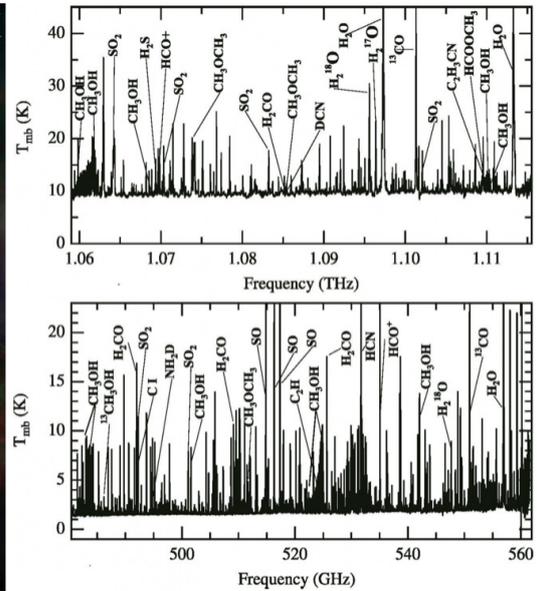


---

## Processus électromagnétiques, transfert de rayonnement et interaction matière-rayonnement

---

François Levrier  
Année 2018 – 2019



Nébuleuse d'Orion vue par HST (gauche) et spectre radio dans la région centrale observé par Herschel-HIFI (droite)

**Préambule** Le document qui suit doit beaucoup au cours de DEA enseigné auparavant par Suzy Collin puis Patrick Boissé, et aux photocopies correspondants, ainsi qu'aux ouvrages *Radiative Processes in Astrophysics* par G. B. Rybicki & A. P. Lightman [43], et *The Physics of Astrophysics I : Radiation* par F. H. Shu [45]. Le chapitre consacré aux méthodes numériques est en grande partie repris des notes de cours *Radiative Transfer in Astrophysics* de C. Dullemond [11]. Le lecteur désireux d'approfondir ses connaissances du domaine pourra aussi notamment consulter *Radiative Transfer* de S. Chandrasekhar [8], pour un exposé classique très complet, mais assez technique parfois, du problème du transfert. Cet ouvrage est désormais dans le domaine public et donc librement accessible en ligne (<https://archive.org/details/RadiativeTransfer>). Pour une approche semblable mais plus récente, on pourra consulter *An introduction to radiative transfer* de A. Peraiah [36]. Le traitement des atmosphères stellaires, vaste domaine d'application du transfert de rayonnement, est détaillé dans *Stellar Atmospheres* de D. Mihalas [26]. La description des processus de rayonnement dans le milieu interstellaire, pour lequel les effets hors équilibre sont importants, est traitée en profondeur par L. Spitzer dans *Physical Processes in the Interstellar Medium* [47] et plus récemment par B. Draine dans *Physics of the Interstellar and Intergalactic Medium* [9]. La physique de la poussière interstellaire est traitée dans *The Physics of Interstellar Dust*, de E. Krügel [20]. Une approche plus observationnelle du transfert, et notamment des raies spectrales, est disponible dans *Interpreting astronomical spectra* de D. Emerson [12]. Enfin, le traitement du transfert de rayonnement couplé aux mouvements du gaz, ce qui constitue l'hydrodynamique radiative, est traité dans *Foundations of Radiation Hydrodynamics* de D. Mihalas & B. Weibel-Mihalas [27].

## 1.1 Le spectre électromagnétique

L'essentiel de l'information accessible aux astrophysiciens pour leur permettre de comprendre les objets et phénomènes de l'Univers est porté par le rayonnement électromagnétique. D'autres sources d'information existent néanmoins, et leur importance est grandissante : particules (rayons cosmiques et neutrinos) et ondes gravitationnelles, qui viennent d'être détectées directement par l'interféromètre LIGO, via un signal caractéristique de la fusion de deux trous noirs d'une trentaine de masses solaires situés à environ 400 Mpc [23]<sup>1</sup>

Le rayonnement électromagnétique<sup>2</sup> couvre une vaste étendue en fréquence, des grandes ondes radio aux rayons gamma (Fig. 1.1), et chaque domaine du spectre fournit des renseignements complémentaires liés aux échelles d'énergie des phénomènes mis en jeu. Par les relations d'ordre de grandeur

$$E \sim h\nu \sim kT \sim hc/\lambda$$

on peut aussi associer à chaque domaine une plage de températures caractéristiques, dont on parlera au moment d'aborder le rayonnement du corps noir. Numériquement, ces relations donnent, dans des unités usuelles,

$$E [\text{eV}] \sim 4.13 \cdot 10^{-4} \times \nu [\text{GHz}] \quad \text{ou encore} \quad T [\text{K}] \sim \frac{14}{\lambda [\text{mm}]}$$

À titre d'exemples :

- ▶ Le rayonnement du fond diffus cosmologique, dans le domaine des micro-ondes, est associé à la température du bain de photons issu du découplage d'avec la matière à un redshift de  $z \sim 1100$ , et qui est aujourd'hui à 2,725 K.
- ▶ Les poussières interstellaires, dont les températures sont typiquement de l'ordre de quelques dizaines de K, émettent un rayonnement dans le domaine submillimétrique.
- ▶ Le spectre de la lumière du Soleil se situe principalement dans le domaine visible (0.4-0.8  $\mu\text{m}$ ), et est associé à sa température de surface (environ 6000 K).
- ▶ Le gaz très chaud ( $\sim 10^7$  K) dans le milieu intergalactique des amas de galaxies émet un rayonnement situé essentiellement dans le domaine des X.

1. Leur existence était déjà fortement suspectée depuis l'observation du ralentissement de pulsars binaires. La découverte du premier représentant de cette classe d'objets, PSR B1913+16, par Joseph Hooton Taylor, Jr. et Russell Hulse, avec le radiotélescope d'Arecibo en 1974, leur a valu le prix Nobel de physique en 1993.

2. Pour un traitement de la théorie de Maxwell de l'électromagnétisme, non détaillée ici, on se reportera utilement aux ouvrages de référence, notamment *Classical Electrodynamics* de J. D. Jackson [19].

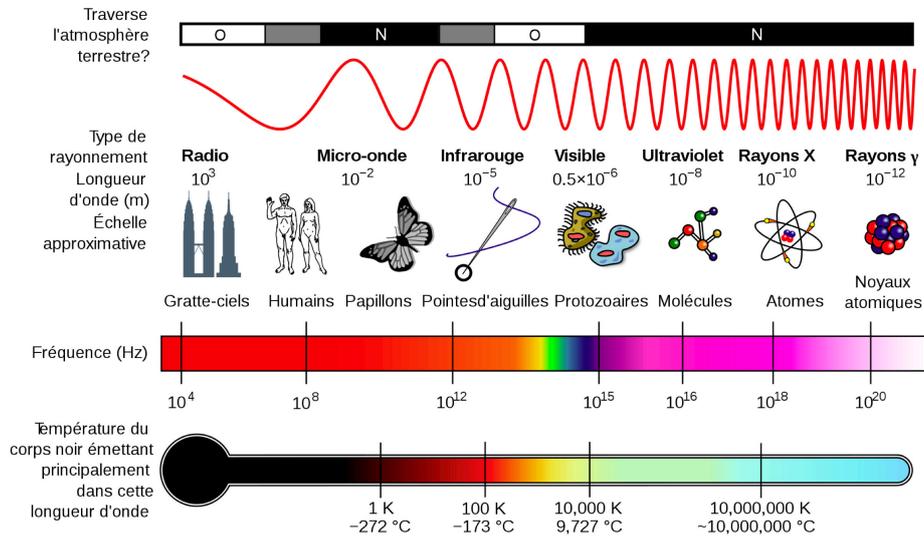


FIGURE 1.1 – Le spectre électromagnétique (Source : Wikimedia Commons)

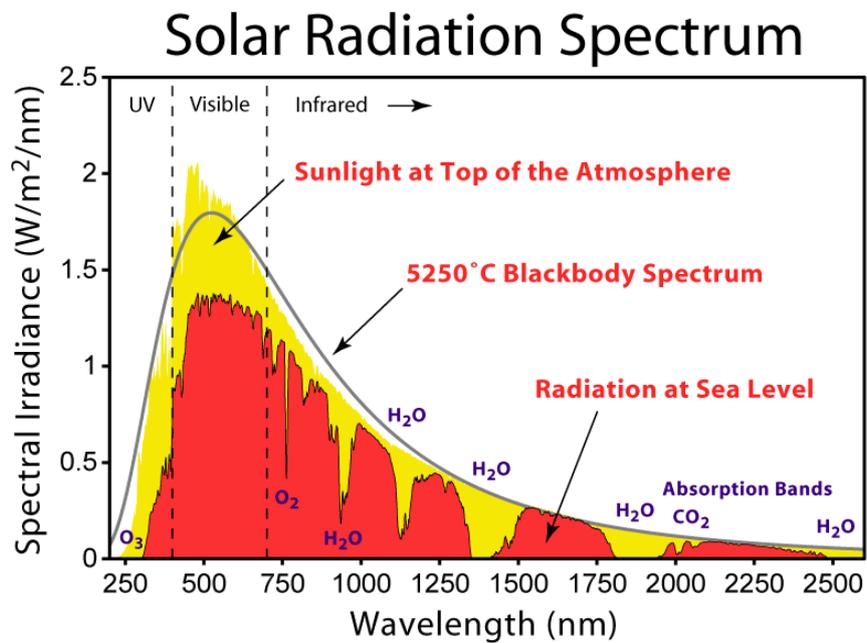


FIGURE 1.2 – Le spectre solaire (Source : Wikimedia Commons)

L'observation du ciel a naturellement commencé par le domaine visible, dans lequel le Soleil émet son maximum de rayonnement (Fig. 1.2). En 1800, William Herschel<sup>3</sup> a l'idée de mesurer la température des différentes composantes de la lumière solaire vue au travers d'un prisme (Fig. 1.3). À sa grande surprise, il découvre que la température maximale est atteinte au-delà du rouge, obtenant ainsi la première observation du rayonnement infrarouge<sup>4</sup>.

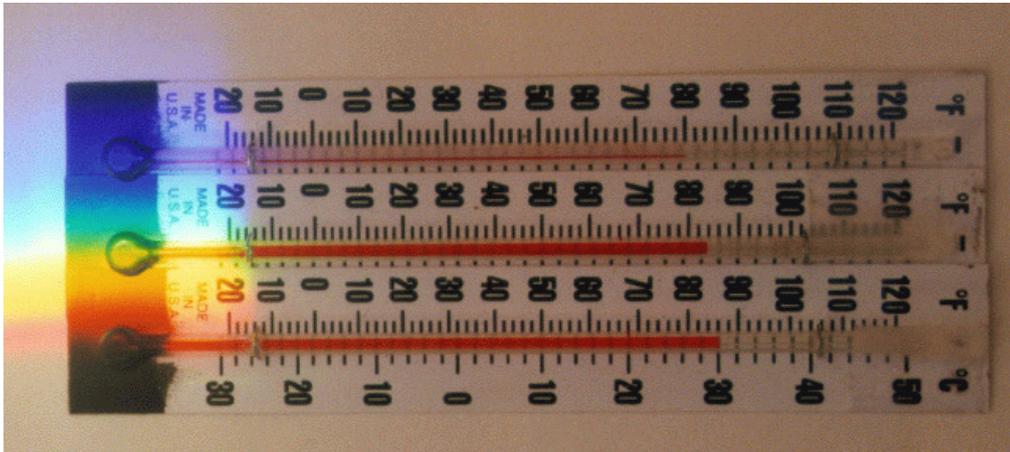


FIGURE 1.3 – **Présence de rayonnement infrarouge dans le spectre Solaire** (Source : Caltech <http://www.ipac.caltech.edu/Outreach/Edu/Herschel/backyard.html>)

L'année suivante, Johann Wilhelm Ritter<sup>5</sup> cherche à explorer l'autre extrémité du spectre visible à la façon d'Herschel. Il constate que le chlorure d'argent, dont on sait qu'il noircit en présence de lumière et que cet effet est d'autant plus marqué que l'on se rapproche du bleu, continue de noircir au-delà du spectre visible. Il découvre ainsi, en laboratoire, ce qui sera plus tard appelé rayonnement UV.

Les travaux expérimentaux de Michael Faraday<sup>6</sup> vers 1845 et l'unification théorique de l'électricité et du magnétisme par James Clerk Maxwell<sup>7</sup> en 1873 apportent une base solide à l'exploration du reste du spectre, à commencer par la démonstration éclatante de la justesse de la théorie électromagnétique dans le domaine radio par Heinrich Hertz<sup>8</sup> entre 1886 et 1888. L'ouverture du reste du spectre se fait encore dans des expériences de laboratoire : découverte des rayons X par Wilhelm Conrad Röntgen<sup>9</sup> en 1895, et des rayons  $\gamma$  par Paul Villard<sup>10</sup> en 1900.

La découverte des rayonnements d'origine astronomique dans les domaines autres que le visible et l'infrarouge commence en 1932, avec l'observation, par Karl Jansky<sup>11</sup>, d'une émission radio diffuse à 20,5 MHz ( $\lambda = 14,6$  m), dont la position du maximum coïncide avec la direction du centre Galactique, dans la constellation du Sagittaire. Jansky a ainsi profité de l'autre fenêtre du spectre à laquelle l'atmosphère terrestre est transparente pour les rayonnements électromagnétiques (Fig. 1.4).

Il a ensuite fallu attendre l'après-guerre, le développement des fusées, et l'avènement des missions spatiales pour observer le ciel dans les autres domaines du spectre, en raison précisément de l'opacité de l'atmosphère à ces fréquences. Cette opacité a des origines différentes suivant le domaine de fréquences :

► Aux basses fréquences radio (en deçà d'environ 10 MHz), l'ionosphère supprime la propagation des

3. Hanovre, 15 novembre 1738 - Slough, 25 août 1822.  
4. Il convient de noter que cette interprétation est biaisée par le caractère non-linéaire de la dispersion du prisme vis-à-vis de la longueur d'onde. L'observation d'Herschel n'en démontre pas moins l'existence du rayonnement infrarouge.  
5. Samitz, 16 décembre 1776 - Munich, 23 janvier 1810.  
6. Londres, 22 septembre 1791 - Londres, 25 août 1867.  
7. Edimbourg, 13 juin 1831 - Cambridge, 5 novembre 1879.  
8. Hambourg, 22 février 1857 - Bonn, 1<sup>er</sup> janvier 1894.  
9. Lennep, 27 mars 1845 - Munich, 10 février 1923.  
10. Saint-Germain-au-Mont-d'Or, 28 septembre 1860 - Bayonne, 13 janvier 1934.  
11. Norman, 22 octobre 1905 - Red Bank, 14 février 1950.

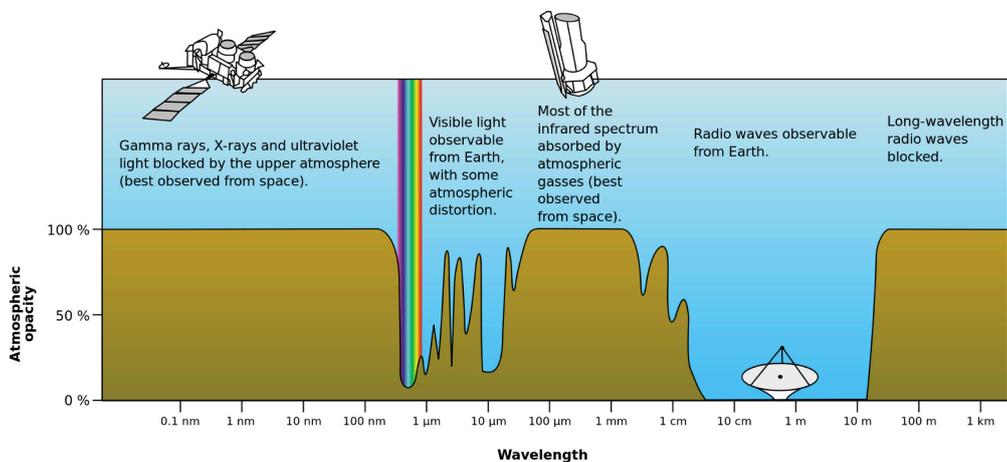


FIGURE 1.4 – L'opacité de l'atmosphère terrestre (Source : Wikimedia Commons)

ondes. La pulsation de coupure est la pulsation plasma, en dessous de laquelle une onde ne peut se propager dans cette couche ionisée de l'atmosphère, située au-delà de 60 km d'altitude :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}}$$

où  $e$  est la charge élémentaire,  $m_e$  la masse de l'électron,  $n$  la densité des électrons libres et  $\epsilon_0$  la permittivité électrique du vide. Seules les ondes de pulsation  $\omega > \omega_p$  peuvent se propager dans l'ionosphère. Inversement, on utilise la réflexion totale des ondes basse fréquence sur cette couche de l'atmosphère pour transmettre des signaux radio à grande distance, au-delà de ce que permettrait la courbure terrestre. C'est le domaine des grandes ondes.

► Dans la majeure partie du spectre infrarouge (sauf dans l'infrarouge proche<sup>12</sup>), c'est l'absorption par les gaz de l'atmosphère, en particulier par la vapeur d'eau et dans une moindre mesure par le dioxyde de carbone, qui la rend opaque (Fig. 1.2).

► Aux plus hautes fréquences, les photons UV sont absorbés par l'ozone  $O_3$  (Fig. 1.2) et les photons d'énergie encore plus grande subissent une cascade d'interactions dans la haute atmosphère qui leur fait perdre une grande partie de leur énergie jusqu'à ce qu'ils soient absorbés dans l'UV.

Avec les missions spatiales, l'ouverture du spectre électromagnétique a permis non seulement de contraindre les modèles astrophysiques, mais également de découvrir de nouveaux phénomènes, comme les sursauts  $\gamma$  (GRB, pour *Gamma-Ray Bursts*). Leur compréhension implique d'améliorer constamment les outils de l'observation, notamment en termes de sensibilité et de résolutions spatiale, spectrale, et temporelle, mais aussi en termes de nouvelles capacités, telles que la polarimétrie.

12. NIR, pour *Near Infrared* (0,75-1,4  $\mu\text{m}$ ). On distingue aussi les domaines Mid-IR (3-8  $\mu\text{m}$ ) et FIR (pour *Far Infrared*, 15-1000  $\mu\text{m}$ )

## 1.2 L'information portée par le rayonnement

### 1.2.1 Distribution spatiale

La propriété la plus immédiatement évidente du rayonnement électromagnétique d'origine astrophysique est son anisotropie : le ciel n'est pas uniformément brillant ou sombre. On tire de l'analyse de la distribution spatiale de ce rayonnement une information sur la position des objets ponctuels (étoiles, corps du système solaire, etc ...), ce qui constitue le domaine de l'astrométrie. On en tire aussi une information sur la distribution de brillance<sup>13</sup> des objets étendus (galaxies, nuages interstellaires, fond diffus cosmologique, etc ...).

Pour visualiser cette information, c'est à dire représenter des images, plusieurs problèmes se présentent, en premier lieu celui de la projection d'une portion de sphère sur un plan. Ce problème est mineur lorsqu'on représente des régions de petites dimensions, car alors le plan tangent à la sphère diffère peu de la surface de la sphère, mais il devient critique dans le cas de l'imagerie à grand champ, et dans les représentations du ciel complet. C'est le cas par exemple des cartes du fond diffus cosmologique et des autres résultats de la mission *Planck* [41], pour lesquels on utilise le système HEALPIX [15] de discrétisation des fonctions définies sur la sphère<sup>14</sup>. Ce système est notamment développé pour faciliter les calculs en termes d'harmoniques sphériques.

Il faut aussi choisir la taille du pixel utilisé, qui doit respecter le critère de Nyquist vis-à-vis de la résolution de l'instrument utilisé. Il est utile de mentionner ici la fonction d'étalement de point (PSF, pour *Point-Spread Function*). Même lorsqu'un objet céleste n'est pas résolu (c'est le cas la plupart du temps pour les étoiles), l'image donne sa position si l'on connaît suffisamment bien la PSF. Si cette position est mesurée précisément (microsecondes d'arc dans le cadre de la mission GAIA) et si l'objet est assez proche de la Terre, on accèdera à la mesure de sa parallaxe, donc de sa distance, et de son mouvement propre. On en déduira par exemple des informations précieuses sur la cinématique des étoiles dans la Galaxie<sup>15</sup>.

