

PREMIER TD - CORRIGÉ

3 mars 2020

I - Impulsion et moment cinétique d'une onde EM

1. En l'absence de rayonnement incident sur la charge, la force de Lorentz $\mathbf{F}_L$ est nulle, et l'équation du mouvement se simplifie

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_v = -\beta \mathbf{v}.$$

dont la solution est bien entendu $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0)e^{-t/\tau}$ où $\tau = m/\beta$ est le temps de relaxation visqueuse, c'est-à-dire le temps caractéristique d'amortissement par la force de freinage visqueuse. On suppose désormais ce temps petit devant la période T de la radiation incidente.

2. Avec $\tau \ll T$, la vitesse $\mathbf{v}(t)$ s'adapte quasi instantanément à l'excitation par le champ électromagnétique incident. Dans l'équation du mouvement, qu'on peut réécrire sous la forme

$$\tau \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} = \frac{Q}{\beta} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

les deux termes du membre de gauche ont pour ordres de grandeur respectifs $\tau \omega v \sim (\tau/T)v$ et v . Le premier est donc négligeable devant le second, et l'équation du mouvement peut se simplifier en

$$\mathbf{v} = \frac{Q}{\beta} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

ce qui traduit l'adaptation très rapide de la vitesse à l'excitation électromagnétique de sorte que $\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_v = \mathbf{0}$.

3. Les deux termes de la force de Lorentz que sont $Q\mathbf{E}$ et $Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ne sont pas du même ordre :

$$\frac{|Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}|}{|Q\mathbf{E}|} \sim \frac{vB}{E} \sim \frac{v}{c}$$

car $B = E/c$. On peut donc négliger le terme magnétique et en déduire que $\mathbf{v} = (Q/\beta)\mathbf{E}$. Or, pour une onde électromagnétique monochromatique polarisée circulairement, le champ électrique au niveau de la charge a pour expression

$$\mathbf{E}(t) = E \cos(kz - \omega t) \mathbf{u}_x \pm E \sin(kz - \omega t) \mathbf{u}_y$$

dans le repère $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$ tel que la direction de propagation soit définie par le vecteur $\mathbf{u}_z$. Le signe $-$ correspond à une onde circulaire gauche, le signe $+$ à une onde circulaire droite. Par conséquent, la vitesse de la charge est

$$\mathbf{v}(t) = \frac{QE}{\beta} [\cos(kz - \omega t) \mathbf{u}_x \pm \sin(kz - \omega t) \mathbf{u}_y]$$

et l'intégration est directe pour obtenir la trajectoire

$$\mathbf{r}(t) = \frac{QE}{\beta\omega} [-\sin(kz - \omega t)\mathbf{u}_x \pm \cos(kz - \omega t)\mathbf{u}_y] + \mathbf{r}_0$$

ce qui est précisément l'équation d'un cercle de rayon $QE/\beta\omega$, parcouru à la pulsation ω , et donc avec une vitesse linéaire QE/β . La constante $\mathbf{r}_0$ peut être prise nulle sans perte de généralité. Cela revient à redéfinir l'origine des coordonnées.

4. La puissance des forces appliquées à la charge est nulle, $\mathbf{v} \cdot [\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_v] = 0$, ce qui ne fait que traduire la constance de la norme de la vitesse. Cette expression se décompose en deux termes qui se compensent exactement, l'un est la puissance fournie par l'onde électromagnétique à la charge, $\mathcal{P}_L = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_L > 0$, l'autre est la puissance prise à la charge par le fluide du fait des frottements visqueux, $\mathcal{P}_v = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_v = -\beta v^2 < 0$. *In fine*, l'onde électromagnétique cède donc au fluide une puissance $\mathcal{P} = -\mathcal{P}_v = \beta v^2 = (QE)^2/\beta$.

5. On considère maintenant l'effet de la force magnétique, petite devant la composante électrique. Pour cela, on fait un développement perturbatif, c'est-à-dire qu'on écrit la vitesse sous la forme $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$, où $\mathbf{v}_0$ est la solution trouvée précédemment en négligeant la force magnétique, et $\mathbf{v}_1$ est une petite correction ($|\mathbf{v}_1| \ll |\mathbf{v}_0|$). En écrivant l'équation du mouvement comme

$$\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 = \frac{Q}{\beta} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}),$$

on peut classer les différents termes en fonction de leur ordre de grandeur. À l'ordre zéro, on a la solution déjà obtenue

$$\mathbf{v}_0 = \frac{Q}{\beta} \mathbf{E},$$

et à l'ordre un, on a

$$\mathbf{v}_1 = \frac{Q}{\beta} \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}$$

le dernier terme étant d'ordre deux comme produit de deux termes d'ordre un. On a donc, en insérant la solution $\mathbf{v}_0$ obtenue plus haut

$$\mathbf{v}_1 = \frac{Q^2 E}{\beta^2} [\cos(kz - \omega t)\mathbf{u}_x \pm \sin(kz - \omega t)\mathbf{u}_y] \times \mathbf{B}$$

