Master Recherche 2e année
Astronomie, Astrophysique et Ingénierie Spatiale
Année 2013-2014

FL3
Emmanuel Dartois
François Levrier

Examen - correction

9 janvier 2014

Partie A : Transfert de rayonnement

I - Modélisation d'un disque de galaxie

1.

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}Y} = \epsilon_i - \kappa_i I \quad \Longrightarrow \quad I_{D'} = I_{\mathrm{bg}} e^{-\kappa_i H} + \frac{\epsilon_i}{\kappa_i}\left(1 - e^{-\kappa_i H}\right) \tag{1.1}$$

2.

$$I_{D'} = \frac{\epsilon_i}{\kappa_i}\left(1 - e^{-\kappa_i H}\right) \tag{1.2}$$

3.

$$\kappa_i \to 0 \quad \Longrightarrow \quad I_{D'} = \epsilon_i H \tag{1.3}$$

$$\kappa_i \to \infty \quad \Longrightarrow \quad I_{D'} = \frac{\epsilon_i}{\kappa_i} \tag{1.4}$$

4.

$$h_1 = y - \sqrt{a^2 - x^2} \tag{1.5}$$

$$h_n = 2\sqrt{a^2 - x^2} \tag{1.6}$$

$$h_2 = H - y - \sqrt{a^2 - x^2} \tag{1.7}$$

5.

$$I_B = \frac{\epsilon_i}{\kappa_i}\left(1 - e^{-\kappa_i h_1}\right) \tag{1.8}$$

$$I_C = I_B e^{-\kappa_n h_n} + \frac{\epsilon_n}{\kappa_n}\left(1 - e^{-\kappa_n h_n}\right) \tag{1.9}$$

$$I_D = I_C e^{-\kappa_i h_2} + \frac{\epsilon_i}{\kappa_i}\left(1 - e^{-\kappa_i h_2}\right) \tag{1.10}$$

6.

$$x = 0 \quad \Longrightarrow \quad h_1 = y - a \qquad h_n = 2a \qquad h_2 = H - y - a \tag{1.11}$$

On insère (1.8) et (1.9) dans (1.10) et on regroupe les termes en $e^{\kappa_i y}$ pour faire apparaître le résultat

$$I_D(0,y) = S_i \left\{1 - e^{-[2\kappa_n a + \kappa_i (H-2a)]}\right\} + (S_n - S_i)\, e^{-\kappa_i (H-a)} \left(1 - e^{-2\kappa_n a}\right) e^{\kappa_i y} \tag{1.12}$$

Dans le cas $0 < x \leqslant a$, il suffit de faire le changement $a \to \sqrt{a^2 - x^2}$.

7.

$$\kappa_n \to \infty \quad \Longrightarrow \quad I_D(0,y) = S_i \left\{1 - \exp\left[-\kappa_i \left(H - y - a\right)\right]\right\} \quad \text{[Ne pas oublier que } S_n \to 0.] \tag{1.13}$$

Ce résultat est simplement l'application de (1.2) sur la distance $H - y - a$.

8.

$$\text{Résolution angulaire :} \quad \delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{d} = 6.1 \times 10^{-7}\,\text{rad} \tag{1.14}$$

$$\text{Taille apparente d'un nuage :} \quad \delta\alpha = \frac{2a}{D} = 2 \times 10^{-7}\,\text{rad} \tag{1.15}$$

On ne peut pas résoudre spatialement les nuages individuels.

9.

$$\langle I_1 \rangle = \frac{1}{H-2a} \int_a^{H-a} I_D(0,y)\mathrm{d}y = S_i \left\{1 - e^{-[2\kappa_n a + \kappa_i (H-2a)]}\right\} + \frac{S_n - S_i}{\kappa_i (H-2a)} \left[1 - e^{-2\kappa_n a}\right] \left[1 - e^{-\kappa_i (H-2a)}\right] \tag{1.16}$$

10.

$$f = \frac{n\pi a^2}{\pi R^2} = n \left(\frac{a}{R}\right)^2 \tag{1.17}$$

La justification est que les nuages ne se recouvrent pas.