Il faut enfin choisir une échelle adaptée pour visualiser la brillance (utilisation d'échelles monochromes ou d'échelles de couleur, adoption de "coupures" inférieure et supérieure<sup>16</sup>, échelles linéaires ou logarithmiques, etc... ). Tous ces choix, et en particulier le dernier, rendent largement arbitraire l'aspect de l'image représentant la distribution spatiale du rayonnement d'origine astrophysique.

### 1.2.2 Distribution spectrale

Le ciel n'apparaît pas identique à toutes les fréquences (voir par exemple les cartes de *Planck*, Fig. 1.5), et la variation de l'émission lorsqu'on considère les différents domaines spectraux est intimement liée aux phénomènes physiques mis en jeu dans les objets observés. La forme globale du spectre fournit ainsi des informations précieuses sur les processus à l'origine du rayonnement continu (rayonnement thermique, rayonnement synchrotron, etc ...), comme on peut le voir sur la Fig. 1.6. Les "signatures spectrales" (discontinuités, raies ...), qu'elles soient en émission (lors de la recombinaison ion-électron dans une région HII par exemple) ou en absorption (ions, atomes, molécules placés en avant-plan de la source observée) portent également une information extrêmement utile sur la composition chimique de la matière, son état d'ionisation ou d'excitation. À titre d'exemple, il convient d'admirer la richesse de la chimie détectée dans la nébuleuse d'Orion par la mission *Herschel* (Fig. 1.7). L'observation de ces raies spectrales<sup>17</sup> permet ainsi par exemple d'établir une cartographie de la distribution du gaz dans

13. On définira ce terme précisément au chapitre suivant.

14. <http://healpix.jpl.nasa.gov/>

15. Un très bel exemple de ce genre d'analyse est la déduction, via le mouvement propre d'étoiles au voisinage du centre Galactique, que ce dernier abrite un objet de plusieurs millions de masses solaires, c'est-à-dire un trou noir supermassif [44].

16. Ce choix peut être dicté par des considérations fondamentales sur la sensibilité de l'instrument (niveau de bruit) et sa dynamique (saturations des capteurs).

17. On pense par exemple aux observations de la raie à 21 cm ( $\nu \simeq 1420$  MHz) de l'hydrogène atomique neutre H I ou de la raie de transition rotationnelle  $J = 1 \rightarrow 0$  à 2.6 mm ( $\nu \simeq 115$  GHz) de la molécule de monoxyde de carbone CO.

des galaxies ou des régions de formation d'étoiles, en effectuant des pointés<sup>18</sup> successifs. On représente alors fréquemment la distribution spatiale à l'aide de contours d'iso-intensité.

Il faut faire remarquer que les distributions de brillance présentées dans les travaux scientifiques représentent généralement l'émission reçue sur une plage de fréquences finie, car le rayonnement est observé au travers de filtres, mais aussi parce que les détecteurs eux-mêmes ont une bande passante finie. La réponse fréquentielle d'un instrument peut ainsi présenter des formes assez complexes, comme on peut le voir sur la Fig. 1.8. Les images "composites" (parfois appelées "en fausses couleurs") sont reconstituées à partir de plusieurs images obtenues dans des filtres différents.

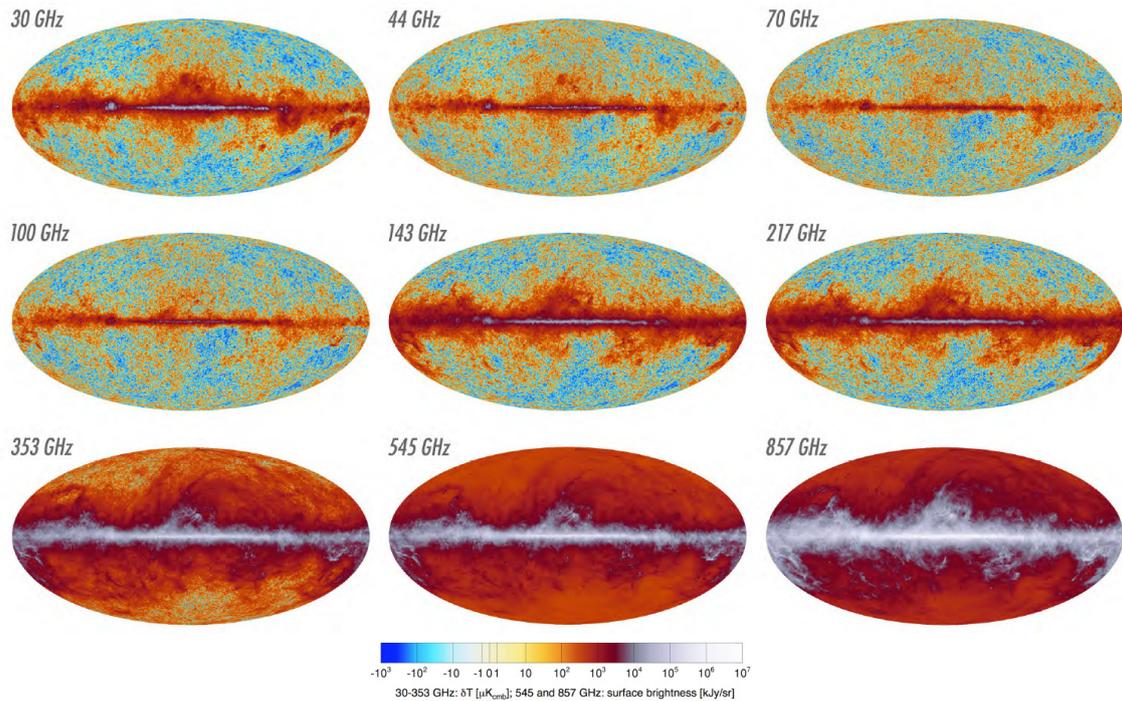


FIGURE 1.5 – Le ciel vu par *Planck* dans ses neuf bandes de fréquences. Figure issue de [41]

### 1.2.3 Polarisation

Le rayonnement électromagnétique peut être polarisé (en général très partiellement). Cette polarisation peut être liée aux processus d'émission eux-mêmes, c'est notamment le cas du rayonnement synchrotron, mais elle peut aussi avoir pour origine l'absorption sélective d'un rayonnement selon une direction particulière (c'est ainsi que la lumière des étoiles traversant un nuage de poussières dans lequel règne un champ magnétique acquiert une polarisation linéaire partielle [40]) ou encore un processus de polarisation par diffusion (c'est le cas par exemple du rayonnement stellaire UV ou visible diffusé par des grains interstellaires).

La polarisation est caractérisée par les *paramètres de Stokes* ( $I, Q, U, V$ ) (Fig. 1.9), qui s'expriment, en fonction des composantes de la représentation complexe du champ électrique sur une base ortho-normée ( $e_x, e_y$ ), sous la forme

$$I = |E_x|^2 + |E_y|^2 \quad Q = |E_x|^2 - |E_y|^2 \quad U = 2\text{Re} [E_x E_y^*] \quad V = -2\text{Im} [E_x E_y^*]$$

18. Des mosaïques de détecteurs permettent maintenant d'observer plusieurs directions simultanément et de réduire considérablement le temps d'observation. Les réseaux d'antennes appelés interféromètres permettent également d'établir des cartes de l'émission, suivant une méthode différente mais complémentaire.

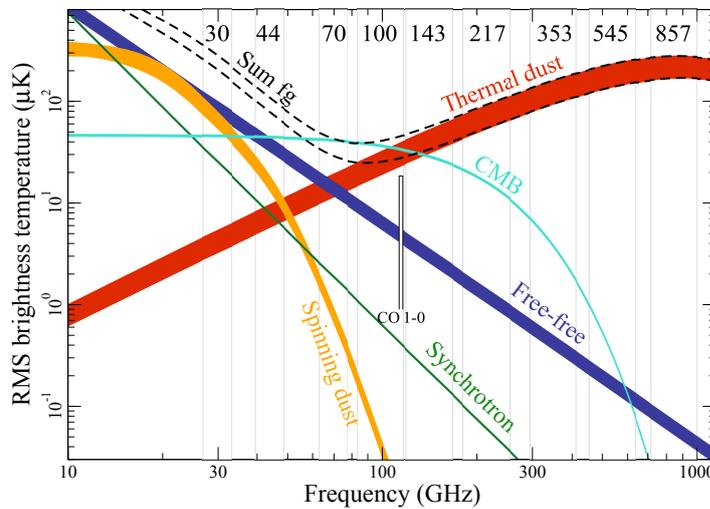


FIGURE 1.6 – Contributions spectrales de différents processus aux alentours de 100 GHz. Figure issue de [41]

$I$  est alors l'intensité totale du rayonnement,  $Q$  et  $U$  représentent l'intensité polarisée linéairement, leur valeur relative étant liée à l'angle de polarisation, et  $V$  représente l'intensité polarisée circulairement, le signe de  $V$  étant lié au caractère gauche ou droit de cette polarisation.

Les mesures de polarisation par diffusion sont notamment très utiles pour contraindre la géométrie 3D des sources, par exemple des disques protoplanétaires. Dans ce cours, nous n'aborderons pas l'étude de la polarisation, mais il est important de garder à l'esprit que cet aspect du rayonnement existe et que son étude est amenée à constituer une part importante de l'astrophysique dans les années à venir.

### 1.2.4 Variabilité temporelle

Les sources astrophysiques sont souvent très stables dans le temps. Pour les anciens, tout ce qui se rapportait au ciel était considéré comme "immuable" par nature, à l'opposé des phénomènes "terrestres", souvent éphémères. L'observation des supernovæ SN 1572 et SN 1604 a ébranlé cette certitude. Maintenant, on sait que de nombreux objets donnent lieu à des variations, qu'il s'agisse de variations de brillance, de couleur ou de vitesse. Certains objets comme les sursauts gamma présentent une variabilité extrême et sont tellement éphémères que leur existence même est restée longtemps méconnue. Evidemment, la notion de variabilité dépend beaucoup de la sensibilité qui peut être atteinte : à très haute sensibilité (des observations spatiales sont alors nécessaires pour s'affranchir des limitations atmosphériques), le flux de nombreuses étoiles varie au cours du temps, et l'étude de ces fluctuations et de leur spectre de fréquences temporelles constitue l'astérosismologie, qui fournit des renseignements précieux sur la structure interne des étoiles. On montre ainsi sur la Fig. 1.10 les variations relatives de l'intensité du rayonnement émis par une naine blanche de très faible masse sur une période de trois nuits. Les variations de flux non imputables aux étoiles elles-mêmes peuvent permettre de détecter des systèmes planétaires par la méthode des transits, comme sur la Fig. 1.11.

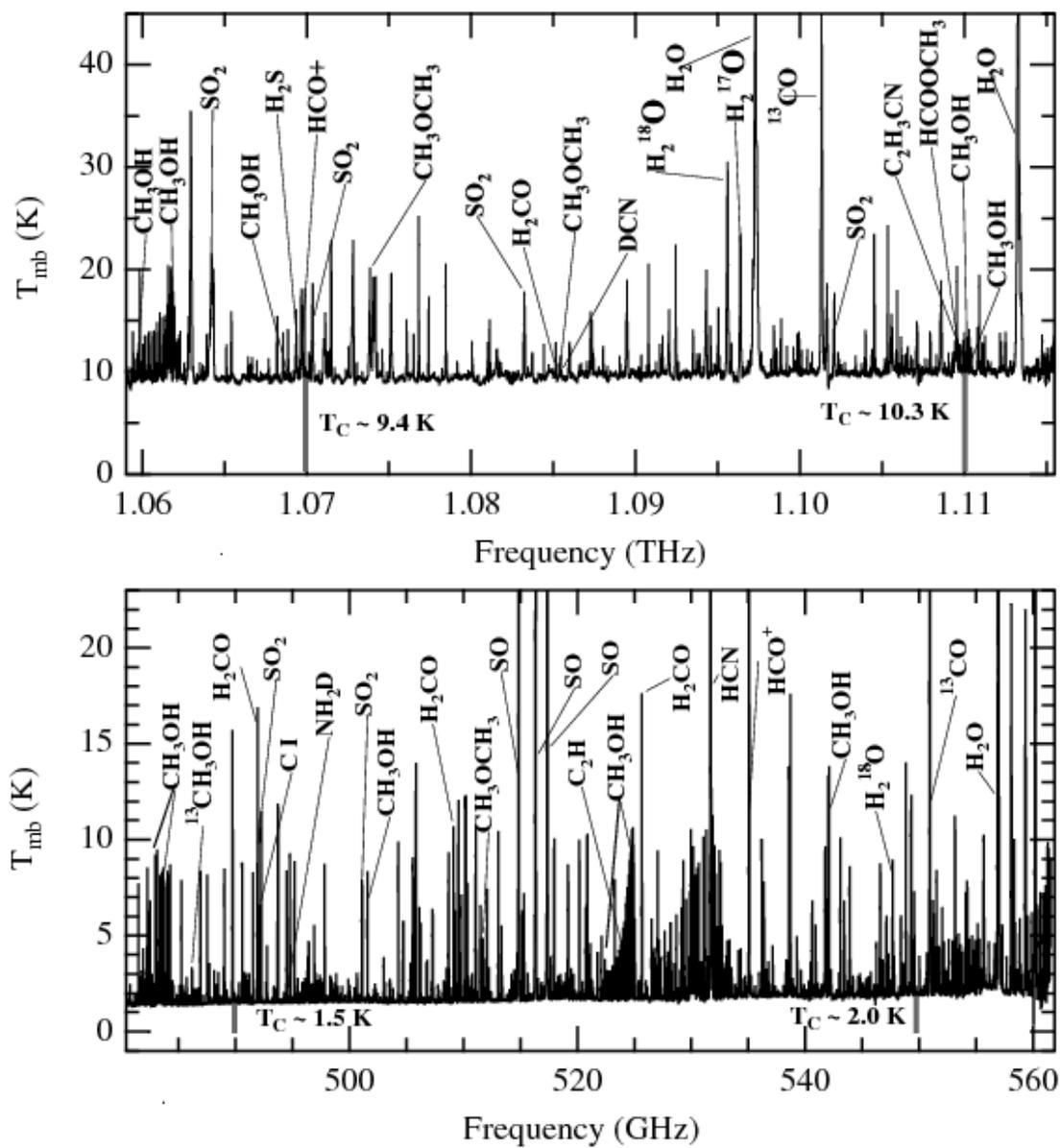


FIGURE 1.7 – Le spectre de raies observé par Herschel/HIFI en direction d’Orion KL. Figure issue de [4]

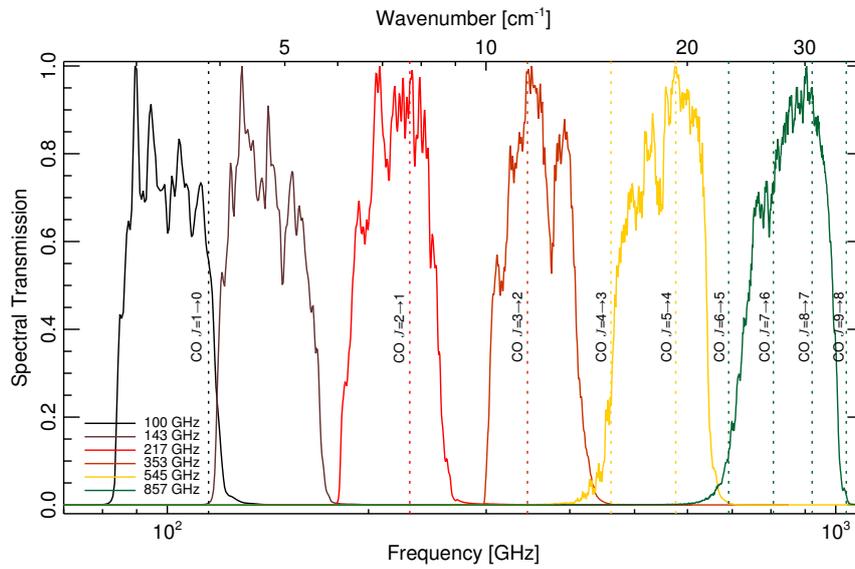


FIGURE 1.8 – Les bandes passantes de *Planck* HFI. Les pointillés verticaux montrent les positions des transitions rotationnelles principales du CO Galactique se situant dans les bandes de l'instrument. Figure issue de [39].

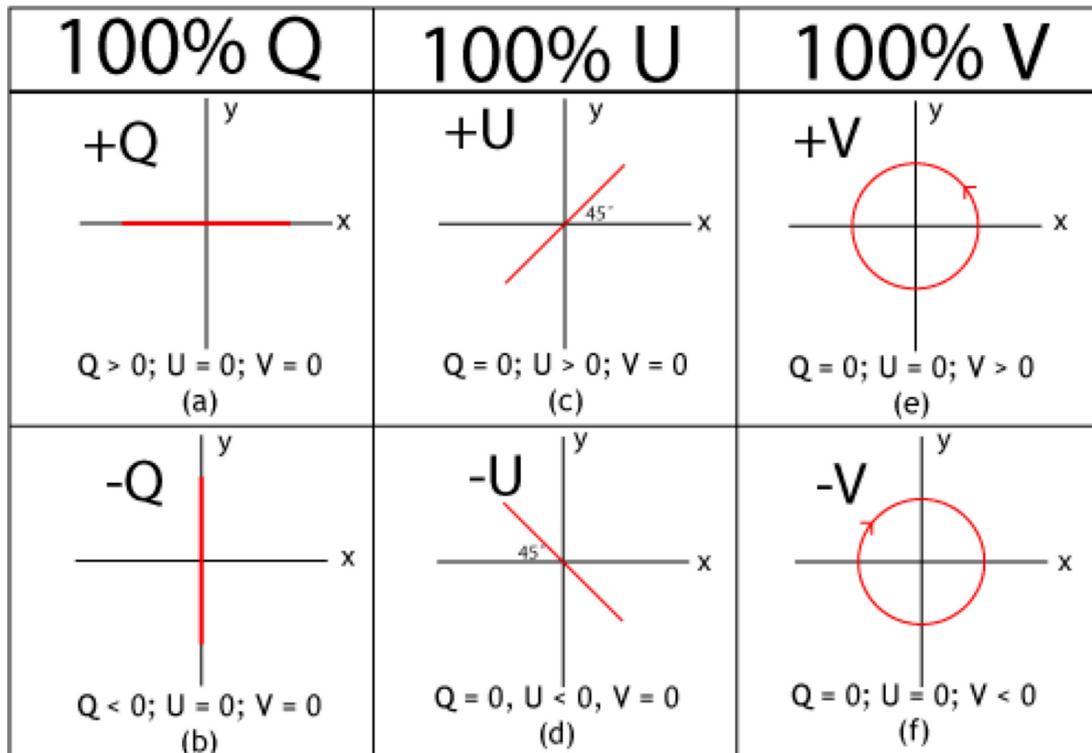


FIGURE 1.9 – Les paramètres de Stokes.  $Q$  et  $U$  portent sur la polarisation linéaire,  $V$  sur la polarisation circulaire. (Source : Wikimedia Commons)

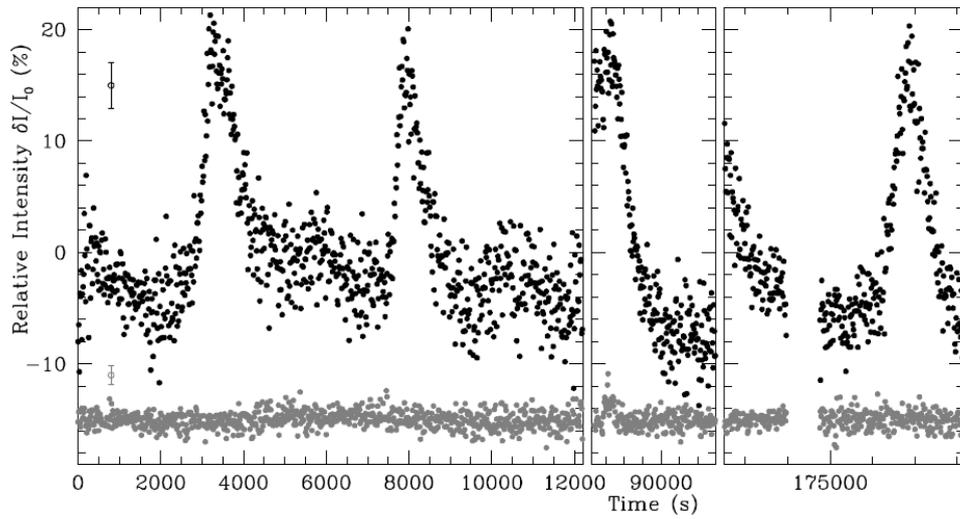


FIGURE 1.10 – **Courbe de lumière d'une naine blanche de très faible masse.** Les points noirs montrent l'intensité du rayonnement relativement à sa moyenne. Les points gris correspondent à une étoile du champ sans variation appréciable au cours du temps. Figure issue de [18].

