

PREMIER TD

3 mars 2020

I - Impulsion et moment cinétique d'une onde EM

Ce problème se propose de calculer l'impulsion et le moment cinétique portés par le rayonnement. Il ne représente donc pas nécessairement un système physique réel. On considère un point matériel de charge Q et de masse m dans un milieu visqueux, de sorte qu'une force de freinage $\mathbf{F}_v = -\beta \mathbf{v}$ ($\beta > 0$) proportionnelle à la vitesse $\mathbf{v}$ s'applique à la charge. Une onde électromagnétique plane et monochromatique, de pulsation ω , polarisée circulairement, traverse le milieu et interagit avec la charge. L'équation du mouvement de celle-ci est

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_v$$

où $\mathbf{F}_L = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ est la force de Lorentz. On rappelle que pour une telle onde, le champ électrique a pour expression $\mathbf{E}(t) = E \cos(kz - \omega t)\mathbf{u}_x \pm E \sin(kz - \omega t)\mathbf{u}_y$ dans le repère $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$ tel que la direction de propagation soit définie par le vecteur $\mathbf{u}_z$. Le signe $-$ correspond à une onde circulaire gauche, le signe $+$ à une onde circulaire droite.

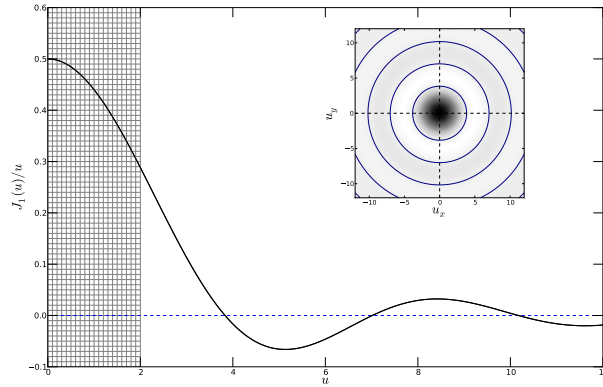
1. En l'absence de rayonnement incident sur la charge, quelle est la forme de $\mathbf{v}(t)$? Pour ce qui suit, on suppose que le temps de relaxation visqueuse $\tau = m/\beta$ est petit devant la période T de la radiation incidente, qu'on considère désormais.
2. Dans ce cas, comment se simplifie l'équation du mouvement ?
3. Montrer qu'à l'ordre le plus bas, sachant que $v \ll c$, la trajectoire de la charge est un cercle contenu dans le plan normal à la direction de propagation, de rayon $QE/\beta\omega$, et parcouru à la vitesse linéaire constante $v = QE/\beta$.
4. Montrer que la puissance transmise au fluide par l'onde est $\mathcal{P} = (QE)^2/\beta$.
5. En considérant la petite force magnétique agissant sur la particule, montrer que l'impulsion transmise par l'onde au fluide par unité de temps (c'est-à-dire la force) dans la direction de propagation de l'onde a pour amplitude $(QE)^2/\beta c$.
6. Montrer que le moment cinétique transmis par l'onde au fluide par unité de temps (c'est-à-dire le couple), est parallèle à la direction de propagation de l'onde, avec comme amplitude $\pm(QE)^2/\beta\omega$, le signe $+$ correspondant au cas d'une onde circulaire gauche, et le signe $-$ à celui d'une onde circulaire droite.
7. Montrer que la section efficace d'absorption est $\sigma = Q^2/(\beta\epsilon_0 c)$.
8. Si nous considérons maintenant la radiation comme composée de photons polarisés circulairement, d'énergie $\epsilon = \hbar\omega$, montrer que les résultats précédents s'interprètent en affublant les photons d'une impulsion $p = \hbar k$ et d'un moment cinétique $J = \pm\hbar$, tous deux portés par le vecteur unitaire $\mathbf{u}_z$ définissant la direction de propagation.
9. Reprendre l'ensemble des questions 3. à 8., avec les modifications adéquates, pour le cas d'une onde électromagnétique plane monochromatique polarisée linéairement, pour laquelle le champ électrique prend la forme $\mathbf{E}(t) = E \cos(kz - \omega t)\mathbf{u}_x$.

II - Résolution d'un télescope

L'observation d'une source ponctuelle à l'aide d'un télescope de diamètre D conduit à une répartition de l'intensité dans le plan focal qui n'est pas une distribution de Dirac, du fait de la diffraction. Notant θ l'angle par rapport à la direction de pointé du télescope, on n'a donc pas $I(\theta) = I_0\delta(\theta)$, mais une forme qui dépend de la longueur d'onde λ considérée,

$$I(\theta) = 4I_0 \left[\frac{J_1(u)}{u} \right]^2 \quad \text{avec} \quad u = \frac{\pi D \sin \theta}{\lambda}$$

où J_1 est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 1. On donne sur la figure ci-dessous la représentation de $J_1(u)/u$ entre 0 et 12. L'image en insert représente cette même fonction, en niveaux de gris, à deux dimensions (u_x, u_y) avec $u^2 = u_x^2 + u_y^2$, les zéros de la fonction étant représentés par les cercles concentriques.



1. Calculer le diamètre angulaire $\Delta\theta(\lambda, D)$ de la tache de diffraction, prise à mi-hauteur du pic central, en fonction de λ et D . Cette taille, appelée FWHM pour *Full-Width at Half-Maximum*, est une limite physique à la résolution angulaire de tout instrument d'observation astronomique. Voyez-vous un autre effet pouvant limiter la résolution angulaire ?
2. Calculer numériquement $\Delta\theta$ dans les cas de l'œil humain ($D = 1 \text{ cm}$, $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$), du Hubble Space Telescope ($D = 2.4 \text{ m}$, $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$) et du radiotélescope de l'IRAM au Pico Veleta ($D = 30 \text{ m}$, $\lambda = 2 \text{ mm}$). On exprimera le résultat en secondes d'arc ($1'' = 1/3600^\circ$).
3. On considère deux personnes se tenant à un mètre l'une de l'autre. Quelle est la distance maximale à laquelle elles pourraient se trouver sans que l'image fournie par HST les confonde l'une avec l'autre ?
4. Quel devrait être le diamètre d'un télescope optique comme HST capable de résoudre spatialement la surface d'une étoile identique au Soleil (rayon $R_\odot = 7 \times 10^8 \text{ m}$) située dans le nuage moléculaire du Taureau, à une distance de 140 pc ($1 \text{ pc} = 3 \times 10^{16} \text{ m}$) ?
5. Montrer que dans la limite $\Delta\theta \ll 1$, l'angle solide couvert par le pic central de la tache de diffraction est $\Delta\Omega \simeq \pi\Delta\theta^2/4$. On rappelle que l'élément d'angle solide en coordonnées sphériques est donné par $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$.
6. En déduire le nombre d'éléments de résolution sur tout le ciel dans le cas du Hubble Space Telescope observant à $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$. Combien de pixels une carte *full-sky* de HST contiendrait-elle (on n'oubliera pas que le critère de Shannon impose d'échantillonner le ciel avec un pas angulaire au plus égal à la moitié du FWHM) ? Estimer le volume de données correspondant, si l'on fait l'hypothèse qu'elles sont codées sur un octet (8 bits).