11.

$$\langle I \rangle = f \langle I_1 \rangle + (1-f) I_0 \tag{1.18}$$

$$S_i, \kappa_i \to 0 \quad \Longrightarrow \quad I_0 = 0 \quad \text{et} \quad I_1 = S_n \left(1 - e^{-2\kappa_n a}\right) \quad \Longrightarrow \quad \langle I \rangle = f S_n \left(1 - e^{-2\kappa_n a}\right) \tag{1.19}$$

II - Observation historique du fond diffus cosmologique

1.

$$\frac{W_\alpha}{f_\alpha \lambda_\alpha^2} = \frac{W_\beta}{f_\beta \lambda_\beta^2} \tag{2.1}$$

Si α n'est pas optiquement mince mais β oui, on a

$$\frac{W_\alpha}{f_\alpha \lambda_\alpha^2} < \frac{W_\beta}{f_\beta \lambda_\beta^2} \tag{2.2}$$

2.

$$1.13 \times 10^{20} \frac{W_d}{f_d \lambda_d^2} = 1.13 \times 10^{20} \frac{(0.81 \pm 0.10) \times 10^{-3}}{0.0205 \times (3873.369)^2} = (2.98 \pm 0.37) \times 10^{11}\,\mathrm{cm}^{-2} \tag{2.3}$$

$$1.13 \times 10^{20} \frac{W_e}{f_e \lambda_e^2} = 1.13 \times 10^{20} \frac{(0.64 \pm 0.12) \times 10^{-3}}{0.0137 \times (3876.310)^2} = (3.51 \pm 0.66) \times 10^{11}\,\mathrm{cm}^{-2} \tag{2.4}$$

Les valeurs sont compatibles, aux incertitudes de mesure près : les raies d et e, issues du même niveau, sont optiquement minces.

$$1.13 \times 10^{20} \frac{W_g}{f_g \lambda_g^2} = 1.13 \times 10^{20} \frac{(2.49 \pm 0.25) \times 10^{-3}}{0.0020 \times (3579.453)^2} = (1.10 \pm 0.11) \times 10^{13}\,\mathrm{cm}^{-2} \tag{2.5}$$

$$1.13 \times 10^{20} \frac{W_h}{f_h \lambda_h^2} = 1.13 \times 10^{20} \frac{(1.18 \pm 0.23) \times 10^{-3}}{0.0010 \times (3580.937)^2} = (1.04 \pm 0.20) \times 10^{13}\,\mathrm{cm}^{-2} \tag{2.6}$$

Les valeurs sont compatibles, aux incertitudes de mesure près : les raies g et h, issues du même niveau, sont optiquement minces.

$$1.13 \times 10^{20} \frac{W_b}{f_b \lambda_b^2} = 1.13 \times 10^{20} \frac{(23.44 \pm 0.12) \times 10^{-3}}{0.0228 \times (3873.998)^2} = (7.74 \pm 0.04) \times 10^{12}\,\mathrm{cm}^{-2} \tag{2.7}$$

$$1.13 \times 10^{20} \frac{W_c}{f_c \lambda_c^2} = 1.13 \times 10^{20} \frac{(13.66 \pm 0.12) \times 10^{-3}}{0.0114 \times (3875.763)^2} = (9.01 \pm 0.08) \times 10^{12}\,\mathrm{cm}^{-2} \tag{2.8}$$

Les valeurs sont incompatibles. La raie b (au moins) n'est pas optiquement mince.

$$1.13 \times 10^{20} \frac{W_a}{f_a \lambda_a^2} = 1.13 \times 10^{20} \frac{(44.16 \pm 0.12) \times 10^{-3}}{0.0342 \times (3874.608)^2} = (9.72 \pm 0.03) \times 10^{12}\,\mathrm{cm}^{-2} \tag{2.9}$$

$$1.13 \times 10^{20} \frac{W_f}{f_f \lambda_f^2} = 1.13 \times 10^{20} \frac{(8.07 \pm 0.24) \times 10^{-3}}{0.0030 \times (3579.963)^2} = (2.37 \pm 0.07) \times 10^{13}\,\mathrm{cm}^{-2} \tag{2.10}$$

Les valeurs sont incompatibles. La raie a (au moins) n'est pas optiquement mince.