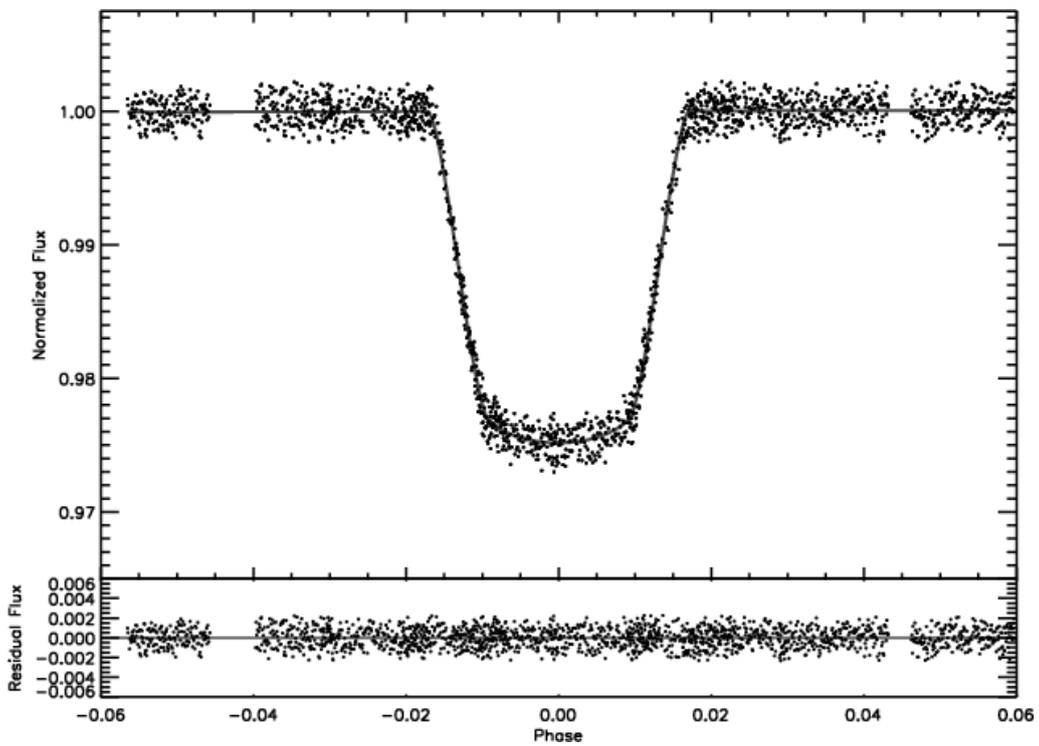


FIGURE 1.11 – **Courbe de lumière de l'étoile HD189733.** La chute de l'intensité observée est attribuée au passage d'une planète entre l'étoile et l'observateur. Figure issue de [46].

### 1.3 Pourquoi s'intéresser au transfert de rayonnement ?

Le rayonnement en provenance du ciel contient donc beaucoup d'informations, mais il appartient aux astrophysiciens de savoir décoder le message, afin de décrire et de comprendre comment le rayonnement est émis et comment il interagit avec les milieux qu'il traverse avant de parvenir à l'observateur. C'est un passage obligé pour valider les modèles des objets astrophysiques considérés.

Deux exemples parmi beaucoup d'autres possibles permettent d'illustrer cette démarche :

► Le disque autour de l'étoile  $\beta$  Pictoris : En analysant la distribution  $I(\theta)$  de la lumière diffusée par le disque de poussières entourant cette étoile,  $\theta$  étant l'angle entre l'axe de rotation du disque et la ligne de visée, on pourra déterminer la distribution radiale  $n(r)$  de la densité numérique des grains de poussière (par une modélisation directe ou éventuellement par résolution d'un problème inverse). On a ainsi besoin du transfert radiatif pour contraindre les modèles de disques.

► L'effondrement d'un nuage interstellaire pour former de nouvelles étoiles : l'énergie gravitationnelle, transformée en énergie cinétique par l'effondrement du nuage sur lui-même, puis en énergie d'agitation microscopique par le biais des collisions entre les particules du nuage, ne pourra être évacuée sous forme de rayonnement que si deux conditions sont remplies, à savoir (i) que le milieu contient des espèces<sup>19</sup> (comme C<sub>I</sub>, C<sub>II</sub>, CO) dont la structure des niveaux d'énergie présente des séparations en énergie comparables à  $kT$ , où  $T$  est la température du milieu, de telle sorte que les collisions permettent de transformer de l'énergie d'agitation thermique en énergie interne d'excitation, puis en rayonnement) ; (ii) que le milieu soit transparent aux raies émises lors des désexcitations de ces espèces pour revenir à leur niveau fondamental. Le transfert est ici indispensable pour comprendre le processus de formation stellaire.

Soulignons que le transfert de rayonnement est un problème très général et nullement spécifique à l'astrophysique. Si l'on veut optimiser la manière d'éclairer une salle, étudier les pigments utilisés par un peintre de la Renaissance en sondant son tableau à l'aide d'un faisceau laser, mesurer le déclin de la transparence du cristallin de l'œil (cataracte), ou encore modéliser la réflectivité d'une mer agitée vis à vis du rayonnement solaire en vue d'effectuer un bilan thermique pour la terre, on sera amené à traiter des problèmes de transfert de rayonnement. Insistons également sur le fait que les outils présentés dans ce cours s'appliquent de façon très générale aux différents domaines spectraux, et que l'astrophysicien moderne tirera le meilleur parti de la comparaison de données issues des différentes parties du spectre électromagnétique.

---

19. C<sub>I</sub> désigne le carbone neutre atomique C, tandis que C<sub>II</sub> désigne le carbone une fois ionisé C<sup>+</sup>.

## Les grandeurs photométriques

L'hypothèse fondamentale dans ce qui suit est que la propagation de la lumière peut être décrite en termes de photons dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique, c'est-à-dire le long de rayons infiniment fins. On tiendra néanmoins compte de certains effets associés au caractère ondulatoire de la lumière, notamment la diffusion du rayonnement par des particules matérielles (atomes, électrons, molécules, grains de poussière). Certains effets d'optique ondulatoire seront néanmoins sous-entendus, notamment la diffraction liée à la taille finie des instruments d'observation. Dans ce chapitre, nous définissons tout d'abord les principales grandeurs permettant de caractériser les propriétés du rayonnement de fréquence  $\nu$  en un point  $M$ , dans une direction  $\mathbf{k}$ , et à un instant  $t$  donnés.

### 2.1 L'intensité spécifique

#### 2.1.1 Définition

Considérons les photons traversant, pendant un intervalle de temps  $dt$ , l'élément de surface  $d\Sigma$  centré en  $M$  et de vecteur normal  $\mathbf{n}$ . Limitons-nous pour le moment au rayonnement dont la fréquence est comprise dans l'intervalle  $[\nu, \nu + d\nu]$ , et intéressons-nous dans un premier temps aux photons dont la direction de vol est située dans l'élément d'angle solide  $d\Omega$  autour de la direction  $\mathbf{k}$  supposée perpendiculaire à l'élément de surface, soit  $\mathbf{k} = \mathbf{n}$  (Fig. 2.1). L'énergie transportée par ces photons est proportionnelle<sup>1</sup> à  $dt$ , à l'intervalle de fréquence  $d\nu$ , à la surface  $d\Sigma$  et à l'angle solide  $d\Omega$ . Elle peut donc s'écrire sous la forme

$$dE_\nu = I_\nu d\Sigma dt d\Omega d\nu \quad (2.1)$$

ce qui définit l'**intensité spécifique**  $I_\nu$ , dans ce cas particulier pour lequel la surface élémentaire considérée est perpendiculaire à la direction de propagation, soit  $\mathbf{k} = \mathbf{n}$ . Dans le cas d'une direction  $\mathbf{k}$  quelconque, en posant l'angle  $\theta = (\mathbf{n}, \mathbf{k})$ , l'intensité spécifique  $I_\nu$  est définie par la relation

$$dE_\nu = I_\nu d\Sigma \cos \theta dt d\Omega d\nu \quad (2.2)$$

**Exercice 1 :** Justifier cette définition dans le cas général. On s'inspirera de la Fig. 2.2.

L'intensité spécifique,  $I_\nu(M, \mathbf{k}, t, \nu)$  dépend en général du point  $M$ , de la direction  $\mathbf{k}$ , du temps  $t$  et de la fréquence  $\nu$ . Elle décrit complètement la distribution spatiale, angulaire, spectrale et temporelle

1. Cette propriété se fonde sur le caractère infinitésimal des quantités mises en jeu, à savoir  $d\Sigma$ ,  $dt$ ,  $d\Omega$  et  $d\nu$ .

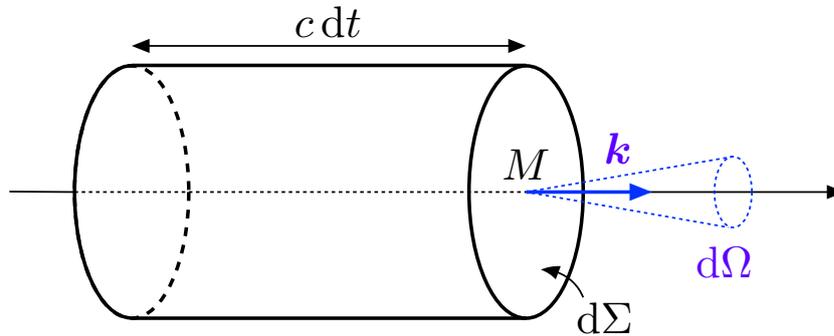


FIGURE 2.1 – **Définition de l'intensité spécifique dans la direction normale.** Notations utilisées pour définir l'intensité spécifique dans la direction  $\mathbf{n}$  normale à l'élément de surface.

du champ de rayonnement.

### 2.1.2 Polarisation et variabilité temporelle

Une réserve importante toutefois est que la grandeur scalaire  $I_\nu$  ainsi définie ne contient aucune information sur l'état de polarisation (linéaire, circulaire ou elliptique, totale ou partielle) du rayonnement. Dans certaines situations, il est important de le prendre en compte et on introduit alors une matrice dont les éléments sont les **paramètres de Stokes** notés  $I$ ,  $Q$ ,  $U$  et  $V$  (voir la Fig. 1.9). Dans ce cours, la polarisation du rayonnement ne sera pas considérée. De même, nous supposons généralement par la suite, sauf indication contraire, que le champ de rayonnement est *stationnaire* (c'est-à-dire indépendant du temps). Cela est vérifié dans de nombreuses situations, mais il existe néanmoins des phénomènes très importants en astrophysique donnant lieu à des variations rapides (pulsars, supernovæ, sursauts gamma), pour lesquels il est impératif de tenir compte des variations temporelles, parfois très rapides, de l'intensité du rayonnement.

### 2.1.3 Unités et grandeurs associées

L'intensité spécifique  $I_\nu$  s'exprime en  $\text{W.m}^{-2}.\text{Hz}^{-1}.\text{sr}^{-1}$  dans le système international, et en  $\text{erg.cm}^{-2}.\text{s}^{-1}.\text{Hz}^{-1}.\text{sr}^{-1}$  dans le système CGS prisé des astrophysiciens. En intégrant sur toutes les fréquences, on définit une **intensité bolométrique**,

$$I(M, \mathbf{k}, t) = \int_0^\infty I_\nu(M, \mathbf{k}, t, \nu) d\nu$$

qui s'exprime en  $\text{W.m}^{-2}.\text{sr}^{-1}$  ou encore en  $\text{erg.cm}^{-2}.\text{s}^{-1}.\text{sr}^{-1}$ .

L'intensité émise par une source de lumière de la vie courante (tube néon, ampoule à filament, flamme) est parfois appelée **luminance**. Pour parler d'une source astrophysique, ou d'un écran, on emploie le terme de **brillance** ou encore **brillance de surface**, ce dernier nom étant la plupart du temps réservé au cas des sources résolues spatialement.

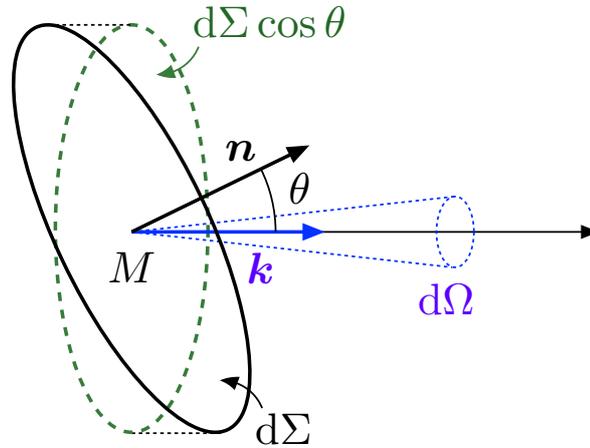


FIGURE 2.2 – Définition de l'intensité spécifique dans une direction quelconque. Notations utilisées pour définir l'intensité spécifique dans une direction  $\mathbf{k}$  quelconque.

### 2.1.4 Description corpusculaire

On peut relier la grandeur  $I_\nu$ , qui est fondamentalement associée à une description continue du champ de rayonnement, à une description corpusculaire, en termes de photons. En effet, l'énergie  $dE_\nu$  servant à définir  $I_\nu$  est portée par les photons qui se trouvaient pendant l'intervalle de temps  $dt$  dans le cylindre s'appuyant sur l'élément de surface  $d\Sigma$  et de longueur  $c dt$ , tout en ayant une direction  $\mathbf{k}$  contenue dans l'angle solide  $d\Omega$  et une fréquence  $\nu$  à  $d\nu$  près (Fig. 2.3). On introduit alors la quantité  $\mathcal{N}_\nu(\mathbf{k})$ , dont l'unité dans le système SI est  $\text{m}^{-3} \text{Hz}^{-1} \text{sr}^{-1}$ , telle que  $\mathcal{N}_\nu(\mathbf{k}) d\nu d\Omega$  représente le nombre de photons par unité de volume dont la direction de propagation est  $\mathbf{k}$  à  $d\Omega$  près et dont la fréquence est  $\nu$  à  $d\nu$  près. On montre alors que

$$I_\nu = h\nu c \mathcal{N}_\nu. \quad (2.3)$$

**Exercice 2 :** Démontrer la relation 2.3. On pourra s'appuyer sur la Fig. 2.3.

On peut également relier l'intensité spécifique à la **fonction de distribution en probabilité**  $f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  des photons. Cette fonction est telle que  $f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{p}$  représente le nombre de photons dont l'état de spin<sup>2</sup> est  $\alpha$ , et qui se trouvent à l'instant  $t$  dans le petit volume  $d^3\mathbf{x}$  autour de la position  $\mathbf{x}$ , et dont l'impulsion est  $\mathbf{p}$  à  $d^3\mathbf{p}$  près. On peut alors montrer que

$$I_\nu = \frac{h^4 \nu^3}{c^2} \sum_\alpha f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{h^4 \nu^3}{c^2} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \quad (2.4)$$

en notant  $f$  la somme des fonctions de distributions associées aux deux états possibles de spin.

**Exercice 3 :** Démontrer la relation 2.4. En déduire le lien entre  $f$  et  $\mathcal{N}_\nu$ .

2. qui peut être *droite* ou *gauche*. On rappelle que le photon est une particule de spin  $s = 1$ , mais qu'étant sans masse, le nombre quantique magnétique de spin  $m_s$  ne peut prendre que les valeurs  $+1$  et  $-1$ , et non  $0$ . Bien entendu, on établit une correspondance entre  $\alpha$  (droite, gauche) et  $m_s$  ( $-1, +1$ ).

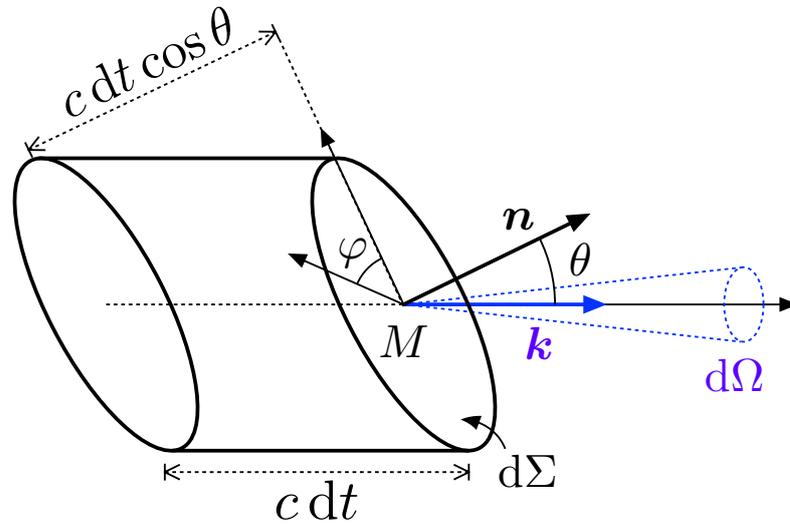


FIGURE 2.3 – Description corpusculaire de  $I_\nu$ .

On peut montrer (voir [27] et [45]) que la fonction de distribution est un invariant relativiste, donc on en déduit que si l'intensité spécifique  $I_\nu$  n'est pas invariante dans une transformation de Lorentz, la quantité  $I_\nu/\nu^3$ , en revanche, l'est.

### 2.1.5 Relation entre $I_\lambda$ et $I_\nu$

On peut tout aussi bien définir l'intensité spécifique en considérant les photons de longueur d'onde comprise entre  $\lambda$  et  $\lambda + d\lambda$ . On écrit alors l'énergie correspondante sous la forme

$$dE_\lambda = I_\lambda d\Sigma \cos \theta dt d\Omega d\lambda \quad (2.5)$$

ce qui définit alors une intensité spécifique  $I_\lambda$  s'exprimant (par exemple) en  $\text{W.m}^{-2}.\text{nm}^{-1}.\text{sr}^{-1}$ .

Il existe bien entendu une relation entre  $I_\lambda$  et  $I_\nu$ , qu'on établit en écrivant que la quantité d'énergie  $dE_\nu$  est égale à  $dE_\lambda$  si les intervalles spectraux en fréquence et en longueur d'onde se correspondent l'un à l'autre. On obtient alors

$$\nu I_\nu = \lambda I_\lambda \quad (2.6)$$

#### Exercice 4 : Démontrer la relation 2.6.

Les quantités  $\lambda I_\lambda$  ou  $\nu I_\nu$  sont fréquemment employées pour présenter des spectres astrophysiques (plutôt que simplement  $I_\lambda$  ou  $I_\nu$ ) car elles ont l'avantage de ne pas dépendre du fait qu'on choisisse  $\lambda$  ou  $\nu$  pour préciser l'intervalle spectral qu'on considère. Ainsi, on pourra représenter une seule courbe, avec un axe horizontal inférieur repérant les fréquences, et un axe horizontal supérieur représentant les longueurs d'onde.

