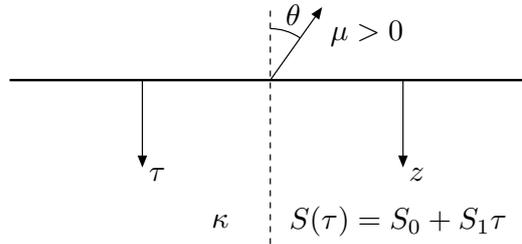


Exercices

Exercice II.1- Intensité émergent d'une étoile

On considère un milieu semi-infini homogène (coefficient d'absorption κ uniforme). La fonction source S est supposée isotrope, mais non homogène : elle augmente de façon linéaire avec la profondeur optique $S(\tau) = S_0 + S_1\tau$, où S_0 et S_1 sont des constantes vis-à-vis de τ (toutes deux positives, $S_1 > 0$ traduisant une augmentation de la température avec la profondeur). On suppose qu'il n'y a pas de diffusion. L'intensité entrante $I(\tau = 0, \mu < 0)$ est nulle et on admettra qu'aux grandes profondeurs optiques $J - S$ reste fini.



1. Montrer que l'intensité émergente a pour expression $I(\tau = 0, \mu > 0) = S_0 + \mu S_1$.
2. En déduire la valeur de l'intensité moyenne $J(\tau = 0)$ ainsi que celle du flux $F(\tau = 0)$ en fonction de S_0 et S_1 . Interpréter.
3. On effectue l'approximation d'Eddington en adoptant un modèle semi-isotrope pour représenter $I(\tau, \mu)$. Donner la forme générale de la solution pour l'intensité moyenne approchée $J_a(\tau)$. Exprimer les intensités $I^+(\tau)$ et $I^-(\tau)$ en fonction de $J_a(\tau)$ et $dJ_a(\tau)/d\tau$ et traduire les conditions aux limites à la surface et en profondeur pour obtenir la solution approchée $J_a(\tau)$.
4. Commenter la variation de $I^+(\tau)$, $I^-(\tau)$ et $J_a(\tau)$ avec τ .
5. Comparer la valeur exacte $J(\tau = 0)$ à la valeur approchée $J_a(\tau = 0)$.
6. Même question pour les flux exact $F(\tau = 0)$ et approché $F_a(\tau = 0)$.
7. Comment les résultats précédents seraient-ils modifiés si au lieu de représenter $I(\tau, \mu)$ par un modèle semi-isotrope, on adoptait le modèle à deux faisceaux ?

CORRECTION

1. On a

$$I(\tau = 0, \mu > 0) = \int_0^\infty S(\tau') e^{-\tau'/\mu} \frac{d\tau'}{\mu} = \int_0^\infty (S_0 + S_1 \mu u) e^{-u} du \quad \text{avec} \quad u = \frac{\tau'}{\mu}$$

Comme

$$\int_0^\infty e^{-u} du = 1 \quad \text{et} \quad \int_0^\infty u e^{-u} du = 1$$

on en déduit que

$$I(\tau = 0, \mu > 0) = S_0 + S_1 \mu.$$

Remarquons que si $S_1 \ll S_0$ (c'est-à-dire que la fonction source est quasiment uniforme), alors $I(\tau = 0, \mu > 0)$ est sensiblement isotrope vers l'extérieur de l'étoile. Si $S_1 > 0$ l'intensité présente un excès pour $\mu \simeq 1$ et, inversement, si $S_1 < 0$ l'intensité présente un déficit vers $\mu \simeq 1$.

2. L'intensité moyenne à la surface est alors, puisque $I(\tau = 0, \mu < 0) = 0$ par hypothèse,

$$J(\tau = 0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\tau = 0, \mu) d\mu = \frac{1}{2} \int_0^1 I(\tau = 0, \mu) d\mu = \frac{1}{2} \int_0^1 (S_0 + S_1 \mu) d\mu = \frac{S_0}{2} + \frac{S_1}{4}$$

Quant au flux à la surface, on a

$$F(\tau = 0) = 2\pi \int_0^1 \mu I(\tau = 0, \mu) d\mu = 2\pi \int_0^1 (S_0 \mu + S_1 \mu^2) d\mu = \pi \left(S_0 + \frac{2S_1}{3} \right).$$