3. On utilise les valeurs calculées pour les raies g ($J = 1$) et e ($J = 2$)

$$N_1 = (1.10 \pm 0.11) \times 10^{13}\,\mathrm{cm}^{-2} \tag{2.11}$$

$$N_2 = (3.51 \pm 0.66) \times 10^{11}\,\mathrm{cm}^{-2} \tag{2.12}$$

4.

$$g_J = 2J + 1 \tag{2.13}$$

5. L'hypothèse d'homogénéité permet d'identifier densités et densités de colonne :

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{E_{21}}{kT_x}\right) \tag{2.14}$$

on a alors

$$T_x = \frac{E_{21}}{k \ln\left(\frac{g_2 N_1}{g_1 N_2}\right)} = \frac{0.940 \times 1.6 \times 10^{-22}}{1.38 \times 10^{-23} \times \ln\left(\frac{5 \times 1.10 \times 10^{13}}{3 \times 3.51 \times 10^{11}}\right)} = 2.76\,\mathrm{K} \tag{2.15}$$

Partie B : Atomes, molécules, solides

I - Manteaux de glace interstellaire

1. Le taux de croissance du manteau est indépendant de la taille :

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4\pi a^2 \rho} \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4\pi a^2 \rho} \times S\pi a^2 n \langle v \rangle \langle m \rangle = \frac{Sn\langle v \rangle \langle m \rangle}{4\rho} \tag{1.1}$$

On s'attend donc à un manteau de glace d'épaisseur indépendante de la taille du cœur silicaté.

2. On considère un grain de rayon $\langle a \rangle = 0.1\,\mu\mathrm{m}$ et de composition $\mathrm{MgFeSiO_4}$. On en déduit son volume, puis sa masse via la densité ρ_{olivine} donnée. On en tire le nombre de moles de $\mathrm{MgFeSiO_4}$ qu'il contient, via la masse molaire $M_{\mathrm{MgFeSiO_4}} = 172\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$. Ce nombre est aussi celui des moles de Si. Le nombre de moles de O correspondant est donné par une règle de trois en utilisant les abondances des éléments fournies. Pour chaque mole de silicium, 4 moles d'oxygène sont incluses dans l'olivine. Le reste est disponible pour former la glace d'eau. On en déduit, via la masse molaire $M_{\mathrm{H_2O}} = 18\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$ et la densité de la glace ρ_{glace}, le volume de la couche de glace autour du grain. Cette couche étant une coquille sphérique autour du grain de rayon $\langle a \rangle$, on en tire son épaisseur δ :

$$\delta = \langle a \rangle \left\{ \left[1 + \left(\frac{X_{\mathrm{O}}}{X_{\mathrm{Si}}} - 4 \right) \frac{M_{\mathrm{H_2O}}}{M_{\mathrm{MgFeSiO_4}}} \frac{\rho_{\mathrm{olivine}}}{\rho_{\mathrm{glace}}} \right]^{1/3} - 1 \right\} \tag{1.2}$$

A.N.

$$\delta = 0.1 \times \left\{ \left[1 + \left(\frac{575.4}{40.7} - 4 \right) \times \frac{18}{172} \times \frac{3.22}{0.9} \right]^{1/3} - 1 \right\} \simeq 69\,\mathrm{nm} \tag{1.3}$$