### 2.1.6 Conservation de l'intensité spécifique dans le vide

L'importance conceptuelle de l'intensité spécifique vient d'une propriété fondamentale de conservation dans le vide. Comme on le verra par la suite, cette caractéristique importante de  $I_\nu$  est une conséquence immédiate de l'équation du transfert mais pour mieux saisir le sens et la portée de cette propriété, on peut l'établir séparément, à partir de considérations géométriques et de la conservation de l'énergie, en s'appuyant sur la Fig. 2.4. Cette propriété de conservation dans le vide (en l'absence

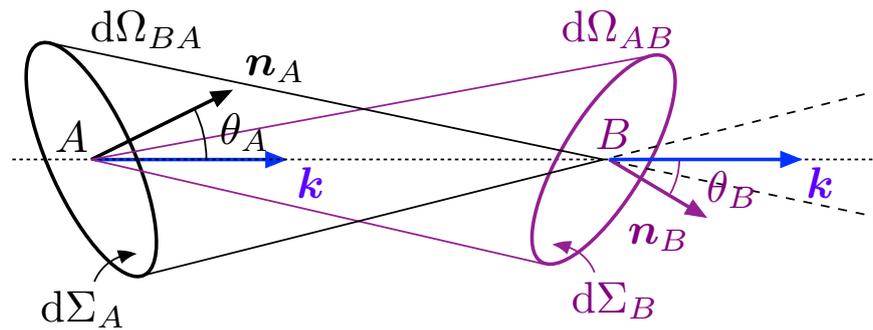


FIGURE 2.4 – **Conservation de  $I_\nu$  dans le vide.** Notations utilisées pour établir la conservation de l'intensité spécifique entre les points  $A$  et  $B$  lorsqu'aucune interaction n'intervient le long du trajet  $AB$  entre les deux points.

d'absorption, de diffusion, ou de source de rayonnement entre les points  $A$  et  $B$ ), s'écrit sous la forme

$$I_\nu(A, \mathbf{k}, t, \nu) = I_\nu(B, \mathbf{k}, t', \nu) \quad (2.7)$$

Notons que le temps de parcours de la lumière est pris en compte dans l'écriture ci-dessus, via

$$t' = t + \frac{AB}{c}$$

#### **Exercice 5 : Démontrer la relation 2.7.**

La conservation de  $I_\nu$  (et celle de  $I_\lambda$ , qui en découle ou qu'on peut démontrer directement de la même façon) est une propriété très importante car elle nous indique que **si le milieu traversé n'altère pas le rayonnement, l'intensité mesurée au niveau du récepteur est identique à celle émise par la source astrophysique** : on peut se la représenter à la fois comme une énergie sortant de la source et comme une énergie entrant dans le détecteur. La seconde conséquence importante est qu'étant indépendante de la distance, **la brillance des objets célestes résolus (c'est-à-dire dont la taille angulaire est supérieure à la résolution de l'instrument) ne dépend pas de l'instrument** : la Lune vue à travers des jumelles apparaît plus grosse, mais pas plus brillante qu'à l'œil nu. Pour rendre des objets résolus apparemment plus brillants, il faut un détecteur (par exemple une matrice de CCD) qui intègre sur des temps longs, puisque  $dE_\nu \propto dt$ , ou bien sur une bande passante plus large. Cette propriété n'est en rien paradoxale, et ne saurait être opposée à l'idée intuitive d'une décroissance en raison du carré inverse de la distance. Cette dernière propriété est en effet réalisée pour le flux, dont on parlera plus tard, et non pour l'intensité.

### 2.1.7 Écriture différentielle de la conservation de l'intensité dans le vide

La conservation de l'intensité spécifique peut se mettre sous une forme différentielle du type **équation de transport**. En écrivant la nullité de la variation élémentaire de  $I_\nu$  le long du rayon lumineux,

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial t} + c\mathbf{k} \cdot \nabla I_\nu = 0 \quad (2.8)$$

#### **Exercice 6 : Démontrer la relation 2.8.**

Par la suite, lorsque les phénomènes d'absorption, d'émission et de diffusion entreront en jeu, on pourra réécrire cette équation sous la forme

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial t} + c\mathbf{k} \cdot \nabla I_\nu = \text{sources} - \text{puits} \quad (2.9)$$

Les termes sources recouvrent **l'émission et la diffusion de photons à l'intérieur du faisceau**, et les termes puits recouvrent **l'absorption et la diffusion hors du faisceau**. On a écrit ainsi formellement l'équation du transfert.

On fait remarquer que l'équation (2.9) est une **équation de Boltzmann**<sup>3</sup> pour les photons. En effet, considérant un ensemble de particules de masse  $m$  décrit par une distribution de probabilité  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ , l'équation de Boltzmann donne l'évolution temporelle de  $f$  selon

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = \left( \frac{Df}{Dt} \right)_{\text{coll}} \quad (2.10)$$

où  $\mathbf{v}$  est la vitesse et  $\mathbf{F}$  est le champ des forces extérieures appliquées aux particules. Le membre de droite est l'intégrale collisionnelle, qui caractérise la redistribution des particules dans l'espace des phases suite à leurs interactions. Dans notre cas, les particules sont des photons, et en l'absence d'effets de relativité générale, ils ne sont soumis à aucune force extérieure, de sorte que  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ . D'autre part, la vitesse des photons est  $\mathbf{v} = c\mathbf{k}$  avec nos notations. Enfin, dans le vide, l'intégrale collisionnelle est nulle. On a donc

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c\mathbf{k} \cdot \nabla f = 0 \quad (2.11)$$

On retrouve donc bien l'équation (2.8) en faisant le lien entre  $I_\nu$  et  $f$  via l'équation (2.4).

### 2.1.8 Exemples

Illustrons la notion d'intensité spécifique par quelques exemples :

- ▶ Dans une pièce,  $I_\nu$  a une valeur élevée pour les directions comprises dans l'angle solide sous-tendu par les fenêtres<sup>4</sup>.
- ▶ Pour un observateur regardant une étoile autre que le soleil (non résolue donc) située dans la direction  $\mathbf{u}$ , l'intensité perçue est bien représentée par une distribution de Dirac vis à vis de la direction<sup>5</sup>, soit  $I_\nu(\mathbf{k}) \propto \delta(\mathbf{k} + \mathbf{u})$ .
- ▶ Au centre d'une étoile, l'intensité est isotrope par symétrie. À la surface en revanche, elle est nulle<sup>6</sup> pour les directions "entrantes"  $\mathbf{k}$  pointant vers l'intérieur de l'étoile, et grande pour les directions "sortantes". On a donc à la surface de l'étoile une intensité spécifique fortement anisotrope.

3. On précise que l'équation de Boltzmann à second membre nul, ici l'équation 2.8, est appelée **équation de Vlasov**.

4. Attention, un observateur regardant dans la direction  $\mathbf{u}$  apprécie l'intensité du rayonnement se propageant dans la direction  $\mathbf{k} = -\mathbf{u}$ .

5. En réalité, la distribution apparente a une largeur finie (**seeing**) de l'ordre de la seconde d'arc, du fait de la turbulence atmosphérique. Il faut aussi tenir compte de la diffraction due à la taille finie de l'instrument.

6. Ou quasiment : cela dépend si d'autres étoiles sont situées à proximité.

Il est commode de caractériser la dépendance angulaire de l'intensité (émise ou reçue par une antenne radio par exemple) par un **diagramme de rayonnement**. On utilise alors une représentation en coordonnées sphériques dans laquelle  $r(\theta, \varphi)$  est proportionnel à l'intensité dans la direction  $(\theta, \varphi)$ .

### 2.1.9 Champ de rayonnement présentant la symétrie axiale

Par la suite, on pourra souvent supposer que le champ de rayonnement présente localement une symétrie axiale, c'est-à-dire que  $I_\nu$  ne dépend que d'un seul angle et non de deux, à savoir l'angle  $\theta$  entre  $\mathbf{k}$  et l'axe de symétrie. Pour des raisons qui apparaîtront vite, on utilisera alors souvent la variable

$$\mu = \cos \theta \quad (2.12)$$

Il suffit, pour caractériser la distribution angulaire de  $I_\nu$ , de représenter une coupe du diagramme de rayonnement par un plan contenant l'axe de symétrie et de tracer  $I_\nu(\theta)$ . On montre plus loin, sur la Fig. 2.9, quelques exemples de tels diagrammes.

La symétrie axiale est approximativement réalisée à la surface ou au sein d'une étoile, en raison de la symétrie sphérique (si l'on ignore l'effet des taches, de l'aplatissement dû à la rotation, etc...). De même, pour une source de la vie courante, la luminance de sa surface dépend en général seulement de l'angle  $\theta = (\mathbf{n}, \mathbf{k})$  entre la normale à la surface,  $\mathbf{n}$ , et la direction sortante  $\mathbf{k}$ . Lorsque, de plus, l'intensité émise est indépendante de cet angle  $\theta$ , on dit que la source vérifie la **loi de Lambert**. On parle dans ce cas de **source Lambertienne**. On a alors  $I_\nu = I_0$  pour les directions sortantes  $0 \leq \theta < \pi/2$  et  $I_\nu = 0$  pour les directions entrantes  $\pi/2 < \theta < \pi$ . Ceci est un cas particulier du modèle semi-isotrope (voir plus loin). On constatera aisément que la brillance d'un écran de téléphone portable ou de façon plus générale celle des écrans plats dépend fortement de la direction, et que ces sources ne sont donc pas Lambertiennes.

## 2.2 L'intensité moyenne

$I_\nu(M, \mathbf{k}, t, \nu)$  contient une information très complète, puisqu'elle dépend de sept paramètres (trois positions, deux angles, le temps, et la fréquence), mais en général, ni l'observation ni la modélisation ne permettront de caractériser le champ de rayonnement avec autant de détails. On est donc amené à considérer des grandeurs dérivées, décrivant moins finement le champ de rayonnement, mais fournissant en revanche directement une caractéristique globale importante.

Par exemple, si l'on renonce complètement à connaître la répartition angulaire du rayonnement, on peut se contenter de la moyenne sur toutes les directions, ce qui amène à définir **l'intensité moyenne**<sup>7</sup> :

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi I_\nu \sin \theta d\theta \quad (2.13)$$

où  $\theta$  et  $\varphi$  sont les angles décrivant la direction  $\mathbf{k}$  (voir la Fig. 2.5). L'intensité moyenne  $J_\nu$  s'exprime donc, comme  $I_\nu$ , en  $\text{W.m}^{-2}.\text{Hz}^{-1}.\text{sr}^{-1}$ .

Dans le cas de la symétrie axiale, on peut écrire  $J_\nu$  sous une forme qui la fait apparaître comme le **moment d'ordre zéro** de  $I_\nu$  vis à vis de  $\mu$ .

7. Dans toute la suite, lorsqu'on ne précise pas le domaine d'intégration sur  $d\Omega$ , il est sous-entendu que cette intégration porte sur l'ensemble des directions, soit  $4\pi$  stéradians.

$$J_\nu = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I_\nu d\mu \quad (2.14)$$

**Exercice 7 : Démontrer la relation 2.14.**

*Note :* Dans certaines circonstances, on pourra être amené à considérer des moyennes de  $I_\nu$ , non pas sur les angles mais sur un ensemble de positions  $M$  (moyenne spatiale, au sein d'un milieu hétérogène par exemple) ou encore sur un certain intervalle de temps (moyenne temporelle), si l'on n'est pas en régime stationnaire. Dans de tels cas, il faudra prendre soin d'éviter toute confusion entre  $J_\nu$  et la moyenne considérée.

## 2.3 La densité spectrale et volumique d'énergie

On définit ensuite la **densité spectrale et volumique d'énergie** du rayonnement par la relation

$$u_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega = \frac{4\pi}{c} J_\nu \quad (2.15)$$

Pour comprendre cette dénomination, on peut l'écrire en fonction de la grandeur  $\mathcal{N}_\nu$  définie plus haut,

$$u_\nu = h\nu \int \mathcal{N}_\nu d\Omega$$

Son interprétation est ainsi triviale, puisque l'intégrale de  $\mathcal{N}_\nu d\Omega$  sur toutes les directions représente la densité volumique de photons de fréquence  $\nu$  à  $d\nu$  près. Chacun de ces photons emporte une énergie  $h\nu$ , ce qui justifie que  $u_\nu$  représente bien l'énergie du rayonnement par unité de volume et par intervalle de fréquence, d'où le nom de densité spectrale et volumique d'énergie.

**Exercice 8 : Établir l'expression de  $u_\nu$  dans le cas de la symétrie axiale.**

## 2.4 La densité spectrale de flux et grandeurs associées

### 2.4.1 Densité spectrale de flux

On définit la **densité spectrale de flux** par la relation

$$F_\nu = \int I_\nu \cos \theta d\Omega \quad (2.16)$$

La raison de cette définition est la suivante : considérons une surface  $d\Sigma$  au sein du champ de rayonnement. L'énergie électromagnétique de fréquence  $\nu$  à  $d\nu$  près qui la traverse pendant un temps  $dt$  dans un angle solide  $d\Omega$  autour de la direction  $\mathbf{k} = (\theta, \varphi)$  est par définition  $dE_\nu = I_\nu \cos \theta dt d\Omega d\nu d\Sigma$  (Fig. 2.5). On en déduit que  $I_\nu \cos \theta d\Omega$  est la densité spectrale de puissance par unité de surface du rayonnement dans la direction donnée, et la densité spectrale de flux est l'intégrale, sur toutes les directions, de cette densité spectrale de puissance par unité de surface. Il s'agit donc d'une puissance par intervalle de fréquence et par unité de surface. Son unité SI est le  $\text{W.m}^{-2}.\text{Hz}^{-1}$ , mais en radioastronomie on utilise le Jansky, avec  $1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W.m}^{-2}.\text{Hz}^{-1}$ .

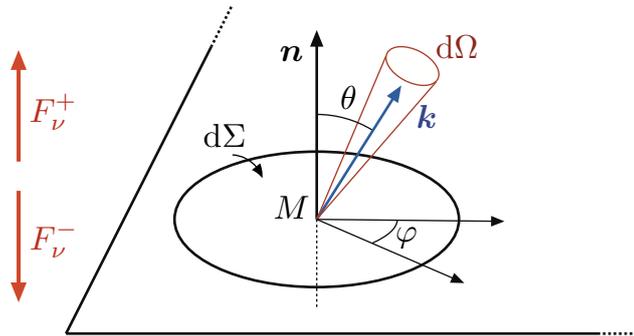


FIGURE 2.5 – **Définition de  $F_\nu$ .** Notations utilisées pour définir l'élément de densité spectrale de flux,  $dF_\nu$ . L'intégration sur le demi-espace avant fournit  $F_\nu^+$  (puissance traversant la surface "vers le haut"), celle sur le demi-espace arrière fournit  $F_\nu^-$  (flux "vers le bas").

De manière plus générale, on définit une densité spectrale de flux de nature vectorielle

$$\mathbf{F}_\nu = \int I_\nu \mathbf{k} d\Omega \quad (2.17)$$

qui représente de manière évidente une moyenne vectorielle de l'intensité. Ses composantes s'écrivent

$$F_{\nu,x} = \int I_\nu \sin \theta \cos \varphi d\Omega \quad F_{\nu,y} = \int I_\nu \sin \theta \sin \varphi d\Omega \quad F_{\nu,z} = \int I_\nu \cos \theta d\Omega \quad (2.18)$$

Dans le cas d'un problème à symétrie axiale, on a  $F_{\nu,x} = F_{\nu,y} = 0$ , la composante  $F_{\nu,z}$  étant la seule non nulle, ce qui justifie qu'on nomme abusivement densité spectrale de flux l'expression scalaire (2.16). On a alors aussi, en utilisant le changement de variable 2.12,

$$F_\nu = 2\pi \int_{-1}^{+1} I_\nu \mu d\mu \quad (2.19)$$

La densité spectrale de flux  $F_\nu$  se présente donc comme le **moment d'ordre un** de  $I_\nu$  vis à vis de  $\mu$ , à un facteur numérique près

**Exercice 9 : Démontrer la relation 2.19.**

## 2.4.2 Flux total

Le **flux total** ou **flux bolométrique**  $F$  est alors l'intégrale de  $F_\nu$  sur toutes les fréquences :

$$F = \int_0^\infty F_\nu d\nu \quad (2.20)$$

Il s'exprime bien entendu en  $W.m^{-2}$  et représente la puissance lumineuse traversant une unité de surface.

## 2.4.3 Flux entrant et flux sortant

Le flux total et la densité spectrale de flux ainsi écrits sont des flux algébriques, dont le signe dépend de l'orientation du vecteur normal à la surface. En effet, sur le demi-espace "avant" défini par

$0 \leq \theta < \pi/2$ ,  $\mu = \cos \theta$  est positif alors que sur le demi-espace "arrière" ( $\pi/2 < \theta < \pi$ ),  $\mu = \cos \theta$  est négatif. Aussi est-il judicieux d'introduire des grandeurs **positives** caractérisant la puissance lumineuse traversant  $d\Sigma$  dans un sens ou dans l'autre, respectivement  $F_\nu^+$  et  $F_\nu^-$ , par

$$F_\nu^+ = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta \quad \text{et} \quad F_\nu^- = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^\pi I_\nu |\cos \theta| \sin \theta d\theta. \quad (2.21)$$

qu'on nommera respectivement **densité spectrale de flux sortant** et **densité spectrale de flux entrant**. De même, on définit des quantités intégrées sur la fréquence,

$$F^+ = \int_0^\infty F_\nu^+ d\nu \quad \text{et} \quad F^- = \int_0^\infty F_\nu^- d\nu$$

qu'on nommera respectivement **flux sortant** et **flux entrant**. Avec ces définitions,  $F_\nu$  apparaît comme la différence entre deux termes positifs :  $F_\nu = F_\nu^+ - F_\nu^-$ . Dans le cas de la symétrie axiale, on a

$$F_\nu^+ = 2\pi \int_0^{+1} I_\nu \mu d\mu \quad \text{et} \quad F_\nu^- = 2\pi \int_{-1}^0 I_\nu |\mu| d\mu \quad (2.22)$$

#### 2.4.4 Éclairement, émittance, exitance

Lorsque le flux concerne du rayonnement arrivant sur un récepteur, on parle d'**éclairement**. Si, au contraire, il s'agit d'un rayonnement émis par la surface d'une source lumineuse, on parle d'**émittance** ou encore d'**exitance**. Une source Lambertienne émettant une intensité ( $I_0$ ) ou luminance ( $L = I_0$ ) isotrope dans le demi-espace  $0 \leq \theta < \pi/2$  et nulle pour  $\pi/2 < \theta < \pi$ , son émittance  $M$  vaut

$$M = F = 2\pi \int_0^{+1} I_0 \mu d\mu = \pi I_0 \quad \text{soit} \quad M = \pi L. \quad (2.23)$$

Notons que dans d'autres domaines de la physique, on emploie le terme de flux dans un sens différent, pour caractériser la puissance (ou le nombre de particules, la masse, etc ...) traversant l'ensemble d'une surface donnée; la notion locale de **densité de flux** est alors introduite pour définir la puissance traversant l'unité de surface. Pour nous, le terme de densité est entendu au sens spectral, c'est-à-dire par intervalle de fréquence, et la notion de localité est implicite.

#### 2.4.5 Décroissance du flux avec la distance

Contrairement à l'intensité spécifique, **la densité spectrale de flux varie avec la distance à la source**. Pour le montrer, on considère la densité spectrale de flux reçue sur Terre en provenance d'une étoile autre que le Soleil, donc non résolue spatialement, c'est-à-dire que l'angle  $\theta_i$  caractérisant la résolution de l'instrument<sup>8</sup> est supérieur à la taille apparente  $\theta_c$  de l'étoile. Celle-ci est supposée à symétrie sphérique, Lambertienne, de rayon  $R$ , et son centre est situé à la distance  $D$  du détecteur placé en  $O$  (voir la Fig. 2.6). On montre alors que la densité spectrale de flux reçue sur le détecteur en provenance de l'étoile est

$$F_\nu = \pi I_0 \left( \frac{R}{D} \right)^2 \quad (2.24)$$

8. Pour simplifier, on suppose que le détecteur est parfaitement sensible pour  $|\theta| \leq \theta_i/2$  et insensible à la radiation en provenance des directions  $|\theta| > \theta_i/2$ .