L'expression du champ magnétique peut s'obtenir à partir de l'équation de Maxwell-Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

ce qui donne, en explicitant le membre de gauche

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E \cos(kz - \omega t) \\ \pm E \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp Ek \cos(kz - \omega t) \\ -Ek \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

la relation suivante

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = Ek [\pm \cos(kz - \omega t)\mathbf{u}_x + \sin(kz - \omega t)\mathbf{u}_y]$$

et donc

$$\mathbf{B}(t) = \frac{Ek}{\omega} [\mp \sin(kz - \omega t)\mathbf{u}_x + \cos(kz - \omega t)\mathbf{u}_y]$$

On a donc

$$\mathbf{v}_1 = \frac{(QE)^2}{\beta^2 c} \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t) \\ \pm \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mp \sin(kz - \omega t) \\ \cos(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{(QE)^2}{\beta^2 c} \mathbf{u}_z$$

Le mouvement de la charge est donc hélicoïdal, comme superposition du mouvement circulaire précédent et du mouvement rectiligne uniforme qu'on vient d'exhiber. Le fluide exerçant sur la charge une force visqueuse $-\beta\mathbf{v}$, celle-ci exerce sur le fluide une force opposée $\beta\mathbf{v}$. L'impulsion transmise au fluide par unité de temps par la force magnétique appliquée à la charge est donc

$$\mathbf{F}_m = \beta\mathbf{v}_1 = \frac{(QE)^2}{\beta c} \mathbf{u}_z$$

6. De même, la charge exerce une force $\beta\mathbf{v}_0$ sur le fluide dans la direction orthoradiale, et donc un couple $\mathbf{\Gamma} = \beta\mathbf{r} \times \mathbf{v}_0$, soit

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{(QE)^2}{\beta\omega} \begin{pmatrix} -\sin(kz - \omega t) \\ \pm \cos(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t) \\ \pm \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \mp \frac{(QE)^2}{\beta\omega} \mathbf{u}_z$$

Le signe $-$ correspond au cas d'une onde circulaire droite, le signe $+$ au cas d'une onde circulaire gauche.

7. La section efficace d'absorption σ est la surface sur laquelle est absorbé le rayonnement électromagnétique, dont la puissance est ensuite transmise au fluide. Or, la puissance électromagnétique incidente sur une surface σ perpendiculaire à la direction de propagation est donnée par le flux du vecteur de Poynting au travers de cette surface, soit, pour une onde plane

$$\mathcal{P} = \sigma \frac{E^2}{\mu_0 c}$$

et la puissance fournie au fluide est, on l'a vu,

$$\mathcal{P} = (QE)^2 / \beta$$

On a donc

$$\sigma = \frac{(QE)^2}{\beta} \times \frac{\mu_0 c}{E^2} = \frac{\mu_0 c Q^2}{\beta} = \frac{Q^2}{\epsilon_0 c \beta}$$

8. Si nous considérons maintenant la radiation comme composée de photons polarisés circulairement, d'énergie $\epsilon = \hbar\omega$, la puissance absorbée donne directement le nombre de photons absorbés par unité de temps,

$$\dot{n} = \frac{\mathcal{P}}{\hbar\omega} = \frac{(QE)^2}{\hbar\omega\beta}$$

et l'impulsion transmise au fluide par unité de temps, c'est-à-dire la force $\mathbf{F}_m$, est égale au produit de $\dot{n}$ par l'impulsion $\mathbf{p}$ d'un photon. On a donc :

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{F}_m}{\dot{n}} = \frac{\hbar\omega\beta}{(QE)^2} \times \frac{(QE)^2}{\beta c} \mathbf{u}_z = \frac{\hbar\omega}{c} \mathbf{u}_z = \hbar k \mathbf{u}_z$$

De même, le moment cinétique transmis au fluide par unité de temps, $\mathbf{\Gamma}$, est égal au produit de $\dot{n}$ par le moment cinétique $\mathbf{J}$ porté par un photon, soit

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{\Gamma}}{\dot{n}} = \frac{\hbar\omega\beta}{(QE)^2} \times \left(\mp \frac{(QE)^2}{\beta\omega} \right) \mathbf{u}_z = \mp \hbar \mathbf{u}_z$$

le signe $-$ correspondant au cas d'une onde circulaire droite, le signe $+$ au cas d'une onde circulaire gauche.