Vu l'abondance plus faible du fer, celle ci est en réalité le facteur limitant, donc une réponse plus correcte (mais la première est aussi acceptable) serait

$$\delta = \langle a \rangle \left\{ \left[1 + \left(\frac{X_{\mathrm{O}}}{X_{\mathrm{Fe}}} - 4 \right) \frac{M_{\mathrm{H_2O}}}{M_{\mathrm{MgFeSiO_4}}} \frac{\rho_{\mathrm{olivine}}}{\rho_{\mathrm{glace}}} \right]^{1/3} - 1 \right\} \tag{1.4}$$

A.N.

$$\delta = 0.1 \times \left\{ \left[1 + \left(\frac{575.4}{34.7} - 4 \right) \times \frac{18}{172} \times \frac{3.22}{0.9} \right]^{1/3} - 1 \right\} \simeq 79\,\mathrm{nm} \tag{1.5}$$

Dans le cours, on donne $\delta \simeq 100\,\mathrm{nm}$.

3.

$$\frac{v_{\mathrm{glace}}}{v_{\mathrm{grain}}} = \left(1 + \frac{\delta}{a}\right)^3 - 1 \tag{1.6}$$

Résultats possibles pour ce rapport :

δ	69 nm	79 nm	100 nm
a_{min}	5.2×10^6	7.8×10^6	1.6×10^7
a_{max}	0.85	1.02	1.37

4.

$$N_{\mathrm{H_2O}} = \frac{1.4 \times 300}{20 \times 10^{-17}} = 2.1 \times 10^{18}\,\mathrm{cm}^{-2} \tag{1.7}$$

$$N_{\mathrm{CO_2}} = \frac{1.8 \times 20}{7.6 \times 10^{-17}} = 4.7 \times 10^{17}\,\mathrm{cm}^{-2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{N_{\mathrm{CO_2}}}{N_{\mathrm{H_2O}}} \simeq 0.22 \tag{1.8}$$

$$N_{\mathrm{Silicates}} = \frac{1.6 \times 100}{16 \times 10^{-17}} = 10^{18}\,\mathrm{cm}^{-2} \tag{1.9}$$

5. La détermination de la glace qu'on observera en premier à densités de colonne égales ($N_{\mathrm{H_2O}} = N_{\mathrm{CO_2}}$) se fait en considérant la "profondeur" de la raie, qu'on estime par

$$\tau_{\mathrm{max}} \approx \frac{NA}{\Delta\nu} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\tau_{\mathrm{CO_2}}}{\tau_{\mathrm{H_2O}}} \approx \frac{A_{\mathrm{CO_2}}}{A_{\mathrm{H_2O}}} \frac{\Delta\nu_{\mathrm{H_2O}}}{\Delta\nu_{\mathrm{CO_2}}} = \frac{7.6}{20} \times \frac{300}{20} = 5.7 > 1 \tag{1.10}$$

On observera donc d'abord la glace de CO_2.

II - Atomes d'hydrogène : milieu interstellaire et photosphères stellaires

1.

$$r_n = a_0 n^2 \frac{m_e}{\mu Z} \simeq a_0 n^2 \qquad \mu = m_e \text{ et } Z = 1 \quad \Longrightarrow \quad r_{100} = 10^4 a_0 = 0.53\,\mu\mathrm{m} \tag{2.1}$$

2. L'atome d'hydrogène dans l'état n occupe un volume d'interaction

$$v_n \simeq \frac{4\pi}{3} r_n^3 \quad \Longrightarrow \rho_{\mathrm{max}} = \frac{1}{v_n} = \frac{3}{4\pi r_n^3} = \frac{3}{4\pi \times (5.3 \times 10^{-7})^3} = 1.6 \times 10^{18}\,\mathrm{m}^{-3} = 1.6 \times 10^{12}\,\mathrm{cm}^{-3} \tag{2.2}$$

3.

$$\nu_{\mathrm{H100}} = \frac{E_{100} - E_{99}}{h} = \frac{E_\infty}{h}\left(\frac{1}{99^2} - \frac{1}{100^2}\right) = \frac{13.6 \times 1.6 \times 10^{-19}}{6.62606957 \times 10^{-34}} \left(\frac{1}{99^2} - \frac{1}{100^2}\right) \simeq 6.668\,\mathrm{GHz} \tag{2.3}$$

C'est un photon émis dans le domaine des micro-ondes.