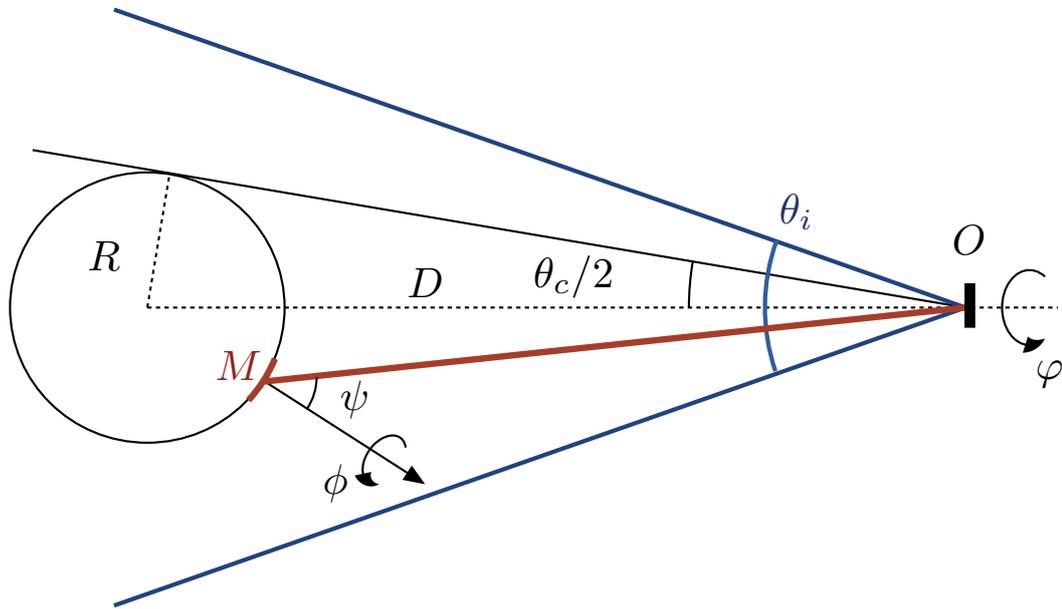


FIGURE 2.6 – Décroissance du flux en  $1/r^2$ .

**Exercice 10 :** Démontrer la relation 2.24 en s'appuyant sur les notations de la Fig. 2.6.

On constate une dépendance en fonction de la distance,  $F_\nu \propto D^{-2}$ . Les objets non résolus apparaissent d'autant plus brillants<sup>9</sup> qu'ils sont plus près. De même, si on les observe avec un instrument, leur diamètre apparent  $\theta_c$  augmente et ils apparaissent alors plus brillants.

Cet effet cesse dès que les objets sont résolus. En effet, pour prendre un cas simple, considérons l'observation du centre d'une étoile à symétrie sphérique, Lambertienne (avec  $I_\nu = I_0$ ) et résolue spatialement, en notant  $\Omega_i$  l'angle solide correspondant à la résolution instrumentale et  $\Omega_c$  l'angle solide apparent de l'étoile. On suppose donc que  $\Omega_i < \Omega_c$ . Si cet angle solide  $\Omega_i$  est suffisamment petit, le facteur  $\cos \theta$  dans l'intégrale (2.16) est très proche de 1, et la densité spectrale de flux reçue par le détecteur prend la forme  $F_\nu = I_0 \Omega_i$ . Elle est donc indépendante de la taille apparente  $\Omega_c$  (Fig. 2.7). Dans le cas d'une source non résolue, en revanche, la densité spectrale de flux reçue est  $F_\nu = I_0 \Omega_c$  et dépend donc de la taille apparente de l'objet, qui varie comme le carré inverse de la distance.

## 2.5 La pression de radiation

Comme on le sait, le rayonnement transporte non seulement de l'énergie mais aussi de la quantité de mouvement, chaque photon de fréquence  $\nu$  portant également une impulsion

$$\mathbf{\Pi} = \frac{E}{c} \mathbf{k} = \frac{h\nu}{c} \mathbf{k}$$

avec  $\mathbf{k}$  le vecteur unitaire de la direction de propagation. Ce transport d'impulsion permet de définir une **densité spectrale de pression de radiation** par la relation

9. Le terme est trompeur, puisqu'il est question ici de flux, et non de brillance. C'est la puissance reçue qui augmente avec la taille angulaire de la source.

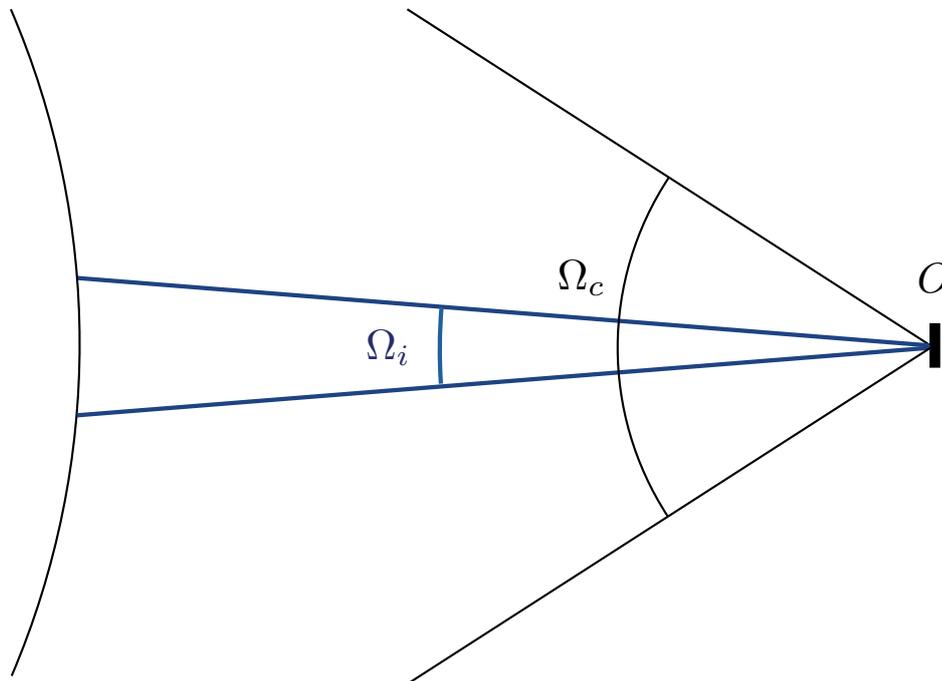


FIGURE 2.7 – Observation d'une source résolue.

$$p_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu \cos^2 \theta \, d\Omega \quad (2.25)$$

La **pression de radiation** est alors simplement définie comme l'intégrale de  $p_\nu$  sur la fréquence

$$p = \int_0^\infty p_\nu \, d\nu$$

**Exercice 11 :** Montrer, par un raisonnement analogue à celui du calcul de la pression cinétique d'un gaz, que l'expression 2.25 correspond bien à une pression par intervalle de fréquence exercée par les photons. On s'appuiera sur la Fig. 2.8 et on fera appel à la quantité  $\mathcal{N}_\nu$  (Eq. 2.3).

Si l'intensité spécifique présente la symétrie axiale,  $p_\nu$  se réduit à

$$p_\nu = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^{+1} I_\nu \mu^2 \, d\mu. \quad (2.26)$$

ce qui montre que  $p_\nu$  apparaît comme le **moment d'ordre deux** de  $I_\nu$  vis-à-vis de  $\mu$ , à un facteur numérique près. On vérifie aisément que  $p$  (intégrale de  $p_\nu$  sur toutes les fréquences) a bien les dimensions d'une pression, ou encore d'une densité volumique d'énergie.

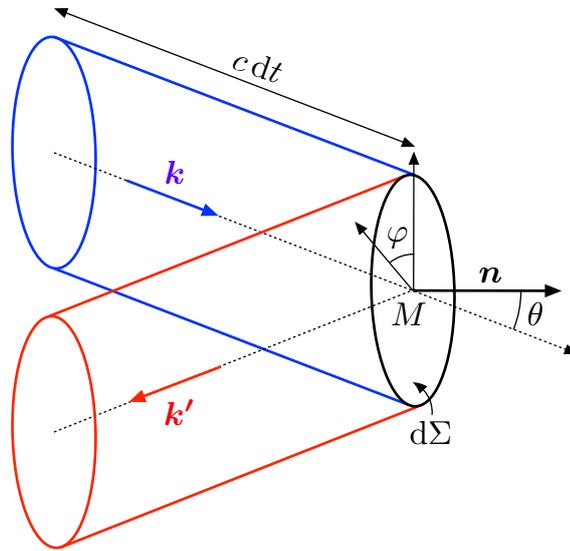


FIGURE 2.8 – Définition de la pression de radiation

### 2.5.1 Tenseur de densité spectrale de pression radiative

On généralise les expressions précédentes, à la manière de ce que nous avons fait en passant de (2.16) à (2.17) pour la densité spectrale de flux, en écrivant le **tenseur de densité spectrale de pression radiative**, dont les éléments sont

$$p_{\nu}^{ij} = \frac{1}{c} \int I_{\nu} k_i k_j d\Omega \quad (2.27)$$

Sous forme tensorielle compacte, on écrira

$$\mathbb{p}_{\nu} = \frac{1}{c} \int I_{\nu} \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} d\Omega \quad (2.28)$$

L'élément  $ij$  de ce tenseur représente le taux de transport, par unité de surface, de la composante  $i$  de l'impulsion, dans la direction de l'axe  $j$ . Cette signification physique apparaît clairement lorsqu'on réécrit cet élément comme

$$p_{\nu}^{ij} = \int \mathcal{N}_{\nu} \times \frac{h\nu k_i}{c} \times c k_j d\Omega \quad (2.29)$$

## 2.6 Modèles de la distribution angulaire du rayonnement

Considérons quelques modèles élémentaires permettant de décrire la distribution angulaire de  $I_{\nu}$  en un point donné et exprimons pour chacun d'eux l'intensité moyenne, le flux et la pression de radiation en fonction des paramètres qui caractérisent ces distributions. Nous nous limiterons à des modèles présentant la symétrie axiale. Excepté pour le modèle isotrope, la variation de  $I_{\nu}$  avec  $\theta$  (ou  $\mu$ ) pour chaque modèle est représentée sur la Fig. 2.9.

### 2.6.1 Modèle isotrope

Le cas du rayonnement isotrope est particulièrement important. Dans ce cas, **l'intensité spécifique ne dépend pas de la direction**  $(\theta, \varphi)$ . On peut alors introduire le nombre  $n_{\nu}$  de photons par intervalle

de fréquence et par unité de volume, défini via

$$\mathcal{N}_\nu = \frac{n_\nu}{4\pi}$$

Le facteur  $1/4\pi$  est introduit de sorte que, comme il se doit,

$$\int_{\Omega} \mathcal{N}_\nu(\theta, \varphi) d\Omega = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \mathcal{N}_\nu(\theta, \varphi) \sin \theta = n_\nu$$

Dans cette hypothèse on a les relations suivantes entre les grandeurs introduites plus haut :

- ▶ Intensité spécifique :  $I_\nu = \frac{h\nu c n_\nu}{4\pi}$
- ▶ Intensité moyenne :  $J_\nu = I_\nu$
- ▶ Densité spectrale et volumique d'énergie :  $u_\nu = h\nu n_\nu = \frac{4\pi}{c} I_\nu$
- ▶ Densité spectrale de flux sortant et entrant :  $F_\nu^+ = F_\nu^- = \frac{h\nu c n_\nu}{4} = \pi I_\nu$
- ▶ Densité spectrale de pression de radiation :  $p_\nu = \frac{h\nu n_\nu}{3} = \frac{4\pi}{3c} I_\nu$

La densité spectrale de flux nette  $F_\nu = F_\nu^+ - F_\nu^-$  est nulle car autant de photons traversent une surface donnée dans un sens que dans l'autre. On remarque d'autre part la relation entre la pression de radiation et la densité d'énergie pour un rayonnement isotrope :

$$p_\nu = \frac{u_\nu}{3} \quad (2.30)$$

et de même en intégrant sur la fréquence :

$$p = \int p_\nu d\nu = \frac{1}{3} \int u_\nu d\nu = \frac{u}{3} \quad (2.31)$$

## 2.6.2 Modèle semi-isotrope

Dans ce modèle (Fig. 2.9a), l'intensité spécifique est donnée par

$$I_\nu = I^+ \text{ si } \mu > 0 \text{ et } I_\nu = I^- \text{ si } \mu < 0. \quad (2.32)$$

Pour cette distribution angulaire on obtient

$$J_\nu = \frac{I^+ + I^-}{2}, \quad F_\nu = \pi(I^+ - I^-) \text{ et } p_\nu = \frac{2\pi}{3c}(I^+ + I^-). \quad (2.33)$$

Le rayonnement isotrope correspond au cas particulier  $I^+ = I^-$ , et une source Lambertienne correspond à  $I^- = 0$ .

## 2.6.3 Modèle linéaire en $\mu$

Pour une distribution légèrement anisotrope, on peut représenter la dépendance angulaire (Fig. 2.9b) par un polynôme du premier degré en  $\mu$ ,

$$I_\nu = I_0 + I_1\mu. \quad (2.34)$$

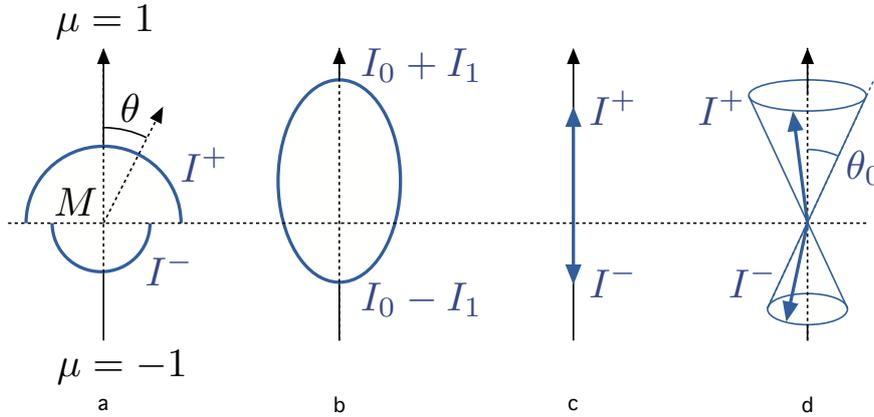


FIGURE 2.9 – Quelques modèles simples pour  $I_\nu(\mu)$ . Diagrammes polaires représentant la variation de  $I_\nu$  avec  $\theta$  pour le modèle semi-isotrope (a), polynôme de degré 1 en  $\mu$  (b), “deux-faisceaux” avec  $\mu = \pm 1$  (c), “deux-faisceaux” avec  $\mu = \pm\mu_0$ .

Le cas isotrope est alors obtenu lorsque  $I_1 = 0$ . Lorsque  $I_1 > 0$ , le rayonnement est renforcé vers l’avant, et lorsque  $I_1 < 0$  il est renforcé vers l’arrière. Notons que seuls les modèles avec  $|I_1| < I_0$  ont un sens physique). Les moments successifs de  $I_\nu$  ont pour valeur

$$J_\nu = I_0, \quad F_\nu = \frac{4\pi}{3}I_1 \quad \text{et} \quad p_\nu = \frac{4\pi}{3c}I_0. \quad (2.35)$$

Pour les deux modèles précédents, on constate que  $p_\nu$  est proportionnelle à  $J_\nu$ . Plus précisément, on a entre  $p_\nu$  et  $J_\nu$  la même relation que pour un rayonnement isotrope (lequel est un cas particulier de ces deux modèles), à savoir

$$p_\nu = \frac{4\pi}{3c}J_\nu, \quad (2.36)$$

qu’on appelle **relation d’Eddington**.

#### 2.6.4 Modèle à deux faisceaux

Considérons enfin le modèle à deux faisceaux, pour lequel

$$I_\nu(\mu) = I^+\delta(\mu - \mu_0) + I^-\delta(\mu + \mu_0), \quad (2.37)$$

où  $\delta$  désigne la distribution de Dirac  $\delta(x)$ , nulle sauf en  $x = 0$  et telle que pour toute fonction  $f$ ,

$$\int f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$$

La répartition angulaire correspondante est représentée sur la Fig. 2.9d (le cas particulier où  $\mu_0 = 1$  correspond à la Fig. 2.9c).

Les trois premiers moments de  $I_\nu$  ont pour expression

$$J_\nu = \frac{I^+ + I^-}{2}, \quad F_\nu = 2\pi\mu_0(I^+ - I^-) \quad \text{et} \quad p_\nu = \frac{2\pi}{c}\mu_0^2(I^+ + I^-). \quad (2.38)$$

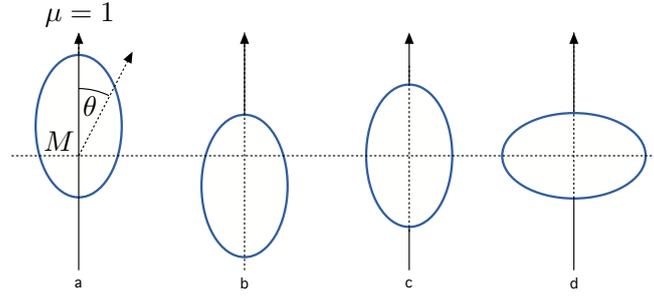


FIGURE 2.10 – Distributions de  $I_\nu(\mu)$  présentant des valeurs diverses de  $F_\nu/J_\nu$  et  $p_\nu/J_\nu$ . Diagrammes polaires pour quelques distributions angulaires  $I_\nu(\mu)$  présentant sensiblement la même valeur de l'intensité moyenne  $J_\nu$ . Les distributions (a) et (b) sont caractérisées par des valeurs différentes de  $F_\nu/J_\nu$  mais voisines pour  $p_\nu/J_\nu$ . À l'inverse, les distributions (c) et (d) ont des valeurs voisines de  $F_\nu/J_\nu$  ( $\approx 0$  ici) mais différentes pour  $p_\nu/J_\nu$ , qui est plus grand pour la distribution (c).

À nouveau,  $p_\nu$  et  $J_\nu$  font intervenir la même combinaison des paramètres du modèle,  $I^+$  et  $I^-$ , à savoir  $I^+ + I^-$ , et sont liés par la relation d'Eddington dans le cas particulier où

$$\frac{4\pi\mu_0^2}{c} = \frac{4\pi}{3c} \quad \text{soit} \quad \mu_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Le modèle associé à ce cas précis peut paraître quelque peu académique car il correspond à une intensité nulle dans toutes les directions, sauf celles portées par deux cônes définis par  $\theta \approx 54.7^\circ$  (pour lequel  $I_\nu = I^+$ ) et  $\theta \approx 125.3^\circ$  ( $I_\nu = I^-$ ). Cependant, il présente l'avantage de conduire à des calculs simples et, dans certaines conditions, représente tout de même assez bien l'inclinaison "moyenne" des rayons.

## 2.7 Information contenue dans les moments

Précisons maintenant, avant de passer au transfert radiatif proprement dit, quel type d'information est contenu dans la valeur des moments que sont  $J_\nu$ ,  $F_\nu$  et  $p_\nu$  dans le cas où  $I_\nu$  ne dépend que de  $\theta$ .  $J_\nu$  correspond à la valeur moyenne de  $I_\nu$  sur toutes les directions, mais ne dit rien sur la dépendance de  $I_\nu$  en  $\theta$ , en particulier l'asymétrie avant-arrière. Ainsi, les deux distributions (a) et (b) de la Fig. 2.10 correspondent-elles à la même intensité moyenne  $J_\nu$ . Au contraire,  $F_\nu = F_\nu^+ - F_\nu^-$  est sensible à cette propriété de  $I_\nu(\theta)$ . Le rapport sans dimension

$$F_\nu/(\pi J_\nu)$$

fournit donc une indication globale de l'anisotropie avant-arrière du champ de rayonnement. Lorsque la distribution présente une symétrie par rapport au plan défini par  $\mu = 0$  (Fig. 2.10c et 2.10d),  $F_\nu/(\pi J_\nu) \simeq 0$ . Si le rayonnement est renforcé vers l'avant (Fig. 2.10a), on a  $F_\nu/(\pi J_\nu) > 0$ . S'il est renforcé vers l'arrière (Fig. 2.10b) on a au contraire  $F_\nu/(\pi J_\nu) < 0$ .

Le moment d'ordre 2,  $p_\nu$ , est une moyenne pondérée par  $\mu^2$ , qui donne donc un poids relatif plus important aux directions  $\theta \approx 0$  et  $\theta \approx \pi$  vis-à-vis de celles correspondant à  $\theta \approx \pi/2$ . Le rapport lui aussi sans dimension

$$\frac{3c p_\nu}{4\pi J_\nu},$$

mesure donc l'importance relative de  $I_\nu$  dans les directions voisines de l'axe de symétrie par rapport à celles qui lui sont orthogonales. Ainsi ce rapport est plus grand dans le cas (c) que dans le cas (d) de la Fig. 2.10.