9. Pour une onde électromagnétique plane monochromatique polarisée linéairement, on a

$$\mathbf{E}(t) = E \cos(kz - \omega t) \mathbf{u}_x$$

et donc une vitesse, à l'ordre zéro

$$\mathbf{v}_0(t) = \frac{QE}{\beta} \cos(kz - \omega t) \mathbf{u}_x.$$

La particule oscille le long de l'axe défini par $\mathbf{u}_x$, de manière harmonique,

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{QE}{\beta\omega} \sin(kz - \omega t) \mathbf{u}_x.$$

La puissance cédée au fluide varie cette fois avec le temps,

$$\mathcal{P}(t) = \beta v^2 = \frac{(QE)^2}{\beta} \cos^2(kz - \omega t)$$

et il est surtout intéressant de considérer la moyenne de cette puissance dans le temps

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{(QE)^2}{2\beta}.$$

Comme le champ magnétique est maintenant donné par la relation

$$\mathbf{B}(t) = \frac{Ek}{\omega} \cos(kz - \omega t) \mathbf{u}_y$$

la force magnétique est maintenant

$$\mathbf{F}_m = \beta \mathbf{v}_1 = Q \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} = Q \times \frac{QE}{\beta} \cos(kz - \omega t) \mathbf{u}_x \times \frac{Ek}{\omega} \cos(kz - \omega t) \mathbf{u}_y$$

soit

$$\mathbf{F}_m = \frac{(QE)^2}{\beta c} \cos^2(kz - \omega t) \mathbf{u}_z$$

et donc la force moyenne est

$$\langle \mathbf{F}_m \rangle = \frac{(QE)^2}{2\beta c} \mathbf{u}_z$$

Comme le mouvement de la particule est linéaire et passe par l'origine des coordonnées, il n'y a cette fois pas de couple transmis au fluide, donc $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{0}$.

La section efficace d'absorption σ est obtenue en écrivant que la puissance moyenne absorbée par le fluide $\langle \mathcal{P} \rangle$ est égale au produit de σ par le flux surfacique moyen du vecteur de Poynting, soit

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \sigma \left\langle \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \right\rangle = \sigma \frac{E^2}{2\mu_0 c} = \frac{(QE)^2}{2\beta}.$$

On obtient donc la même expression que dans le cas précédent

$$\sigma = \frac{\mu_0 c Q^2}{\beta} = \frac{Q^2}{\epsilon_0 c \beta}.$$

Le nombre moyen de photons absorbés par unité de temps est alors

$$\langle \dot{n} \rangle = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle}{\hbar \omega} = \frac{(QE)^2}{2\beta \hbar \omega}$$

et ils transmettent au fluide une impulsion moyenne par unité de temps qui s'identifie à la force magnétique moyenne, comme précédemment,

$$\langle \mathbf{F}_m \rangle = \langle \dot{n} \rangle \mathbf{p}$$

ce qui donne

$$\frac{(QE)^2}{2\beta c} = \frac{(QE)^2}{2\beta \hbar \omega} p$$

et donc $p = \hbar k$ comme de juste. Le moment cinétique, quant à lui, est nul puisque le couple transmis au fluide est nul. On interprète ce résultat en mécanique quantique en identifiant un photon d'énergie ϵ polarisé linéairement à la superposition de deux photons d'énergie $\epsilon/2$ polarisés circulairement, l'un droite et l'autre gauche.

II - Résolution d'un instrument

1. La largeur à mi-hauteur est $\Delta\theta = 2\theta_{1/2}$, avec

$$I(\theta_{1/2}) = \frac{I_0}{2}$$

donc

$$4I_0 \left[\frac{J_1(u_{1/2})}{u_{1/2}} \right]^2 = \frac{I_0}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{J_1(u_{1/2})}{u_{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

Or $1/\sqrt{8} \simeq 0.35$ donc on lit sur le graphique que $u_{1/2} \simeq 1.6$ et

$$\sin \theta_{1/2} = \frac{\lambda u_{1/2}}{\pi D} \simeq 0.51 \frac{\lambda}{D} \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta = 2 \arcsin \left(0.51 \frac{\lambda}{D} \right)$$

Dans la limite $\lambda \ll D$ on a alors

$$\Delta\theta \simeq \frac{\lambda}{D}$$

La diffraction est une limite fondamentale, mais d'autres effets peuvent limiter la résolution. Par exemple les turbulences atmosphériques, qui altèrent la position d'une étoile en fonction du temps, et résultent donc en

un effet de “flou” équivalent à la dégradation de la résolution instrumentale.