4.

$$n_\odot = \left(\frac{3}{4\pi a_0^3 \rho_\odot}\right)^{1/6} = \left[\frac{3}{4\pi \times (5.3\times 10^{-11})^3 \times 10^{23}}\right]^{1/6} \simeq 15.88 \quad \Longrightarrow \quad n_\odot = 15 \tag{2.4}$$

5.

$$\frac{\rho_\star}{\rho_\odot} = \frac{M}{M_\odot}\frac{T_\odot}{T_{\rm eff}}\left(\frac{R_\odot}{R}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad \rho_\star = \frac{1}{50}\rho_\odot = 2\times 10^{21}\,\mathrm{m}^{-3} \tag{2.5}$$

$$n_\star = \left(\frac{3}{4\pi a_0^3 \rho_\star}\right)^{1/6} = \left[\frac{3}{4\pi \times (5.3\times 10^{-7})^3 \times 2\times 10^{21}}\right]^{1/6} \simeq 30.48 \quad \Longrightarrow \quad n_\star = 30 \tag{2.6}$$

Ces étoiles présentent donc un spectre plus riche.

6. Pour chaque niveau n, on a $l = 0, \ldots, n-1$. On peut accepter deux réponses :
► Si on compte ensemble les états de même n mais de l différents :

$$N_{\rm raies}\,(n = 5 \to n' = 1, 2, 3, 4) = 4 \tag{2.7}$$

Les probabilités étant égales, on a 25 photons dans chacune de ces raies.
► Si on compte ces états séparément :

$$N_{\rm raies}\,(n = 5 \to n' = 1, 2, 3, 4) = \sum_{n'=1}^{4} n' = 10 \tag{2.8}$$

Les probabilités étant égales, on a 10 photons dans chacune de ces raies.
NB : En toute rigueur, il faudrait aussi compter les transitions ultérieures. Dans ce cas, en comptant ensemble les états de même n mais de l différents, il faut ajouter 6 transitions ($4 \to 3$, $4 \to 2$, etc...), soit 10 au total. Dans le cas où l'on compte séparément les états de l différents, il faut ajouter $4\times3+3\times2+2\times1 = 20$ soit au total 30 transitions (ceci en supposant que la valeur de l initiale est la même pour tous les photons).

7. Il n'y a que deux transitions possibles :

$$(n = 5, l = 3) \to (n = 4, l = 2) \tag{2.9}$$
$$(n = 5, l = 3) \to (n = 3, l = 2) \tag{2.10}$$

Les probabilités étant égales, on a 50 photons dans chacune de ces raies.
NB : En toute rigueur, il faudrait aussi compter les transitions ultérieures. Dans ce cas on peut avoir les cascades suivantes :

$$(n = 4, l = 2) \to (n = 3, l = 1) \to (n = 2, l = 0) \tag{2.11}$$
$$(n = 4, l = 2) \to (n = 3, l = 1) \to (n = 1, l = 0) \tag{2.12}$$
$$(n = 4, l = 2) \to (n = 2, l = 1) \to (n = 1, l = 0) \tag{2.13}$$
$$(n = 3, l = 2) \to (n = 2, l = 1) \to (n = 1, l = 0) \tag{2.14}$$

On a 50 photons dans les transitions $(n = 3, l = 2) \to (n = 2, l = 1)$ et $(n = 2, l = 1) \to (n = 1, l = 0)$, 25 dans les transitions $(n = 4, l = 2) \to (n = 3, l = 1)$ et $(n = 4, l = 2) \to (n = 2, l = 1)$, et enfin 12.5 photons dans les transitions $(n = 3, l = 1) \to (n = 2, l = 0)$ et $(n = 3, l = 1) \to (n = 1, l = 0)$.