## 2.8 Magnitudes

### 2.8.1 Magnitude monochromatique

Le système des magnitudes est un héritage de l'ancienne classification grecque de la brillance apparente des étoiles établie à l'oeil nu. On parlait alors d'étoiles "de première grandeur", de "deuxième grandeur", etc... La sensation visuelle étant approximativement logarithmique vis-à-vis du flux lumineux  $F$ , on a construit l'échelle des magnitudes de manière relative, en posant que la **magnitude monochromatique**  $m_\lambda$  est liée à la densité spectrale de flux  $F_\lambda$  reçue par un détecteur via

$$m_\lambda = -2.5 \log \left( \frac{F_\lambda}{F_0} \right) = -2.5 \log F_\lambda + q_0 \quad (2.39)$$

où  $F_0$  est une valeur constante qui définit ainsi la magnitude zéro.

En pratique, la mesure du flux se fait sur une bande passante présentant une certaine réponse spectrale  $T(\lambda)$ , de sorte que l'on établit des systèmes de magnitudes différents pour chaque "bande". On aura ainsi des notations telles que  $m_V$ , qui désigne la magnitude en bande V (dans le visible) :

$$m_V = -2.5 \log \int_0^\infty T_V(\lambda) F_\lambda d\lambda + 2.5 \log \int_0^\infty T_V(\lambda) d\lambda + q_0 \quad (2.40)$$

Si la réponse spectrale est normalisée, le second terme du membre de droite est nul. On trouve dans [21] une table des caractéristiques des principales bandes dans le visible, l'UV et l'infrarouge.

### 2.8.2 Magnitude bolométrique

On dérive de la magnitude monochromatique la notion de **magnitude bolométrique**, qui mesure l'intégralité du flux en échelle logarithmique,

$$m_{\text{bol}} = -2.5 \log \frac{\int_0^\infty F_\lambda d\lambda}{F_{\text{bol}}} \quad \text{avec} \quad F_{\text{bol}} = 2.52 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2}. \quad (2.41)$$

Elle est directement liée à la **luminosité**  $L$  d'une source (c'est-à-dire la puissance lumineuse totale qu'elle émet<sup>10</sup>) connaissant sa distance  $D$  (exprimée en parsecs) et s'il n'y a pas d'absorption ou de diffusion sur la ligne de visée

$$m_{\text{bol}} = -0.25 + 5 \log D - 2.5 \log \frac{L}{L_\odot} \quad (2.42)$$

Comme la magnitude dépend donc de la distance, on parle de **magnitude apparente**. On définit une **magnitude absolue** en plaçant la source à une distance hypothétique de 10 pc, et en corrigeant du **rougissement**  $A$  dû aux grains interstellaires, qui absorbent et diffusent plus facilement dans l'UV et le visible que dans l'IR. La magnitude apparente  $m$  et la magnitude absolue  $M$  sont alors liées par

$$M = m + 5 - 5 \log D - A \quad (2.43)$$

10. Par exemple, la luminosité solaire est  $L_\odot = 3.8 \times 10^{26}$  W.

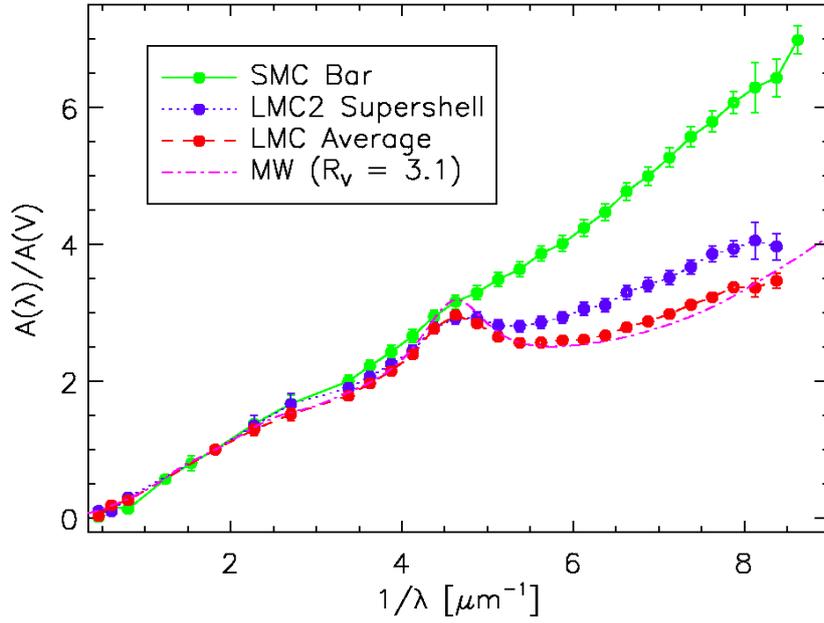


FIGURE 2.11 – **Courbes d'extinction** Courbes d'extinction  $A_\lambda/A_V$  en fonction de  $1/\lambda$  dans notre Galaxie et dans les Nuages de Magellan. (Source : Wikimedia Commons)

### 2.8.3 Couleur et extinction

Enfin, on définit les **indices de couleur** comme différences de deux magnitudes à des longueurs d'onde ou dans des bandes différentes. Par exemple  $B - V$  entre le bleu ( $0.44 \mu\text{m}$ ) et le visible ( $0.55 \mu\text{m}$ ). Ces indices donnent donc le rapport des flux reçus dans deux domaines de longueurs d'onde distincts.

Les grains de poussières, selon leur taille (rayon  $a$  de grains supposés sphériques), leur composition (graphite, silicates, glaces) et la longueur d'onde, vont absorber ou diffuser plus ou moins la lumière incidente. Pour caractériser cela, on définit l'**extinction**  $A_\lambda$  comme l'augmentation de magnitude induite à la longueur d'onde  $\lambda$  par l'absorption et la diffusion due aux grains, par rapport à la magnitude qu'aurait l'objet sans extinction sur la ligne de visée

$$A_\lambda = m_\lambda - m_\lambda^0. \quad (2.44)$$

Cette extinction est sélective et varie fortement avec  $\lambda$ , comme on peut le voir sur la Fig. 2.11, qui représente ce qu'on nomme **courbe d'extinction**. On observe notamment une bosse vers  $2200 \text{ \AA}$  et une forte remontée dans l'UV lointain. Cette variation en fonction de la longueur d'onde est quantifiée par l'**excès de couleur**

$$E_{B-V} = A_B - A_V. \quad (2.45)$$

## Réponses aux exercices du chapitre 2

### Exercice 1

Pour définir l'intensité spécifique dans le cas d'une direction  $\mathbf{k}$  quelconque, différente de  $\mathbf{n}$ , c'est-à-dire en considérant une surface élémentaire  $d\Sigma$  quelconque, il suffit de remarquer que l'énergie  $dE_\nu$  portée par les photons de fréquence  $\nu$  à  $d\nu$  près traversant  $d\Sigma$  dans l'élément d'angle solide  $d\Omega$  pendant  $dt$  est identique à celle qui traverse perpendiculairement la surface projetée  $d\Sigma \cos\theta$  avec  $\theta = (\mathbf{n}, \mathbf{k})$ , dans le même élément d'angle solide, le même intervalle de fréquence, et le même intervalle de temps (Fig. 2.2). On a donc, dans le cas général,

$$dE_\nu = I_\nu d\Sigma \cos\theta dt d\Omega d\nu = I_\nu d\Sigma (\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) dt d\Omega d\nu = I_\nu (d\Sigma \cdot \mathbf{k}) dt d\Omega d\nu \quad \text{avec} \quad d\Sigma = d\Sigma \mathbf{n}$$

### Exercice 2

Le cylindre élémentaire à considérer a pour volume  $dV = c \cos\theta dt d\Sigma$ . On peut en tirer que l'énergie  $dE_\nu$  s'écrit aussi comme le produit de l'énergie d'un photon par la quantité  $\mathcal{N}_\nu(\mathbf{k}) d\nu d\Omega$  et par le volume du cylindre élémentaire, soit

$$dE_\nu = h\nu \times \mathcal{N}_\nu(\mathbf{k}) d\nu d\Omega \times dV = h\nu c \mathcal{N}_\nu(\mathbf{k}) \cos\theta d\Sigma dt d\Omega d\nu$$

Par identification avec l'équation définissant  $I_\nu$ , on obtient le résultat demandé.

### Exercice 3

Comme l'impulsion d'un photon est liée à sa fréquence  $\nu$  par<sup>11</sup>

$$\mathbf{p} = \frac{h\nu}{c} \mathbf{k}$$

L'énergie radiative contenue dans la cellule  $d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{p}$  de l'espace des phases est alors

$$dE_\nu = \sum_\alpha h\nu f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{p}$$

Pour identifier cette expression à celle définissant l'intensité spécifique, on note que les photons concernés sont contenus dans le volume cylindrique déjà écrit, soit

$$d^3\mathbf{x} = c \cos\theta dt d\Sigma$$

Quant à l'élément de volume dans l'espace des impulsions, il s'écrit en passant en coordonnées sphériques

$$d^3\mathbf{p} = p^2 dp d\Omega = \frac{h^3 \nu^2}{c^3} d\nu d\Omega$$

et on a donc

$$dE_\nu = \sum_\alpha h\nu f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) c \cos\theta dt d\Sigma \frac{h^3 \nu^2}{c^3} d\nu d\Omega$$

d'où l'expression de l'intensité spécifique à partir de la fonction de distribution des photons annoncée.

### Exercice 4

---

11. On rappelle que  $\mathbf{k}$  est, dans notre notation, un vecteur unitaire, et ne doit donc pas être confondu avec le vecteur d'onde.

On établit cette relation en écrivant que la quantité d'énergie  $dE_\nu$  est égale à  $dE_\lambda$  si les intervalles spectraux en fréquence et en longueur d'onde se correspondent l'un à l'autre, toutes choses étant égales par ailleurs, que ce soit  $d\Omega$ ,  $dt$ ,  $\theta$  ou  $d\Sigma$ . Comme on a  $\lambda = c/\nu$ , l'une augmente quand l'autre diminue, de sorte que l'égalité des quantités d'énergie fait intervenir les valeurs absolues des intervalles spectraux<sup>12</sup> :

$$I_\nu d\Sigma \cos \theta dt d\Omega |d\nu| = I_\lambda d\Sigma \cos \theta dt d\Omega |d\lambda|$$

et donc

$$I_\nu |d\nu| = I_\lambda |d\lambda|$$

Comme on a

$$\frac{d\nu}{\nu} = -\frac{d\lambda}{\lambda}$$

on en déduit la relation entre  $I_\lambda$  et  $I_\nu$  annoncée.

### Exercice 5

Étant donnés les deux éléments de surface  $d\Sigma_A$  et  $d\Sigma_B$  centrés respectivement en  $A$  et  $B$  (Fig. 2.4), nous considérons les photons qui traversent  $d\Sigma_A$  et dont la direction de vol est telle qu'ils vont ensuite traverser  $d\Sigma_B$  s'ils n'en sont pas empêchés. Exprimons l'énergie  $dE_\nu(A)$  correspondant à ces photons qui traversent  $d\Sigma_A$ . Par définition de  $I_\nu(A, \mathbf{k}, t, \nu)$ ,

$$dE_\nu(A) = I_\nu(A, \mathbf{k}, t, \nu) d\Sigma_A \cos \theta_A dt d\Omega_{AB} d\nu$$

où  $\mathbf{k} = \mathbf{AB}/AB$  est le vecteur unitaire le long de la direction  $AB$ ,  $\theta_A$  l'angle entre  $\mathbf{n}_A$  (vecteur normal à  $d\Sigma_A$ ) et  $\mathbf{k}$ , et  $d\Omega_{AB}$  l'angle solide sous lequel on voit l'élément  $d\Sigma_B$  depuis le point  $A$ . Plaçons nous maintenant en  $B$  et exprimons l'énergie  $dE_\nu(B)$  associée aux photons traversant  $d\Sigma_B$  et tels que leur direction de vol, prolongée vers  $A$ , traverse  $d\Sigma_A$  :

$$dE_\nu(B) = I_\nu(B, \mathbf{k}, t', \nu) d\Sigma_B \cos \theta_B dt d\Omega_{BA} d\nu,$$

où  $\theta_B$  est l'angle entre  $\mathbf{n}_B$  (vecteur normal à  $d\Sigma_B$ ) et  $\mathbf{k}$ , et où  $d\Omega_{BA}$  est l'angle solide sous lequel on voit l'élément  $d\Sigma_A$  depuis le point  $B$ . Notons que le temps de parcours de la lumière est pris en compte dans l'écriture ci-dessus, via

$$t' = t + \frac{AB}{c}$$

Dans le vide, tous les photons traversant  $d\Sigma_A$  à l'instant  $t$  et se dirigeant vers  $d\Sigma_B$  vont effectivement la traverser en  $t'$  ; inversement, tous les photons qui traversent  $d\Sigma_B$  en  $t'$  avec une trajectoire provenant de  $d\Sigma_A$  sont effectivement passés par  $d\Sigma_A$  à l'instant antérieur  $t$ . On a donc, par le principe de conservation de l'énergie,  $dE_\nu(A) = dE_\nu(B)$ , soit

$$I_\nu(B, \mathbf{k}, t', \nu) d\Sigma_B \cos \theta_B dt d\Omega_{BA} d\nu = I_\nu(A, \mathbf{k}, t, \nu) d\Sigma_A \cos \theta_A dt d\Omega_{AB} d\nu$$

Par ailleurs, les angles solides  $d\Omega_{AB}$  et  $d\Omega_{BA}$  s'écrivent par définition

$$d\Omega_{AB} = \frac{d\Sigma_B \cos \theta_B}{AB^2} \quad \text{et} \quad d\Omega_{BA} = \frac{d\Sigma_A \cos \theta_A}{AB^2}$$

ce qui permet d'en déduire

$$I_\nu(A, \mathbf{k}, t, \nu) d\Sigma_A \cos \theta_A dt \frac{d\Sigma_B \cos \theta_B}{AB^2} = I_\nu(B, \mathbf{k}, t', \nu) d\Sigma_B \cos \theta_B dt \frac{d\Sigma_A \cos \theta_A}{AB^2}$$

et en simplifiant, d'obtenir le résultat important annoncé.

Dans ce raisonnement fondé sur la conservation de l'énergie, on voit clairement le rôle joué par l'absence d'interaction le long du trajet  $AB$ . Si, par exemple, de la matière absorbante ou diffusante était

12. Ceci étant fait pour assurer la positivité de l'intensité spécifique dans les deux définitions,  $I_\nu \geq 0$  et  $I_\lambda \geq 0$ .

présente entre  $A$  et  $B$ , certains photons ayant traversé  $d\Sigma_A$  et se dirigeant vers  $d\Sigma_B$  n'atteindraient pas cet élément et on aurait alors une perte d'énergie  $dE_\nu(B) < dE_\nu(A)$ . On a alors absorption et diffusion hors du faisceau. À l'inverse, la diffusion peut amener des photons venus d'autres directions à traverser  $d\Sigma_B$  avec une direction de vol contenue dans  $d\Omega_{BA}$  sans qu'ils aient auparavant traversé  $d\Sigma_A$ , entraînant  $dE_\nu(B) > dE_\nu(A)$ . La présence d'un milieu émissif situé entre  $A$  et  $B$  peut également contribuer à cela. On parle alors de diffusion à l'intérieur du faisceau et d'émission.

### **Exercice 6**

On écrit la nullité de la variation élémentaire de  $I_\nu$  le long du rayon lumineux,

$$0 = \delta I_\nu = I_\nu(B) - I_\nu(A) = \frac{\partial I_\nu}{\partial t}(t' - t) + \mathbf{AB} \cdot \nabla I_\nu = \frac{\partial I_\nu}{\partial t} \frac{AB}{c} + AB \mathbf{k} \cdot \nabla I_\nu$$

ce qui donne immédiatement le résultat annoncé.

### **Exercice 7**

Le changement de variable  $\mu = \cos \theta$  permet d'écrire  $J_\nu$  sous la forme

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 I_\nu d\mu.$$

Pour un champ de rayonnement présentant une symétrie axiale ( $I_\nu$  indépendante de  $\varphi$ ), on a donc

$$J_\nu = \frac{1}{2} \int_0^\pi I_\nu \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I_\nu d\mu,$$

comme annoncé.

### **Exercice 8**

Le lien entre  $J_\nu$  et  $u_\nu$  permet d'écrire directement

$$u_\nu = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^{+1} I_\nu d\mu$$

### **Exercice 9**

Le calcul est immédiat :

$$F_\nu = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 I_\nu \mu d\mu = 2\pi \int_{-1}^{+1} I_\nu \mu d\mu$$

### **Exercice 10**

La densité spectrale de flux reçue sur le détecteur en provenance de l'étoile est

$$F_\nu = \int_{\Omega_c} I_\nu \cos \theta d\Omega = \int_0^{\theta_c/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi I_\nu \cos \theta \sin \theta$$

avec  $\theta_c$  l'angle sous lequel est vue l'étoile depuis le détecteur. L'intensité  $I_\nu$  au niveau du détecteur  $O$  est une fonction de la direction  $(\theta, \varphi)$ , et elle est égale, par conservation, à celle au niveau de la source, soit  $I_\nu(O, \theta, \varphi) = I_\nu(M, \psi, \phi)$  en utilisant les notations de la Fig. 2.6. On fait alors un ensemble de deux hypothèses : celle d'une source à symétrie sphérique, de sorte que  $I_\nu(M, \psi, \phi)$  ne dépende pas de

la position  $M$  sur la surface, ni de l'angle azimutal  $\phi$ , et d'autre part que la source est Lambertienne, de sorte que  $I_\nu(\psi)$  soit une constante  $I_0$  indépendante de la direction  $\psi \in [0, \pi/2]$ . On a alors

$$F_\nu = 2\pi I_0 \int_0^{\theta_c/2} d\theta \cos \theta \sin \theta = 2\pi I_0 \times \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\theta_c/2} = \pi I_0 \sin^2 \left( \frac{\theta_c}{2} \right) = \pi I_0 \left( \frac{R}{D} \right)^2$$

### Exercice 11

On considère une petite surface matérielle  $d\Sigma$  sur la paroi d'une enceinte contenant un champ de rayonnement, et les photons de fréquence  $\nu$  (énergie  $h\nu$ ) qui la heurtent pendant  $dt$  dans un angle solide  $d\Omega$  autour d'une direction  $(\theta, \varphi)$  (voir la Fig. 2.8). Chacun de ces photons rebondit avec une direction  $\mathbf{k}'$  donnée par la loi de Snell-Descartes de la réflexion. Par conservation de la quantité de mouvement totale de l'ensemble {photons + paroi}, la quantité de mouvement transmise à  $d\Sigma$  par ce photon est

$$d^2\Pi = \frac{2h\nu}{c} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = \frac{2h\nu}{c} (\cos \theta) \mathbf{n}$$

Elle est portée par la normale externe à la paroi,  $\mathbf{n}$ . La quantité de mouvement totale transmise à  $d\Sigma$  par les photons de même fréquence à  $d\nu$  près et même direction à  $d\Omega$  près pendant  $dt$  est

$$d\Pi = 2 \frac{h\nu}{c} (\cos \theta) \times \mathcal{N}_\nu(\theta, \varphi) d\nu d\Omega \times dV \mathbf{n} = 2h\nu (\cos \theta)^2 \mathcal{N}_\nu(\theta, \varphi) d\nu d\Omega d\Sigma dt \mathbf{n}$$

en faisant apparaître la grandeur  $\mathcal{N}_\nu$  et en explicitant le volume  $dV = d\Sigma \times c dt \cos \theta$  contenant les photons susceptibles de heurter la paroi entre  $t$  et  $t + dt$ . La force exercée sur la surface  $d\Sigma$  par les photons de fréquence  $\nu$  à  $d\nu$  près est alors normale à la paroi, et en intégrant sur toutes les directions pour lesquelles  $\cos \theta > 0$  (seules directions telles que les photons entrent effectivement en collision avec la paroi), on a

$$d\mathbf{f} = \int_\Omega \frac{d\Pi}{dt} = 2h\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \mathcal{N}_\nu(\theta, \varphi) d\nu \cos^2 \theta \sin \theta d\Sigma \mathbf{n}$$

et la pression de la radiation associée à ces photons est donc

$$dp = \frac{\|d\mathbf{f}\|}{d\Sigma} = 2h\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \mathcal{N}_\nu(\theta, \varphi) d\nu \cos^2 \theta \sin \theta$$

À l'équilibre de pression<sup>13</sup>, on a  $\mathcal{N}_\nu(\theta, \varphi) = \mathcal{N}_\nu(\pi - \theta, \varphi)$  et donc

$$2 \int_0^{\pi/2} d\theta \mathcal{N}_\nu(\theta, \varphi) \cos^2 \theta \sin \theta = \int_0^\pi d\theta \mathcal{N}_\nu(\theta, \varphi) \cos^2 \theta \sin \theta$$

D'où

$$dp = h\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \mathcal{N}_\nu(\theta, \varphi) \cos^2 \theta \sin \theta d\nu$$

ce qui justifie de nommer densité spectrale de pression de radiation la quantité

$$p_\nu = \frac{dp}{d\nu} = h\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \mathcal{N}_\nu(\theta, \varphi) \cos^2 \theta \sin \theta$$

comme on a  $I_\nu = h\nu c \mathcal{N}_\nu$ , on a bien

$$p_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu \cos^2 \theta d\Omega$$

13. Penser que la réflexion donne  $\theta \rightarrow \pi - \theta$ .

## L'équation du transfert

## 3.1 Transfert de rayonnement sans diffusion

Nous avons vu plus haut que, dans le vide,  $I_\nu$  reste constante le long d'une ligne de visée donnée. Lorsque le rayonnement interagit avec la matière, il n'en est plus ainsi et nous allons maintenant préciser comment  $I_\nu$  varie sous l'effet de deux processus, l'absorption et l'émission<sup>1</sup>, caractérisés par le **coefficient d'absorption** d'une part et l'**émissivité** d'autre part.