2. On a :

- Pour l'œil humain :

$$\frac{\lambda}{D} = \frac{5 \times 10^{-7}}{10^{-2}} = 5 \times 10^{-5} \implies \Delta\theta \simeq 5.1 \times 10^{-5} \text{ rad} \simeq 10.5''$$

- Pour HST :

$$\frac{\lambda}{D} = \frac{5 \times 10^{-7}}{2.4} = 2.1 \times 10^{-7} \implies \Delta\theta \simeq 2.1 \times 10^{-7} \text{ rad} \simeq 0.044''$$

- Pour le 30 m :

$$\frac{\lambda}{D} = \frac{2 \times 10^{-3}}{30} = 6.7 \times 10^{-5} \implies \Delta\theta \simeq 6.8 \times 10^{-5} \text{ rad} \simeq 14.0''$$

3. La résolution angulaire de HST étant $\Delta\theta \simeq 2.1 \times 10^{-7} \text{ rad} \ll 1$, on peut assimiler cet angle à sa tangente et écrire que la distance D_{max} maximale à laquelle on peut placer deux personnes se tenant à $d = 1 \text{ m}$ l'une de l'autre tout en pouvant les distinguer avec cet instrument est

$$\Delta\theta = 2 \arctan\left(\frac{d}{2D_{\text{max}}}\right) \simeq \frac{d}{D_{\text{max}}} \implies D_{\text{max}} = \frac{d}{\Delta\theta} \simeq 5 \times 10^6 \text{ m} = 5000 \text{ km}.$$

4. Pour résoudre la surface d'une étoile comme le Soleil à cette distance $d = 140 \text{ pc}$, il faut

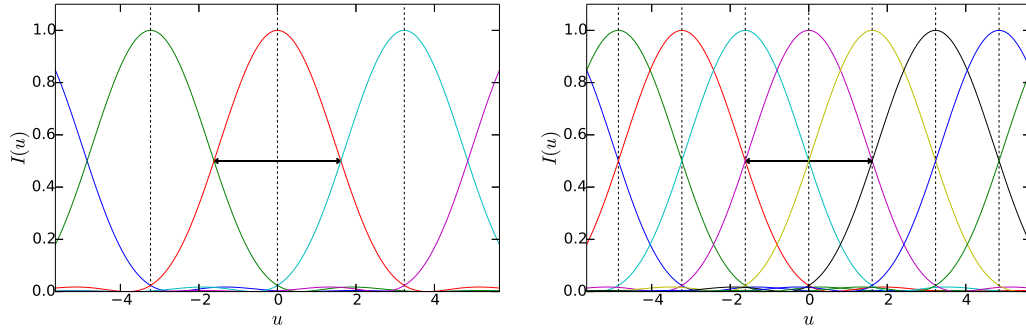
$$\Delta\theta = 2 \arcsin\left(\frac{\lambda u_{1/2}}{\pi D}\right) \leq \frac{2R_{\odot}}{d} \implies \frac{\lambda u_{1/2}}{\pi D} \leq \sin\left(\frac{R_{\odot}}{d}\right)$$

$$D \geq \frac{\lambda u_{1/2}}{\pi \sin\left(\frac{R_{\odot}}{d}\right)} \simeq \frac{5 \times 10^{-7} \times 1.6}{3.14159 \times \sin\left(\frac{7 \times 10^8}{140 \times 3 \times 10^{16}}\right)} \simeq 1.53 \text{ km}.$$

5. Dans la limite des petits angles

$$\Delta\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\Delta\theta/2} d\theta \sin\theta \simeq 2\pi \left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{\Delta\theta/2} = \frac{\pi}{4} \Delta\theta^2$$

6. Le critère de Shannon impose d'échantillonner le ciel avec un pas angulaire au plus égal à la moitié du FWHM. En effet, comme le montre la figure de gauche ci-dessous, l'échantillonnage avec un pas égal au FWHM laisse de larges portions du ciel mal mesurées, contrairement à ce que produit un échantillonnage plus serré, comme sur la figure de droite.



L'angle solide correspondant dans le cas de HST est donc

$$\Delta\Omega = \frac{\pi}{4} \left[\frac{\Delta\theta}{2} \right]^2 \simeq 8.8 \times 10^{-15} \text{ sr}$$

On en déduit le nombre d'éléments de résolution nécessaires pour cartographier tout le ciel :

$$N_{\text{pix}} = \frac{4\pi}{8.8 \times 10^{-15}} \simeq 1.42 \times 10^{15}$$

Si l'on devait stocker une image HST de tout le ciel codée sur 8 bits, c'est-à-dire que chaque pixel occuperait un octet, le fichier brut pèserait $1.42 \times 10^{15} / (1024^5) = 1.26 \text{ Po}$, soit l'équivalent de plus d'un millier de disques durs typiques du commerce (1 To). Le ciel est immense ! Remarquons d'autre part que cette image ne tiendrait pas compte de la dépendance en fréquence des émissions astrophysiques.