3. On adopte un modèle semi-isotrope pour représenter $I(\tau, \mu)$, soit

$$I(\tau, \mu) = \begin{cases} I^+(\tau) & \text{pour } \mu \geq 0 \\ I^-(\tau) & \text{pour } \mu < 0 \end{cases}$$

et on va chercher à obtenir une approximation J_a de l'intensité moyenne J et une approximation F_a du flux F . On utilise pour cela l'approximation d'Eddington, qui consiste à écrire la relation

$$p_a = \frac{4\pi}{3c} J_a$$

entre J_a et l'approximation p_a de la pression de radiation p . On sait qu'alors l'intensité moyenne approchée J_a obéit à l'équation

$$\frac{1}{3} \frac{d^2 J_a}{d\tau^2} = J_a - S.$$

La fonction source étant donnée, la solution de cette équation différentielle du second ordre est

$$J_a(\tau) = S_0 + S_1 \tau + C_1 e^{-\sqrt{3}\tau} + C_2 e^{\sqrt{3}\tau}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration.

D'autre part, dans le modèle semi-isotrope choisi, on rappelle que

$$J_a = \frac{1}{2} (I^+ + I^-) \quad \text{et} \quad F_a = \pi (I^+ - I^-)$$

de sorte qu'on en tire

$$I^+(\tau) = J_a + \frac{F_a}{2\pi} = J_a + \frac{2}{3} \frac{dJ_a}{d\tau} \quad \text{et} \quad I^-(\tau) = J_a - \frac{F_a}{2\pi} = J_a - \frac{2}{3} \frac{dJ_a}{d\tau}$$

Ce modèle est bien entendu une approximation, puisque déjà pour $\tau = 0$ il donne une intensité sortante indépendante de μ , ce qui n'est pas vrai en général, mais à peu près vérifié pour $S_1 \ll S_0$.

Les conditions aux limites sont

$$I(0, \mu < 0) = I^-(0) = 0 \quad \text{et} \quad J_a - S \text{ reste fini pour } \tau \rightarrow \infty$$

La première implique que

$$J_a(0) - \frac{2}{3} \frac{dJ_a}{d\tau}(0) = 0$$

et la seconde que

$$C_2 = 0$$

Remarquons que le modèle semi-isotrope permet de tenir compte simplement de la première condition, ce qu'on n'aurait pas pu faire avec $I = I_0 + \mu I_1$. On a alors

$$J_a(0) = S_0 + C_1 \quad \text{et} \quad \frac{dJ_a}{d\tau}(0) = S_1 - \sqrt{3}C_1 \quad \text{donc} \quad S_0 + C_1 - \frac{2}{3} (S_1 - \sqrt{3}C_1) = 0$$

d'où l'on tire la constante

$$C_1 = -\frac{S_0 - \frac{2}{3}S_1}{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}} \simeq -0.464S_0 + 0.309S_1$$

et donc l'intensité moyenne approchée

$$J_a(\tau) = S_0 + S_1\tau - \frac{S_0 - \frac{2}{3}S_1}{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}} e^{-\sqrt{3}\tau}.$$

4. Lorsque τ augmente, on voit que $J_a(\tau)$ approche rapidement $S(\tau)$, tandis que $I^+(\tau) \rightarrow J_a + (2/3)S_1$ et $I^-(\tau) \rightarrow J_a - (2/3)S_1$. Le coefficient C_1 étant négatif (car $S_1 < S_0$), $J_a < S$. On représente sur la Fig. 2.4.4 les variations de S , J_a , I^+ et I^- en fonction de la profondeur optique τ .

