Formation Interuniversitaire de Physique
Option de L3
Ecole Normale Supérieure de Paris

Astrophysique

Nicholas Kaiser
François Levrier

Dixième TD

26 mai 2020

Les équations d'Einstein fournissent les lois d'évolution requises pour construire un modèle dynamique d'Univers. Dans le cas général, il est très difficile d'obtenir une solution de ces équations, mais le problème se simplifie notablement lorsqu'on impose les conditions d'homogénéité et d'isotropie. Dans ce cas, l'évolution de l'Univers est caractérisée par un facteur d'échelle $R(t)$, tel que le rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ entre deux objets comobiles [1] quelconques est proportionnel à R, soit $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 R(t)$. Les équations d'Einstein prennent alors une forme connue sous le nom d'équations de Friedmann.

I - Équations de Friedmann

On suppose l'Univers rempli d'un seul fluide, homogène et isotrope. On note $u = \rho c^2$ sa densité volumique d'énergie et p sa pression. Le facteur d'échelle vérifie alors la première équation de Friedmann

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = -\frac{kc^2}{R^2} + \frac{8\pi G}{3}\rho$$

où k est une constante dont le signe est celui de la courbure de l'Univers : positive (géométrie sphérique), nulle (géométrie Euclidienne) ou négative (géométrie hyperbolique). On définit la constante de Hubble $H = \dot{R}/R$ et le paramètre de densité $\Omega = (8\pi G\rho)/(3H^2)$. Les diverses quantités prises à l'instant présent t_0 seront notées R_0, $\dot{R}_0$, H_0, etc... Pour les applications numériques, on prendra [1] $H_0 = 67.74\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$, avec $1\,\mathrm{pc} = 3.086 \times 10^{16}\,\mathrm{m}$.

1. Justifier que via un changement d'unité $R \longrightarrow aR$ approprié on peut toujours choisir $k = 1$ en courbure positive et $k = -1$ en courbure négative.

2. En admettant que l'évolution de l'Univers est adiabatique et que le seul travail est celui des forces de pression $\delta W = -p\,\mathrm{d}V$, avec $V \propto R^3$ le "volume de l'Univers", appliquer le premier principe de la thermodynamique pour montrer qu'on a la relation suivante

$$\frac{\dot{\rho}R}{3\dot{R}} + \rho + \frac{p}{c^2} = 0 \quad \text{et en déduire que} \quad \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)$$

qui constitue la seconde équation de Friedmann, donnant l'accélération de l'expansion. Pour obtenir celle-ci, on dérivera la première équation de Friedmann par rapport au temps.

3. On suppose que le fluide emplissant l'Univers peut être décrit par une équation d'état de la forme $p = \omega\rho c^2$. Montrer qu'alors $\rho \propto R^{-3(1+\omega)}$. Le cas $\omega = 0$ correspond à un Univers dit "poussière", dominé par la matière (matière baryonique et surtout matière noire froide, non collisionnelle). Que vaut ω dans le cas d'un Univers dominé par le rayonnement ? Quelle

1. C'est-à-dire qui n'ont pas d'autre mouvement l'un par rapport à l'autre que celui lié à l'expansion ou à la contraction de l'espace lui-même.
1. Planck Collaboration XIII, A&A, 594, 13, 2016.

est la condition sur ω pour que l'expansion soit freinée ou accélérée ?

4. Établir le lien entre le paramètre de densité actuel Ω_0 et la courbure k de l'Univers. En déduire la densité critique ρ_{0_c} correspondant à une courbure nulle.

5. Montrer que le paramètre de Hubble évolue au cours du temps selon

$$H^2 = H_0^2 \left[(1-\Omega_0) \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 + \Omega_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3(1+\omega)} \right].$$

6. On suppose maintenant que plusieurs fluides notés i, sans interaction entre eux, contribuent à la dynamique de l'Univers, et pour chacun d'eux on suppose une équation d'état $p_i = \omega_i \rho_i c^2$. Comment se généralise l'équation d'évolution du paramètre de Hubble trouvée à la question précédente ? On introduira les paramètres de densité $\Omega_{i,0}$ pertinents.

II - Quelques modèles simples d'Univers

La résolution de l'équation d'évolution du paramètre de Hubble nécessite de préciser les fluides contribuant de façon majoritaire à la densité d'énergie de l'Univers. Il s'agit essentiellement de la matière ordinaire et de la matière noire, notées collectivement m, du rayonnement noté r, ainsi que de l'énergie noire, dont la nature est inconnue mais dont l'existence est attestée par l'accélération de l'expansion déduite des observations de supernovæ de type Ia. Ce "fluide", noté Λ en référence à la constante cosmologique, est modélisé par une équation d'état $p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$.

1. Réécrire l'équation d'évolution de H en introduisant les variables réduites $y = R/R_0$ et $x = H_0 t$. Pour simplifier, on posera $\Omega_i = \Omega_{0,i}$ pour chaque fluide, et $\Omega_0 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda$. L'équation différentielle obtenue n'est pas soluble analytiquement de manière générale, mais on va en étudier quelques cas particuliers.

2. On se place ici dans le cadre des modèles $(\Omega_m, \Omega_r, \Omega_\Lambda) = (1, 0, 0)$ - dit d'Einstein-de Sitter - et $(\Omega_m, \Omega_r, \Omega_\Lambda) = (0, 1, 0)$, qu'on traitera simultanément en notant que l'équation obtenue à la question précédente se met alors sous la forme générale

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \right)^2 = \frac{1}{y^{1+3\omega}} \quad \text{avec, suivant le cas, } \omega = 0 \text{ ou } \omega = \frac{1}{3}.$$

Déterminer la loi d'évolution de R et tracer l'allure de $y(x)$. La durée de vie de l'Univers est-elle finie ou infinie ? Quel est l'âge de l'Univers et comment se compare-t-il au temps de Hubble $t_H = 1/H_0$, dont on précisera la signification ? On rappelle que l'époque actuelle est caractérisée par $R = R_0$. Calculer numériquement ces différents âges.

3. On se place maintenant dans le cas d'un Univers de de Sitter, $(\Omega_m, \Omega_r, \Omega_\Lambda) = (0, 0, 1)$, dominé par l'énergie noire et de courbure nulle. Déterminer la loi d'évolution de R. Quel est l'âge de l'Univers et sa durée de vie ?

4. Les mesures actuelles (derniers résultats obtenus par la mission *Planck*) sont en accord avec un Univers dit "Λ-CDM", pour lequel $\Omega_m = 0.3089$ et $\Omega_\Lambda = 0.6911$. En supposant que le seul rayonnement est celui du fond diffus cosmologique (corps noir à $T_0 = 2.725$ K), montrer que la contribution de celui-ci à la densité totale est négligeable et en déduire la courbure de l'Univers. Que devient l'équation de Friedmann adimensionnée obtenue au **1.** ? Montrer que $y = a\left[\sinh(bx)\right]^{2/3}$ est solution, et préciser les valeurs des constantes a et b. Montrer que l'expansion de l'Univers Λ-CDM présente deux phases distinctes et tracer l'allure de $y(x)$. Quel est l'âge de l'Univers ?