

où $d_0 = 10\,\text{pc}$. En faisant la différence des magnitudes apparente et absolue, on a donc

$$m - M = 5 \log \left(\frac{d}{d_0}\right)$$

ce qui montre qu'elle ne dépend que de la distance d.

4. Notons tout d'abord qu'on peut naturellement supposer que Sirius A et B sont à des distances comparables. Elles ont donc le même module de distance $m_A - M_A = m_B - M_B$. D'autre part, le rapport des luminosités est alors directement donné par la différence des magnitudes (absolues ou apparentes), car

$$m_A - m_B = M_A - M_B = -2.5 \log \left(\frac{L_A}{L_B} \right)$$

et donc, en inversant la relation,

$$\frac{L_A}{L_B} = 10^{0.4 \times (M_B - M_A)} \simeq 9120$$

Ce rapport de luminosités est directement relié aux rapports des températures effectives et des rayons

$$\frac{L_A}{L_B} = \frac{T_A^4 R_A^2}{T_B^4 R_B^2}$$

On connaît $T_A = 9900\,\mathrm{K}$, $R_A = 1.711\,\mathrm{R}_\odot$ et $R_B = 0.008\,\mathrm{R}_\odot$. On en déduit que

$$T_B = T_A \left(\frac{L_A}{L_B} \right)^{-1/4} \left(\frac{R_A}{R_B} \right)^{1/2} \simeq 1.48\,10^4\,\mathrm{K}.$$

5. Le diamètre angulaire θ de Vega est le rapport entre son diamètre réel D et sa distance d (dans l'approximation des petits angles, tout à fait valide ici). Il faut juste prendre garde aux unités, car le rapport D/d donne une valeur en radians. Donc

$$\frac{D}{d} = \frac{\pi}{180} \times \frac{\theta}{3600} = 1.5708\,10^{-8}$$

et $D = 3.82\,10^9$ m. Quant à la température effective, on l'obtient en écrivant le flux bolométrique comme

$$F = \sigma T^4 \left(\frac{R}{d} \right)^2$$

et donc

$$T = \left(\frac{F}{\sigma} \right)^{1/4} \left(\frac{2d}{D} \right)^{1/2} \simeq 9500\,\mathrm{K}.$$

II - Intensité et flux d'une étoile, effet de la résolution

1. On a bien entendu, comme l'intensité spécifique se conserve, $I_\nu = I_0$ pour $\theta \leqslant \theta_c$ et $I_\nu = 0$ pour $\theta > \theta_c$.

2. Par conséquent, la densité spectrale de flux au niveau du récepteur O est

$$F_\nu(r) = 2\pi \int_0^{\theta_c} I_0 \cos\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta = 2\pi I_0 \int_0^{(R_\star/r)} \sin\theta \mathrm{d}(\sin\theta) = \pi I_0 \left(\frac{R_\star}{r} \right)^2$$

Dans le cas où l'on se place à la surface de l'étoile, $r = R_\star$ et on retrouve le résultat $F_\nu = \pi I_\nu$ qu'on peut établir directement pour la densité spectrale de flux sortant dans un demi-espace, pour un rayonnement isotrope.

3. La puissance spectrale émise par l'étoile est le produit de la densité spectrale de flux $F_\nu = \pi I_0$ par la surface de l'étoile, soit
$$P_\nu = 4\pi^2 R_\star^2 I_0.$$
Cette puissance se dilue lorsqu'on s'éloigne de l'étoile, et au niveau du détecteur, la puissance spectrale par unité de surface, autrement dit la densité spectrale de flux, vaut
$$F_\nu(r) = \frac{P_\nu}{4\pi r^2} = \pi I_0 \left(\frac{R_\star}{r}\right)^2$$
ce qui est exactement le résultat trouvé par la première méthode.

4. La première méthode de calcul (en se plaçant au niveau du détecteur) donne
$$F_\nu(r) = 2\pi \int_0^{\theta_c} I(\alpha) \cos\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta$$
et la seconde consiste à écrire la densité spectrale de flux en r (une puissance spectrale par unité de surface) comme le rapport de la puissance spectrale émise par l'étoile, sur toute sa surface, à la surface de la sphère de centre C et de rayon r, soit
$$F_\nu(r) = \frac{P_\nu}{4\pi r^2} = 2\pi \int_0^{\pi/2} I(\alpha) \cos\alpha \sin\alpha \mathrm{d}\alpha \times \left(\frac{R_\star}{r}\right)^2$$
puisque la puissance spectrale émise est
$$P_\nu = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi/2} I(\alpha) \cos\alpha \sin\alpha \mathrm{d}\alpha \times 4\pi R_\star^2 = 2\pi \int_0^{\pi/2} I(\alpha) \cos\alpha \sin\alpha \mathrm{d}\alpha \times 4\pi R_\star^2$$
Or la formule des sinus dans le triangle formé du point courant M à la surface de l'étoile, de O et de C s'écrit
$$\frac{R_\star}{\sin\theta} = \frac{r}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{r}{\sin\alpha}$$
On a donc, en faisant le changement de variable $\theta \mapsto \alpha$ dans la première expression
$$\sin\theta = \frac{R_\star}{r}\sin\alpha \quad \text{et} \quad \cos\theta \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}(\sin\theta) = \frac{R_\star}{r}\mathrm{d}(\sin\alpha) = \frac{R_\star}{r}\cos\alpha \mathrm{d}\alpha$$
Avec par ailleurs la correspondance $\alpha = 0 \leftrightarrow \theta = 0$ et $\alpha = \pi/2 \leftrightarrow \theta = \theta_c$, on a donc bien la même formule par les deux calculs.