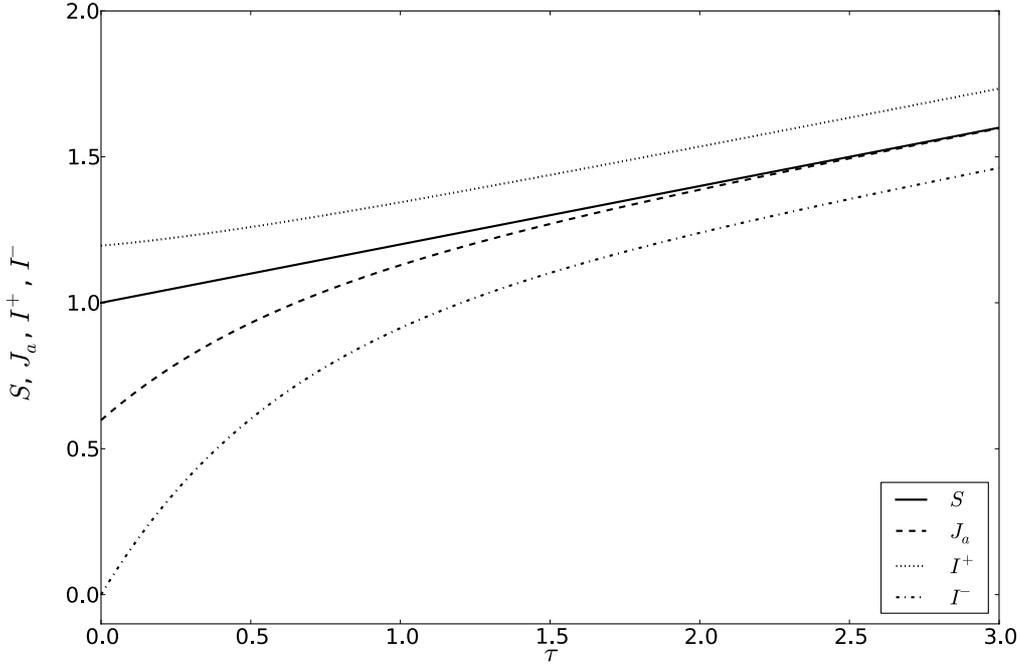


FIGURE 2.20 – Evolution de $S(\tau)$, $J_a(\tau)$, $I^+(\tau)$ et $I^-(\tau)$ avec la profondeur optique τ .

5. On trouve $J_a(0) \simeq 0.54S_0 + 0.31S_1$, tandis que la valeur exacte était $J(0) = 0.5S_0 + 0.25S_1$. Notre approximation conduit donc à surestimer l'intensité moyenne à la surface.

6. On trouve $F_a(0) \simeq 3.37S_0 + 1.94S_1$, tandis que la valeur exacte était $F(0) = 3.14S_0 + 2.09S_1$.

7. Le modèle à deux faisceaux consiste à écrire $I(\tau, \mu) = I^+(\tau)\delta(\mu - \mu_0) + I^-(\tau)\delta(\mu + \mu_0)$ et il permet aussi d'écrire la condition $I(0, \mu < 0) = 0$ (via $I^-(0) = 0$) et est compatible avec l'approximation d'Eddington pour $\mu_0 = 1/\sqrt{3}$. Dans ce modèle on a

$$I^+ = J_a + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dJ_a}{d\tau} \quad \text{et} \quad I^- = J_a - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dJ_a}{d\tau}$$

et d'autre part le flux est donné par

$$F_a = 2\pi\mu_0 (I^+ - I^-) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} (I^+ - I^-) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{dJ_a}{d\tau} = \frac{4\pi}{3} \frac{dJ_a}{d\tau}$$

La condition $I^-(0) = 0$ fournit une nouvelle valeur de la constante C_1 , soit

$$C_1 = - \left(\frac{S_0}{2} - \frac{S_1}{2\sqrt{3}} \right)$$

ce qui conduit à

$$J_a(0) = S_0 + C_1 = \frac{1}{2}S_0 + \frac{S_1}{2\sqrt{3}} \simeq 0.5S_0 + 0.289S_1,$$

valeur sensiblement plus proche de la valeur exacte trouvée plus haut. Le flux est quant à lui

$$F_a(0) = \frac{4\pi}{3} \frac{dJ_a}{d\tau}(0) = \frac{4\pi}{3} (S_1 - \sqrt{3}C_1) = \frac{4\pi}{3} \left[S_1 + \sqrt{3} \left(\frac{S_0}{2} - \frac{S_1}{2\sqrt{3}} \right) \right]$$

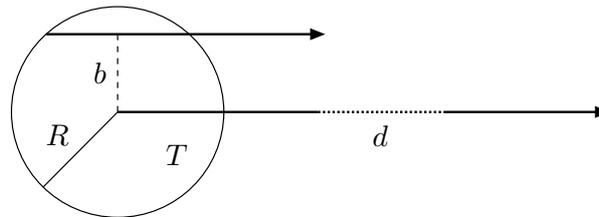
soit

$$F_a(0) = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}S_0 + \frac{S_1}{2} \right) \simeq 3.63S_0 + 2.09S_1$$

Le modèle $I(\tau, \mu) = I_0(\tau) + \mu I_1(\tau)$ (plus réaliste en général car fonction continue de μ sauf à la surface) ne peut être utilisé car il ne permet pas d'imposer $\forall \mu < 0 \ I(0, \mu) = 0$.

Exercice II.2- Brillance d'un nuage interstellaire

On considère un nuage de gaz interstellaire à la température T émettant thermiquement avec une émissivité intégrée sur les directions $P(\nu)$. Le nuage est sphérique, de rayon R , et situé à une distance $d \gg R$ de l'observateur.