## 3.1.1 Section efficace, coefficient d'absorption, épaisseur optique

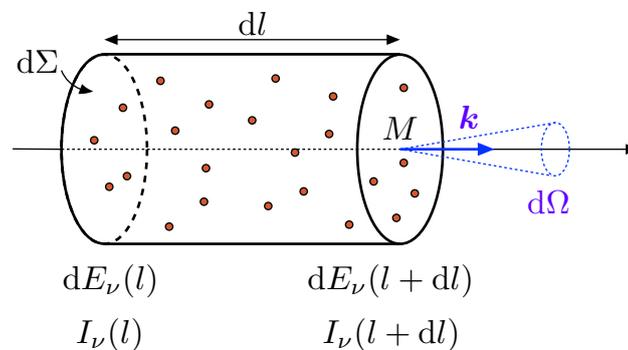


FIGURE 3.1 – **Variation de l'intensité due à l'absorption.** Notations utilisées pour exprimer la variation de l'énergie  $dE_\nu$  traversant l'élément de surface  $d\Sigma$ , du fait du processus d'absorption.

**Section efficace d'absorption**

Considérons un cylindre élémentaire d'axe  $\mathbf{k}$ , de surface de base  $d\Sigma$  centrée en  $M$  et de hauteur  $dl$ , la variable  $l$  repérant la position le long de l'axe défini par  $M$  et  $\mathbf{k}$  (Fig. 3.1). Soit  $dE_\nu(l)$  l'énergie des photons traversant  $d\Sigma$  pendant  $dt$  avec la direction  $\mathbf{k}$  à  $d\Omega$  près<sup>2</sup>. On va chercher à exprimer la

1. La diffusion sera considérée plus loin dans ce chapitre.  
2. Le cas où la direction  $\mathbf{k}$  n'est pas perpendiculaire à la surface  $d\Sigma$  s'en déduit simplement par projection, comme sur la Fig. 2.1.

variation (négative) de  $dE_\nu$  entre  $l$  et  $l + dl$ , sous l'effet du processus d'absorption, soit

$$dE_\nu(l + dl) - dE_\nu(l) = d^2E_{\nu,a} < 0 \quad (3.1)$$

Soit  $n$  la **densité numérique** (nombre par unité de volume) des éléments absorbants (grain de poussière, atome, ion, molécule) et  $s_{\nu,a}$  leur **section efficace d'absorption**<sup>3</sup>. On montre alors que

$$d^2E_{\nu,a} = -n s_{\nu,a} dl dE_\nu = -\kappa_\nu dl dE_\nu, \quad (3.2)$$

le signe  $-$  traduisant le fait que l'absorption prélève de l'énergie au faisceau.

**Exercice 12 :** Établir la relation 3.2. Quelle hypothèse portant sur la section efficace et la densité des éléments absorbants fait-on implicitement ?

### Coefficient d'absorption

La grandeur  $\kappa_\nu = n s_{\nu,a}$  est le **coefficient d'absorption**. Il a la dimension de l'inverse d'une longueur<sup>4</sup> et s'exprime par exemple en  $\text{cm}^{-1}$ . Il dépend bien sûr de la position, ainsi que de la fréquence via  $s_{\nu,a}$ , en particulier au voisinage d'une fréquence de transition si l'élément absorbant est un atome ou une molécule. Sauf cas particuliers (présence d'un fort champ électrique  $\mathbf{E}$  ou magnétique  $\mathbf{B}$ , par exemple),  $\kappa_\nu$  est indépendant de la direction<sup>5</sup>.

Il est utile de noter que si l'on remplace  $dE_\nu$  par son expression (2.1) dans (3.2), on obtient

$$d^2E_{\nu,a} = -\kappa_\nu I_\nu dl d\Sigma d\Omega dt d\nu = -\kappa_\nu I_\nu dV d\Omega dt d\nu, \quad (3.3)$$

où  $dV$  est l'élément de volume concerné. Par intégration, on montre aisément que cette relation donnant l'énergie absorbée par l'élément de volume  $dV$  est indépendante de la forme de cet élément (tant qu'il reste infinitésimal bien sûr).

### Épaisseur optique

Introduisons maintenant la notion très importante d'**épaisseur optique**  $\tau_\nu$  le long du trajet en posant

$$d\tau_\nu = \kappa_\nu dl. \quad (3.4)$$

La grandeur  $\tau_\nu$  est sans dimension et dépend en général de  $\nu$  via  $\kappa_\nu$ . La variation d'énergie due à l'absorption s'exprime alors simplement par

$$d^2E_{\nu,a} = -d\tau_\nu dE_\nu. \quad (3.5)$$

On parle de milieu **optiquement mince** lorsque  $\tau_\nu \ll 1$ , et **optiquement épais** lorsque  $\tau_\nu \gg 1$ .

### 3.1.2 Émissivité

La présence de sources de rayonnement dans le cylindre considéré ci-dessus va également contribuer à la variation de  $dE_\nu$ . Supposant pour commencer qu'il n'y a pas d'éléments absorbants mais uniquement

3. Cette section efficace dépend en général de la fréquence.

4. Notons que certains auteurs écrivent que  $\kappa_\nu = \chi_\nu \rho$ , où  $\rho$  est la masse volumique du milieu, et appellent coefficient d'absorption la grandeur  $\chi_\nu$ , qui s'exprime en  $\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$ .

5. Il faut préciser que cela n'est plus vrai lorsque le milieu absorbant est en mouvement, en raison de l'effet Doppler.

des sources de rayonnement dans le cylindre élémentaire de la Fig. 3.1, on aura

$$dE_\nu(l + dl) - dE_\nu(l) = d^2E_{\nu,e} > 0 \quad (3.6)$$

Pour exprimer  $d^2E_{\nu,e}$ , on introduit l'**émissivité**  $\epsilon_\nu$  telle que

$$d^2E_{\nu,e} = \epsilon_\nu dV d\Omega dt d\nu. \quad (3.7)$$

L'émissivité  $\epsilon_\nu$  est donc la puissance émise par unité de volume, par unité d'angle solide et par intervalle de fréquence dans la direction  $\mathbf{k}$ . Elle s'exprime en  $\text{W}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{Hz}^{-1}\cdot\text{sr}^{-1}$ . Dans le cas général,  $\epsilon_\nu$  dépend de  $M$ , de  $\nu$ , éventuellement de la direction  $\mathbf{k}$  si le milieu émetteur est en mouvement par rapport à l'observateur, et du temps  $t$  si l'on n'est pas en régime stationnaire.

*Exemple :* Au sein d'une galaxie supposée constituée d'étoiles toutes identiques, pour simplifier, et ayant chacune pour luminosité spectrale<sup>6</sup>  $L_\nu$ , l'émissivité a pour expression  $\epsilon_\nu = (n_* L_\nu)/(4\pi)$  où  $n_*$  désigne la densité numérique locale d'étoiles (ici  $\epsilon_\nu$  est indépendant de  $\mathbf{k}$  car le rayonnement des étoiles est isotrope). Notons qu'on se place ici à suffisamment grande échelle pour que le caractère individuel de chaque étoile n'importe pas, ce qui permet d'avoir une émissivité uniforme.

### 3.1.3 Équation du transfert sans diffusion

Dans le cas général où l'absorption et l'émission coexistent, on déduit de ce qui précède que

$$dE_\nu(l + dl) - dE_\nu(l) = d^2E_{\nu,a} + d^2E_{\nu,e} = -\kappa_\nu I_\nu dV d\Omega dt d\nu + \epsilon_\nu dV d\Omega dt d\nu \quad (3.8)$$

Nous relierons ainsi la variation de  $dE_\nu$  le long d'un rayon aux phénomènes d'absorption et d'émission. Cette quantité  $dE_\nu$  s'exprime par ailleurs en fonction de l'intensité spécifique<sup>7</sup>  $I_\nu(l)$ ,

$$dE_\nu(l) = I_\nu(l) d\Sigma d\Omega dt d\nu \quad \text{et} \quad dE_\nu(l + dl) = I_\nu(l + dl) d\Sigma d\Omega dt d\nu, \quad (3.9)$$

d'où la variation  $d^2E_\nu = dI_\nu d\Sigma d\Omega dt d\nu$ . En égalant cette expression de  $d^2E_\nu$  à celle obtenue précédemment (Eq. 3.8) pour  $d^2E_{\nu,a} + d^2E_{\nu,e}$ , on aboutit finalement à l'équation d'évolution de  $I_\nu$  le long de la ligne de visée, qui est l'**équation du transfert** :

$$\frac{dI_\nu}{dl} = -\kappa_\nu I_\nu + \epsilon_\nu. \quad (3.10)$$

Dans la suite de ce chapitre, on va omettre l'indice  $\nu$  pour alléger les notations. On écrira donc  $I$  pour l'intensité spécifique,  $\kappa$  pour le coefficient d'absorption,  $\epsilon$  pour l'émissivité, etc... Il va cependant de soi qu'en général ces quantités dépendent de la fréquence. On écrira donc l'équation du transfert

$$\frac{dI}{dl} = -\kappa I + \epsilon. \quad (3.11)$$

### 3.1.4 Résolution de l'équation du transfert

L'équation du transfert (3.11) est une équation différentielle linéaire du premier ordre. On peut l'intégrer, au moins formellement, pour déterminer l'intensité  $I(M, \mathbf{k})$  en un point  $M$  donné et dans

6. La luminosité spectrale est la puissance totale émise par la source par intervalle de fréquence. Il s'agit donc de la densité spectrale de flux intégrée sur la surface d'émission de la source.

7. supposée ne dépendre que de la position  $l$ , et donc indépendante de la direction et du temps.

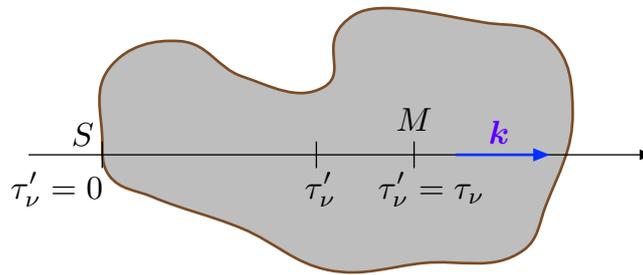


FIGURE 3.2 – **Calcul de l'intensité dans un nuage.** Pour obtenir la valeur de  $I$  au point  $M$ , on intègre l'équation du transfert entre  $S$  et  $M$  avec la condition aux limites  $I(S, \mathbf{k}) = I_0$ .

une direction  $\mathbf{k}$  donnée, à condition bien entendu de connaître les conditions aux limites ainsi que l'émissivité et le coefficient d'absorption. Par exemple, si l'on veut déterminer  $I(M, \mathbf{k})$  en un point  $M$  d'un nuage interstellaire éclairé par les étoiles environnantes (Fig. 3.2), il nous faut connaître l'intensité du rayonnement incident  $I(S, \mathbf{k}_S)$  au point  $S$  de la surface tel que  $\mathbf{k}_S = \mathbf{SM}/SM = \mathbf{k}$ .

La difficulté centrale du problème du transfert de rayonnement réside dans le fait que les propriétés d'absorption et d'émission du milieu vont dépendre du champ de rayonnement, à savoir la densité d'énergie ou l'intensité moyenne. Or, pour obtenir l'intensité moyenne  $J(M)$  au point  $M$ , on devra intégrer l'équation (3.11) pour toutes les directions, ce qui nécessite la connaissance de  $I(S', \mathbf{k}_{S'})$  pour tout point  $S'$  de la surface, dans la direction le liant au point  $M$ , mais surtout celle des coefficients  $\kappa$  et  $\epsilon$  dans l'ensemble du volume, qui dépendent du champ de rayonnement... En l'absence de diffusion, chaque ligne de visée  $S'M$  peut être traitée indépendamment, mais on voit que, même dans ce cas, le problème est hautement non-linéaire.

**Exercice 13 :** Montrer, à partir de l'équation du transfert (3.11), qu'en l'absence d'absorption et d'émission, l'intensité spécifique se conserve.

### 3.1.5 Fonction source

Si  $\kappa \neq 0$ , l'équation (3.11) peut être réécrite sous une forme équivalente en remplaçant la coordonnée  $l$  le long de la direction considérée par l'épaisseur optique  $\tau$ . Avec  $d\tau = \kappa dl$ , on a

$$\frac{dI}{d\tau} = -I + \frac{\epsilon}{\kappa}. \quad (3.12)$$

Cette écriture fait apparaître la **fonction source**

$$S = \frac{\epsilon}{\kappa}. \quad (3.13)$$

On met ainsi l'équation du transfert sous la forme trompeusement simple

$$\frac{dI}{d\tau} = S - I \quad (3.14)$$

Reprenant l'exemple de la Fig. 3.2, l'épaisseur optique le long de l'axe défini par le couple  $(M, \mathbf{k})$  est donnée par

$$\tau(l) = \int_0^l \kappa(l') dl' = s_a \int_0^l n(l') dl' = s_a N(l), \quad (3.15)$$

en prenant  $l = 0$  au bord du nuage (au point  $S$ ). La grandeur  $N(l)$  (exprimée en  $\text{m}^{-2}$  ou en  $\text{cm}^{-2}$ ) est la **densité de colonne** des absorbants.

Exemple : La densité de colonne des atomes d'hydrogène au travers du disque de notre Galaxie, perpendiculairement au disque, et dans le voisinage Solaire, est de l'ordre de  $N_{\text{H}} \sim 10^{21} \text{ cm}^{-2}$ . Celle obtenue dans le plan Galactique est de l'ordre de  $N_{\text{H}} \sim 10^{24} \text{ cm}^{-2}$ .

Notons qu'on a supposé ici que tous les absorbants sont identiques et ont la même section efficace, mais en général, il faudrait ajouter la contribution des diverses espèces. Par exemple, prenant deux espèces 1 et 2 ayant des sections efficaces d'absorption  $s_{1,a}$  et  $s_{2,a}$  et des densités de colonne  $N_1(l)$  et  $N_2(l)$ , on aura

$$\tau(l) = s_{1,a} N_1(l) + s_{2,a} N_2(l). \quad (3.16)$$

### 3.1.6 Solution formelle dans un milieu purement absorbant

Lorsque  $\epsilon = 0$ , la fonction source est nulle et l'équation du transfert devient simplement

$$\frac{dI}{I} = -d\tau, \quad (3.17)$$

qui s'intègre trivialement pour donner la solution formelle de l'équation du transfert dans un milieu purement absorbant

$$I(\tau) = I_0 e^{-\tau}, \quad (3.18)$$

avec  $\tau = 0$  là où  $I = I_0$  (pour un nuage, il est naturel de choisir  $\tau = 0$  là où la ligne de visée atteint le bord du nuage). On retrouve la loi d'atténuation exponentielle bien connue, dite **loi de Beer-Lambert**. Sur cet exemple très simple, on voit clairement que la "bonne variable" à utiliser est l'épaisseur optique  $\tau$  et non la position  $l$ . En effet, la solution ne fait intervenir que  $\tau(l)$ , et non la distribution des valeurs de  $\kappa$  le long de la ligne de visée. Bien entendu, si  $\kappa$  est homogène, on peut écrire

$$I(L) = I_0 e^{-\kappa L} \quad (3.19)$$

qui est la forme habituelle de la loi de Beer-Lambert.

**Exercice 14** : Montrer que dans la limite  $\tau \ll 1$  l'intensité spécifique est atténuée linéairement avec la quantité d'absorbant présents sur la ligne de visée. Interpréter physiquement la saturation de l'absorption lorsque  $\tau$  devient proche de l'unité.

### 3.1.7 Solution formelle dans un milieu absorbant et émissif

Commençons par une remarque qualitative. Lorsque  $S$  est uniforme et non nulle, on peut voir aisément que si l'on pénètre profondément dans le milieu,  $I$  doit nécessairement tendre vers  $S$ . En effet, l'équation (3.14) nous indique que

$$\text{si } I < S \implies \frac{dI}{d\tau} > 0 \quad \text{et} \quad \text{si } I > S \implies \frac{dI}{d\tau} < 0$$

Dans le premier cas,  $I$  croît le long de la ligne de visée jusqu'à atteindre  $S$ , et dans le second cas,  $I$  décroît également jusqu'à atteindre  $S$ . Le "régime stationnaire", pour  $\tau \rightarrow \infty$ , est donc  $I = S$ .

Généralisons à une fonction source non uniforme. Pour une direction  $\mathbf{k}$  donnée, supposons la fonction source  $S(\tau', \mathbf{k})$  connue pour toutes les épaisseurs optiques  $\tau'$  (voir la Fig. 3.2) et intégrons l'équation (3.14), laquelle se présente comme une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre, où  $\tau'$  désigne la variable courante. On montre alors que la solution formelle de l'équation du transfert dans un milieu absorbant et émissif est

$$I(\tau) = I_0 e^{-\tau} + \int_0^\tau S(\tau') e^{-(\tau-\tau')} d\tau'. \quad (3.20)$$

**Exercice 15 : Établir l'expression (3.20).**

L'interprétation des deux termes qui apparaissent dans le membre de droite est immédiate : le premier correspond au rayonnement incident atténué par la traversée du milieu jusqu'à  $\tau$ , comme pour (3.18), tandis que le second provient de l'émission le long de la ligne de visée, atténuée par la matière située entre le point émetteur considéré et le point où l'on calcule  $I$  (Fig. 3.2).

**Si la fonction source est uniforme** dans le milieu ( $S = S_0$ ), la solution prend la forme simple

$$I(\tau) = I_0 e^{-\tau} + S_0(1 - e^{-\tau}) \quad (3.21)$$

où l'on voit clairement que  $I \approx S_0$  lorsque  $\tau \gg 1$ . Dans ce cas, l'intensité dans le milieu devient alors indépendante des conditions aux limites.

Dans la pratique, comme on l'a déjà évoqué,  $S$  n'est pas nécessairement connue *a priori* car  $\epsilon$ , tout comme  $\kappa$ , peut dépendre du champ de rayonnement lui-même (par exemple, le coefficient d'absorption d'un gaz dépend de son degré d'ionisation, lequel est déterminé en partie par la valeur du champ de rayonnement). Dans ce cas, on a affaire à un **problème non linéaire** et l'expression (3.20) ne fournit qu'une solution formelle. Si la dépendance de  $S$  vis à vis de  $I$  est "faible", on pourra éventuellement obtenir la solution par itérations successives, comme on le verra plus tard.

### 3.1.8 Convention "observateur" et convention "modélisateur"

Dans les raisonnements précédents, on a défini l'épaisseur optique par  $d\tau = \kappa dl$ , c'est à dire qu'on a choisi de compter  $\tau$  croissante dans la direction  $\mathbf{k}$  du rayonnement. Lorsqu'on cherche à interpréter le rayonnement émergent d'un milieu optiquement épais (une étoile, par exemple), il est bien plus naturel d'introduire une grandeur qui croisse cette fois dans le sens opposé à celui du vecteur  $\mathbf{k}$ , c'est-à-dire de poser  $d\hat{\tau} = -\kappa dl$ , où  $\hat{\tau}$  représente la **profondeur optique**, qu'on prendra bien sûr nulle à la surface de l'astre en question (Fig. 3.3). Autrement dit, on a  $d\hat{\tau} = -d\tau$ .