5. Cette différence de comportement entre l'intensité spécifique (indépendante de la distance) et la densité spectrale de flux (variant comme l'inverse du carré de la distance) a une conséquence importante quant à l'effet d'un instrument sur l'observation d'une source astrophysique. Considérons ainsi une étoile non résolue à l'œil nu, c'est-à-dire que l'angle solide sous lequel elle est vue, Ω_0, est inférieur à l'angle solide caractéristique de la résolution de l'œil humain $\Omega_{\text{œil}}$. On considère qu'on peut éventuellement observer cette étoile avec un instrument, ce qui a pour effet de modifier l'angle solide sous lequel est vue l'étoile en un angle solide apparent $\Omega_{\text{apparent}} > \Omega_0$, mais que dans tous les cas $\Omega_{\text{apparent}} < \Omega_{\text{œil}}$. C'est le cas représenté sur la figure 2.1. Le cas particulier où l'on observe l'étoile à l'œil nu est tel que $\Omega_{\text{apparent}} = \Omega_0$.

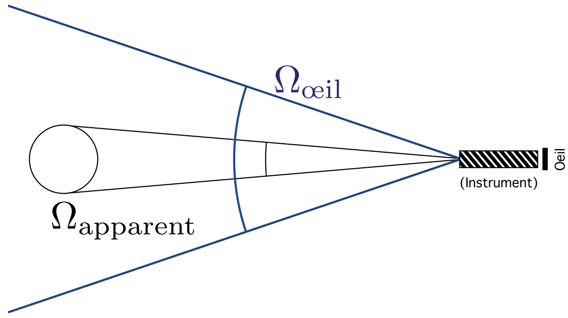

FIGURE 2.1 – Observation d'une étoile non résolue angulairement

Le capteur, ici l'œil, est sensible à l'ensemble de la radiation provenant des directions contenues dans l'angle solide $\Omega_{\text{œil}}$. Le signal enregistré est donc, comme calculé juste au-dessus,

$$F_\nu = I_0 \Omega_{\text{apparent}}$$

formule qu'on obtient en notant que dans le calcul précédent, on peut écrire

$$F_\nu = I_0 \times \frac{\pi R_\star^2}{r^2} = I_0 \times \frac{S_{\text{apparent}}}{r^2}$$

où S_{apparent} est la surface (apparente) du disque stellaire et où le rapport S_{apparent}/r^2 est par définition l'angle solide sous lequel est vue l'étoile. On a fait ici l'approximation des petits angles et l'hypothèse simplificatrice que l'intensité spécifique est une constante I_0 indépendante de la direction. Notons que c'est bien Ω_{apparent} qui intervient dans cette formule, car seuls les rayons lumineux reliant un point de la surface de l'étoile et l'observateur sont d'intensité spécifique non nulle. Le signal reçu est donc directement dépendant de la taille apparente de l'objet et celui-ci apparaît donc plus "brillant" [1] s'il est observé avec un instrument plus grossissant. Ainsi, des objets non résolus, comme des étoiles autres que le Soleil, apparaissent d'autant plus brillants (au sens utilisé ici) qu'ils sont plus près.
Cet effet cesse dès lors que l'objet est résolu angulairement, comme représenté sur la figure 2.2. Le signal reçu par le détecteur (l'œil) est alors

$$F_\nu = I_0 \Omega_{\text{œil}},$$

toujours en faisant l'approximation des petits angles (pas respectée sur la figure, par souci de clarté). Ce signal est donc maintenant indépendant de la taille apparente Ω_{apparent}. Ainsi, la Lune vue à travers des jumelles apparaît plus grosse, mais pas plus brillante qu'à l'œil nu. Pour rendre les objets résolus angulairement apparemment plus brillants, il faut un détecteur (par exemple une matrice de CCD) qui intègre sur des temps longs ou sur une plage de fréquences plus importante.
En résumé, on pourra dire (ce qui constitue un raccourci) que pour des objets non résolus angulairement les détecteurs sont sensibles au flux F_ν, qui dépend de la distance, et que pour des objets résolus ils sont sensibles à l'intensité spécifique, indépendante de la distance, puisque l'autre facteur intervenant dans le signal reçu, à savoir $\Omega_{\text{œil}}$, n'est pas variable.

1. Le terme est ici mal choisi puisque la brillance (autre nom de l'intensité spécifique) ne dépend pas de la taille apparente...

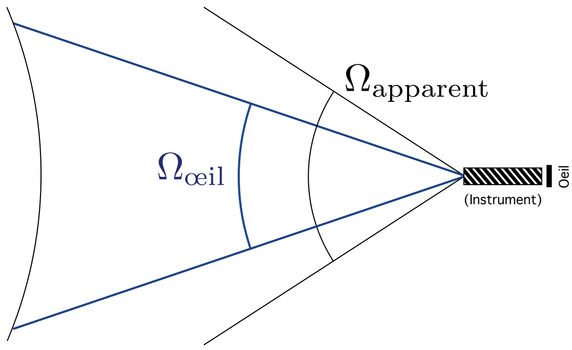

FIGURE 2.2 – Observation d'une étoile résolue angulairement