1. En supposant que le nuage est optiquement mince, quelle est sa brillance mesurée par l'observateur? On exprimera le résultat en fonction de la distance b au centre du nuage, projetée sur le plan du ciel, comme indiqué sur la figure, en faisant l'hypothèse simplificatrice qu'on peut considérer l'observateur comme étant situé à l'infini.

2. Quelle est la température effective du nuage? La comparer à la température T du nuage.

3. Calculer la densité spectrale de flux F_ν mesurée par l'observateur.

4. Reprendre les questions précédentes en supposant cette fois que le nuage est optiquement épais.

CORRECTION

1. L'émissivité intégrée sur toutes les directions étant $P(\nu)$, l'émissivité telle que définie dans le cours est

$$\epsilon_\nu = \frac{P(\nu)}{4\pi}$$

En supposant que le nuage est optiquement mince, on a $\kappa_\nu \simeq 0$, donc en intégrant l'équation du transfert le long du rayon indiqué sur la figure, on a

$$I_\nu(b) = \int \epsilon_\nu ds = \frac{P(\nu)}{2\pi} \sqrt{R^2 - b^2}$$

car la longueur de la ligne de visée au travers du nuage est $2\sqrt{R^2 - b^2}$.

2. La puissance totale (luminosité) émise par le nuage est

$$L = \frac{4\pi}{3} R^3 \int_0^\infty P(\nu) d\nu = \frac{4\pi}{3} R^3 P = \int_0^\infty L_\nu d\nu \quad \text{avec} \quad L_\nu = \frac{4\pi}{3} R^3 P(\nu)$$

or la définition de la température effective est

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4$$

donc

$$T_{\text{eff}} = \left(\frac{PR}{3\sigma} \right)^{1/4}.$$

Comment cette température se compare-t-elle à la température T ? Pour répondre à cette question, on écrit que le nuage émet thermiquement, la fonction source étant alors $S_\nu = B_\nu(T)$, et on écrit la solution de l'équation du transfert (sans rayonnement incident à l'arrière du nuage) sous la forme

$$I_\nu(\tau_\nu) = \int S_\nu e^{-\tau'_\nu} d\tau'_\nu = B_\nu(T) \int e^{-\tau'_\nu} d\tau'_\nu = B_\nu(T) (1 - e^{-\tau_\nu}) \simeq \tau_\nu B_\nu(T) = \kappa_\nu D B_\nu(T)$$

avec $\kappa_\nu \simeq 0$ le coefficient d'absorption et $D = 2\sqrt{R^2 - b^2}$ la longueur de la ligne de visée au travers du nuage. En rapprochant cette expression de la précédente, on a

$$P(\nu) = 4\pi \kappa_\nu B_\nu(T)$$

et par conséquent

$$P = 4\pi \int \kappa_\nu B_\nu(T) \simeq 4\pi \kappa_0 \int B_\nu(T) = 4\kappa_0 \sigma T^4$$

en faisant l'approximation d'un coefficient d'absorption indépendant de la fréquence $\kappa_\nu \simeq \kappa_0$. On a alors

$$T_{\text{eff}} = \left(\frac{R}{3\sigma} \times 4\kappa_0 \sigma T^4 \right)^{1/4} \sim T \tau_0^{1/4} \ll T.$$

3. On note d la distance du nuage à l'observateur ($d \gg R$). La conservation de l'énergie donne la densité spectrale de flux au niveau de l'observateur

$$F_\nu = \frac{L_\nu}{4\pi d^2} = P(\nu) \frac{R^3}{3d^2}$$

4. On suppose maintenant que le nuage est optiquement épais. Cette fois, la solution de l'équation du transfert (sans rayonnement incident à l'arrière du nuage) est

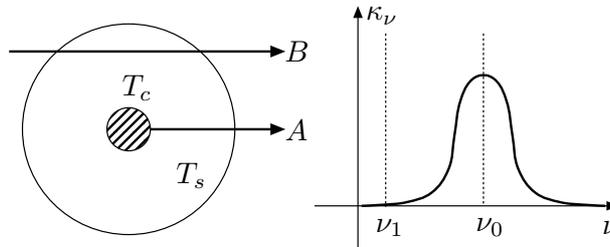
$$I_\nu(\tau_\nu) = \int S_\nu e^{-\tau'_\nu} d\tau'_\nu = B_\nu(T) \int e^{-\tau'_\nu} d\tau'_\nu = B_\nu(T) (1 - e^{-\tau_\nu}) \simeq B_\nu(T)$$

qui est indépendant du paramètre d'impact b , contrairement à la situation optiquement mince. Comme $I_\nu = B_\nu(T)$, le flux à la surface est celui du corps noir à la température T , donc $T_{\text{eff}} = T$ et la densité spectrale de flux au niveau de l'observateur est

$$F_\nu = \pi \left(\frac{R}{d} \right)^2 B_\nu(T).$$

Exercice II.3- Emission d'un objet dense et de son enveloppe

Un objet sphérique et opaque émettant comme un corps noir à la température T_c est entouré d'une enveloppe elle aussi sphérique, émettant thermiquement à la température $T_s < T_c$. Cette enveloppe absorbe le rayonnement dans une étroite raie spectrale, ce qui signifie que son coefficient d'absorption κ_ν est important au voisinage de ν_0 et négligeable partout ailleurs, comme indiqué sur la figure ($\kappa_{\nu_0} \gg \kappa_{\nu_1}$). L'objet est observé aux fréquences ν_0 et ν_1 et le long des deux rayons A et B . On pourra supposer que la fonction de Planck ne varie pas appréciablement entre ν_0 et ν_1 .



1. À quelle fréquence la brillance observée sera-t-elle maximale pour le rayon A ? Même question si $T_s > T_c$.

2. À quelle fréquence la brillance observée sera-t-elle maximale pour le rayon B ? Même question si $T_s > T_c$.

CORRECTION

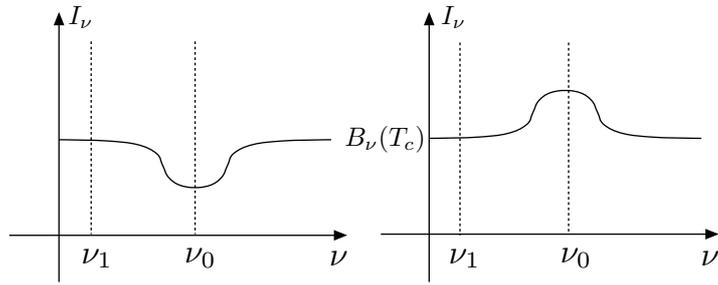
1. Le rayon A part de l'objet central avec une intensité donnée par le rayonnement du corps noir à T_c , soit $I_\nu = B_\nu(T_c)$. À la fréquence ν_1 , l'absorption de l'enveloppe est négligeable, de sorte que l'intensité émergente de la couche est sensiblement inaltérée, donc $I_{\nu_1}(A) \simeq B_\nu(T_c)$. À la fréquence ν_0 où le coefficient d'absorption de l'enveloppe n'est pas négligeable, on a recours à la solution de l'équation du transfert en supposant que l'enveloppe est homogène et que sa fonction source est celle d'un corps noir à la température T_s ,

$$I_\nu = B_\nu(T_c)e^{-\tau_\nu} + B_\nu(T_s)(1 - e^{-\tau_\nu}) = B_\nu(T_s) + [B_\nu(T_c) - B_\nu(T_s)]e^{-\tau_\nu}$$

avec $\tau_\nu = \kappa_\nu L$ et L la longueur traversée par le rayon au travers de l'enveloppe. Comme on suppose $T_s < T_c$, l'intensité spécifique qui vaut $B_\nu(T_c)$ à l'entrée dans l'enveloppe décroît (et tendrait vers $B_\nu(T_s)$ à la limite $\tau_\nu \rightarrow \infty$) au fur et à mesure que le rayon progresse vers l'extérieur. On a donc $I_{\nu_0}(A) < I_{\nu_1}(A)$ (raie en absorption). Inversement, si $T_s > T_c$, on a $I_{\nu_0}(A) > I_{\nu_1}(A)$ (raie en émission).

2. Pour le rayon B , l'intensité de départ est nulle, donc l'équation du transfert donne

$$I_\nu = B_\nu(T_s)(1 - e^{-\tau_\nu})$$



donc l'intensité émergente est d'autant plus importante que l'épaisseur optique est grande. On en conclut que $I_{\nu_0}(B) > I_{\nu_1}(B) = 0$. La nullité de $I_{\nu_1}(B)$ est liée à l'hypothèse $\kappa_{\nu_1} = 0$, et l'intensité en ν_0 sera quelque part entre 0 et $B_\nu(T_s)$, donc d'autant plus grande que T_s est grande.