Avec cette nouvelle définition, l'équation du transfert devient

$$\frac{dI}{d\hat{\tau}} = I - \frac{\epsilon}{\kappa} = I - S \quad (3.22)$$

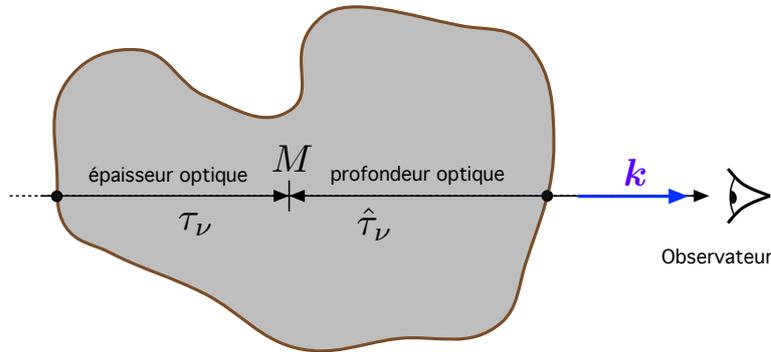


FIGURE 3.3 – **Profondeur optique et épaisseur optique.** La profondeur optique  $\hat{\tau}$  est comptée à partir de la surface de l’astre la plus proche de l’observateur et croît dans la direction opposée à celle du vecteur  $\mathbf{k}$ .

Une démarche analogue à celle effectuée ci-dessus permet de l’intégrer entre  $\hat{\tau}' = 0$  et  $\hat{\tau}' = \hat{\tau}$ , pour obtenir l’expression de l’intensité observée,  $I_{\text{obs}}$  (intensité “émergente” en  $\hat{\tau} = 0$ ), à savoir

$$I_{\text{obs}} = I(\hat{\tau})e^{-\hat{\tau}} + \int_0^{\hat{\tau}} S(\hat{\tau}')e^{-\hat{\tau}'} d\hat{\tau}'. \quad (3.23)$$

### Exercice 16 : Établir l’expression (3.23).

L’interprétation des deux termes qui apparaissent dans le membre de droite est la même que précédemment,  $I(\hat{\tau})$  jouant maintenant le rôle que jouait auparavant  $I_0$ .

Par la suite, afin d’alléger les notations, on utilisera indifféremment la notation  $\tau$  pour désigner l’épaisseur optique ou la profondeur optique. On dira simplement qu’on a choisi la **convention modélisateur** lorsqu’on écrit  $d\tau = \kappa dl$  ou la **convention observateur** si l’on a pris  $d\tau = -\kappa dl$ . En effet, dans le premier cas, les conditions aux limites de l’autre côté du milieu (par rapport à l’observateur), en général inaccessibles à l’observation, sont supposées connues tandis que dans le second, on exprime une grandeur effectivement observée pour en déduire, par résolution de l’équation du transfert, le champ de rayonnement dans les régions internes de l’objet.

### 3.1.9 Équation du transfert en géométrie plan-parallèle

Lorsque la géométrie du milieu et les conditions aux limites présentent la symétrie axiale, il est naturel de mesurer l’épaisseur optique le long de l’axe de symétrie. Notons celui-ci  $Oz$  et notons  $\mathbf{u}_z$  son vecteur unitaire. Le rayon qu’on considère, porté par le vecteur unitaire  $\mathbf{k}$ , fait un angle  $\theta$  supposé aigu avec cet axe de symétrie. Avec  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_z = \cos \theta = \mu > 0$ , on peut alors définir une épaisseur optique  $\tau_\perp$  le long de  $Oz$  et il est clair que celle-ci est liée à l’épaisseur optique  $\tau$  le long du rayon par

$$d\tau = \frac{d\tau_{\perp}}{\mu} \quad (3.24)$$

### Écriture de l'équation en convention modélisateur

L'équation du transfert pour cette direction prend alors la forme

$$\mu \frac{dI}{d\tau_{\perp}} = S - I \quad (3.25)$$

Il est facile de vérifier que pour une direction  $\mu < 0$ , cette relation est également valable.

### Écriture de l'équation en convention observateur

On peut également se placer en convention observateur, auquel cas l'équation du transfert devient

$$\mu \frac{dI}{d\tau_{\perp}} = I - S, \quad (3.26)$$

valable également pour toute valeur de  $\mu$ .

Nous allons maintenant traiter deux applications simples relatives à des milieux présentant cette symétrie axiale. Nous simplifierons les notations en abandonnant l'indice  $\perp$ , implicite lorsque cette condition est réalisée. La présence du facteur  $\mu$  permet de se souvenir de cette convention de notation.

### Cas d'une couche plan-parallèle d'épaisseur finie

On considère une couche plan-parallèle, infinie dans les directions  $Ox$  et  $Oy$ , mais d'épaisseur finie  $L$  dans la direction  $Oz$ . On suppose que l'observateur se trouve du côté correspondant à  $z \rightarrow +\infty$ . Si  $\kappa$  et  $\epsilon$  ne dépendent que de  $z$  et si les faces sont éclairées par une intensité uniforme<sup>8</sup> indépendante de l'angle azimutal  $\varphi$ , on est bien dans le cadre d'une symétrie axiale (Fig. 3.4). On note  $\tau_0$  l'épaisseur optique totale de la couche et  $I_0(\mu)$  l'intensité du rayonnement incident sur la surface  $z = 0$  dans la direction repérée par l'angle  $\theta$ , avec  $\mu = \cos\theta$ . Nous supposons en outre que  $S = \epsilon/\kappa$  ne dépend que de  $\tau$  et non de la direction  $\mu$  et nous adoptons la convention modélisateur. Comparant les équations (3.14) et (3.25), on obtient directement la solution pour  $I(\tau, \mu)$  en changeant  $\tau \mapsto \tau/\mu$ , ce qui donne

$$I(\tau, \mu) = I_0(\mu)e^{-\tau/\mu} + \int_0^{\tau} S(\tau')e^{-(\tau-\tau')/\mu} \frac{d\tau'}{\mu}. \quad (3.27)$$

Si, de plus, la fonction source est uniforme au sein de la couche,  $S(\tau') = S_0$ , l'intensité émergente (pour  $\mu > 0$  donc) en  $\tau = \tau_0$  s'écrit

$$I(\tau_0, \mu) = I_0(\mu)e^{-\tau_0/\mu} + S_0(1 - e^{-\tau_0/\mu}). \quad (3.28)$$

Il arrivera aussi qu'on suppose que la couche n'est pas éclairée ( $I_0 = 0$ ), ce qui donne

$$I(\tau_0, \mu) = S_0(1 - e^{-\tau_0/\mu}). \quad (3.29)$$

8. c'est-à-dire indépendante de la position du point  $M$  sur la face.

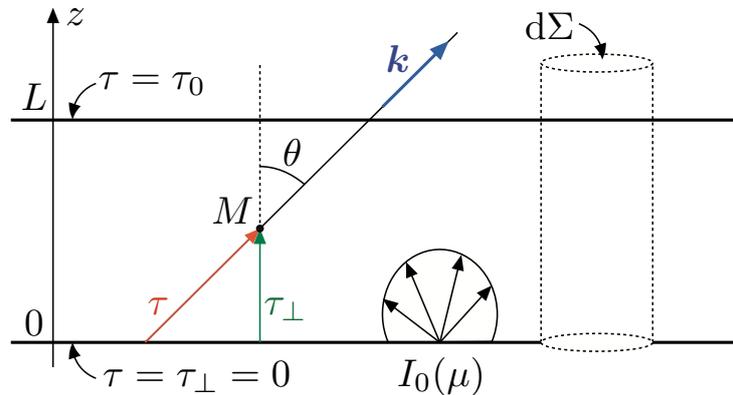


FIGURE 3.4 – **Transfert dans une couche plan-parallèle.** La couche plan-parallèle, d'épaisseur  $L$  et d'épaisseur optique totale  $\tau_0$  est éclairée sur sa face inférieure par l'intensité  $I_0(\mu)$ . L'épaisseur optique  $\tau_\perp$  est comptée le long de  $Oz$ .

**Exercice 17 :** Montrer que dans le cas optiquement mince ( $\tau_0 \ll 1$ ), on a  $I(\tau_0, \mu) \simeq \epsilon_0 L / \mu$ , où l'on a supposé l'émissivité  $\epsilon = \epsilon_0$  uniforme, et qu'alors la puissance  $\mathcal{P}_r$  rayonnée par la couche est égale à celle  $\mathcal{P}_e$  produite au sein du milieu.

**Exercice 18 :** Montrer que dans le cas optiquement épais ( $\tau_0 \gg 1$ ), on a  $I(\tau_0, \mu) \simeq S_0$  et qu'alors le rapport des puissances rayonnée et produite est  $\mathcal{P}_r / \mathcal{P}_e = 1 / (2\tau_0) \ll 1$ .

Ce dernier calcul montre que seul le rayonnement produit dans les couches les plus externes du milieu, sur une épaisseur de l'ordre de  $1 / (2\kappa_0)$ , est effectivement rayonné, et l'essentiel de l'énergie produite au sein du milieu est absorbé. Que devient cette énergie finalement ? Pour préciser cela, considérons par exemple le cas d'un disque de galaxie dans lequel des étoiles (responsables de l'émission dans le domaine UV-visible) sont mélangées à des poussières interstellaires (responsables de l'absorption). Les photons absorbés chauffent les poussières et celles-ci sont portées à une température non nulle, stationnaire<sup>9</sup> (typiquement 10 à 50 K selon le champ de rayonnement [9]). Ainsi, elles réémettent une quantité d'énergie égale à celle absorbée, sous forme de rayonnement thermique dans l'infrarouge lointain. À ces longueurs d'onde, les poussières sont beaucoup moins opaques et ce rayonnement pourra s'échapper du milieu. Le phénomène d'absorption/émission thermique par les grains a donc opéré une **redistribution de l'énergie** dans un autre domaine de longueur d'onde, permettant au milieu de conserver un équilibre global. Les processus mis en jeu pour atteindre un tel équilibre sont propres à chaque milieu et dépendent des phénomènes susceptibles de réaliser une conversion de l'énergie vers un domaine spectral où le milieu est transparent. Si aucun phénomène de ce type n'est efficace, la structure du milieu devra se modifier pour conduire à un nouvel équilibre (chauffage du gaz, augmentation de la pression puis expansion, ce qui amène à une dilution du milieu et donc une diminution de l'opacité).

### Rayonnement émergent d'une étoile

On considère maintenant le rayonnement émergent d'une étoile, dont la courbure serait suffisamment faible pour que le modèle plan-parallèle soit valable. Nous adoptons maintenant la convention observateur pour laquelle l'équation du transfert prend la forme (3.26). Nous supposons à nouveau que  $S$  dépend seulement de  $\tau$ , que l'intensité "entrante" est nulle, soit  $I(\tau = 0, \mu < 0) = 0$ , ce qui exclut

9. Ceci n'est valable que pour les grains suffisamment gros. Les petits grains, du fait de leur faible capacité calorifique, subissent des variations stochastiques de température à chaque absorption d'un photon UV.

par exemple que l'étoile appartienne à un système binaire serré, et que le champ de rayonnement dans les couches profondes de l'étoile reste fini.

On montre alors qu'à la surface ( $\tau = 0$ ), on obtient pour l'intensité du rayonnement sortant

$$I(\tau = 0, \mu > 0) = \int_0^\infty S(\tau') e^{-\tau'/\mu} \frac{d\tau'}{\mu}. \quad (3.30)$$

**Exercice 19 : Établir l'expression (3.30).**

Le flux sortant correspondant,  $F^+$ , est alors donné par

$$F^+ = 2\pi \int_0^\infty S(\tau') E_2(\tau') d\tau', \quad (3.31)$$

où  $E_2$  désigne la fonction intégrale exponentielle d'ordre 2, définie par

$$E_2(x) = \int_1^\infty e^{-ux} \frac{du}{u^2}. \quad (3.32)$$

**Exercice 20 : Établir l'expression (3.31).**

**Relations de Schwarzschild-Milne et d'Eddington-Barbier**

Les relations (3.30) et (3.31) constituent un cas particulier ( $\tau = 0$ ) qu'il est possible de généraliser aux couches internes de l'atmosphère stellaire ( $\tau > 0$ ). Le calcul des moments de l'intensité spécifique dans ce cas fournit trois équations qui constituent les **relations de Schwarzschild-Milne**

$$J(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\tau' S(\tau') E_1(|\tau' - \tau|) \quad (3.33)$$

$$F = 2\pi \left[ \int_\tau^\infty S(\tau') E_2(\tau' - \tau) d\tau' - \int_0^\tau S(\tau') E_2(\tau - \tau') d\tau' \right] \quad (3.34)$$

$$p(\tau) = \frac{2\pi}{c} \int_0^\infty d\tau' S(\tau') E_3(|\tau' - \tau|) \quad (3.35)$$

qui font intervenir la famille d'intégrales exponentielles

$$E_n(x) = \int_1^\infty e^{-xu} \frac{du}{u^n}. \quad (3.36)$$

Comme les intégrales exponentielles ont toutes un comportement en  $e^{-x}/x$  pour  $x \gg 1$ , les expressions de  $J$  et  $p$  sont essentiellement déterminées par la valeur de la fonction source  $S$  au voisinage du point considéré  $\tau$ . En revanche, le flux est fonction de la différence entre l'émission des couches plus profondes et plus en surface.

**Exercice 21 : Établir les relations de Schwarzschild-Milne.**

*Exemple :* Un exemple simple est celui d'une fonction source linéaire  $S(\tau) = a + b\tau$ , avec  $b > 0$  car, comme on le verra, la fonction source croît, avec la température, vers l'intérieur de l'atmosphère

stellaire. Remarquons que l'intensité émergente au sommet de l'atmosphère est alors

$$I(0, \mu \geq 0) = \int_0^\infty S(\tau) \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right) \frac{d\tau}{\mu} = a + b\mu$$

ce qui constitue la **relation d'Eddington-Barbier**. Elle justifie la forme polynomiale de degré un en  $\mu$  que nous avons considérée à la section 2.6.

### Équation des moments

Dans le cas précédent, nous avons pu exprimer l'intensité sortante  $I(\tau = 0, \mu > 0)$ ; cette solution est toutefois assez académique dans la mesure où la fonction source  $S(\tau)$  dépend en général elle-même du champ de rayonnement. Aussi, pour obtenir une solution explicite, on sera fréquemment amené à renoncer à déterminer  $I(\tau, \mu)$  dans toute sa complexité, et on cherchera plutôt à estimer des grandeurs intégrées sur les angles, telles que l'intensité moyenne  $J$  ou le flux  $F$ .

On montre, en se plaçant dans le cas d'un milieu présentant la symétrie axiale avec une fonction source isotrope, et en adoptant la convention observateur, qu'on a les relations

$$\frac{dF}{d\tau} = 4\pi(J - S) \quad (3.37)$$

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{F}{c} \quad (3.38)$$

**Exercice 22 :** Établir les expressions (3.37) et (3.38).

### Approximation d'Eddington

Si l'écriture de l'équation (3.37) ne fait plus apparaître la direction  $\mu$ , elle met néanmoins en jeu deux fonctions inconnues,  $J$  et  $F$  et ne peut donc, à elle seule, nous fournir la solution. L'ajout de l'équation (3.38) introduit une troisième fonction inconnue,  $p$ . Il est clair que cette approche en termes de moments ne peut être fructueuse qu'en imposant une **relation de clôture**. C'est le sens de **l'approximation d'Eddington**, qui consiste à supposer la relation suivante entre deux de ces moments :

$$p = \frac{4\pi}{3c} J. \quad (3.39)$$

Comme on l'a vu plus haut, le rapport  $p/J$  mesure l'importance relative de l'intensité dans les directions  $\mu \approx \pm 1$  par rapport aux directions  $\mu \approx 0$ . Adopter l'approximation d'Eddington nous laisse en revanche la liberté de faire varier  $J$  et  $F/J$  c'est-à-dire la valeur moyenne du champ de rayonnement et le degré d'asymétrie avant-arrière. Nous avons rencontré précédemment (voir la Sec. 2.6) quelques modèles simples pour  $I(\mu)$  compatibles avec cette relation (isotrope, semi-isotrope, linéaire en  $\mu$ , modèle à deux faisceaux pour  $\mu_0 = \pm 1/\sqrt{3}$ ).

L'introduction d'une relation supplémentaire entre  $J$  et  $p$  nous permet maintenant d'obtenir la solution du problème, c'est à dire de déterminer  $J$  et  $F$ . On montre en effet qu'alors

$$\frac{1}{3} \frac{d^2 J}{d\tau^2} = J - S, \quad (3.40)$$

ce qui constitue l'équation d'Eddington. Si la fonction source  $S$  est connue, ce qui implique une connaissance supplémentaire du milieu considéré, cette équation différentielle linéaire du second ordre permet d'obtenir  $J$ , puis le flux  $F$  par la relation

$$F = \frac{4\pi}{3} \frac{dJ}{d\tau}. \quad (3.41)$$

**Exercice 23 : Démontrer les relations (3.40) et (3.41).**

L'approximation d'Eddington n'a pas, dans ce cas précis, un intérêt flagrant, puisque la connaissance de  $S$  permet déjà de résoudre l'équation du transfert sur  $I$  directement. En réalité, son importance apparaît beaucoup plus nettement en présence de diffusion.

**3.1.10 Équation du transfert en géométrie sphérique**

On a discuté du cas du rayonnement émergent d'une étoile en négligeant sa courbure, ce qui permettait de se placer en géométrie plan-parallèle. On va donner maintenant l'expression de l'équation du transfert dans le cas de la symétrie sphérique, nécessaire lorsque la courbure n'est pas négligeable.

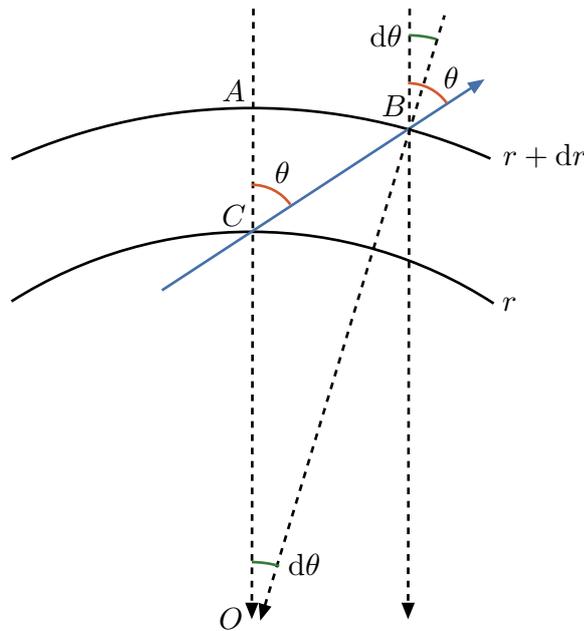


FIGURE 3.5 – Transfert en symétrie sphérique.

**Équation du transfert**

La situation est celle décrite sur la Fig. 3.5, et on cherche à établir l'équation du transfert le long du rayon  $CB$ , en partant de l'écriture

$$\frac{dI_\nu}{dl} = \epsilon_\nu - \kappa_\nu I_\nu \quad (3.42)$$

où  $l$  est l'abscisse curviligne le long du rayon considéré. Par des considérations géométriques, on aboutit relativement facilement à l'expression

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial I_\nu}{\partial \mu} + \kappa_\nu I_\nu - \epsilon_\nu = 0 \quad (3.43)$$

**Exercice 24 :** Établir la relation (3.43).

### Équations des moments de l'intensité

À partir de l'équation précédente, on obtient, en supposant que l'émissivité  $\epsilon_\nu$  et le coefficient d'absorption  $\kappa_\nu$  sont isotropes, une équation portant sur la densité spectrale de flux

$$\frac{dF_\nu}{dr} + \frac{2F_\nu}{r} + c\kappa_\nu u_\nu - 4\pi\epsilon_\nu = 0 \quad (3.44)$$

puis une équation portant sur la densité spectrale de pression radiative

$$\frac{dp_\nu}{dr} + \frac{3p_\nu - u_\nu}{r} + \frac{\kappa_\nu F_\nu}{c} = 0 \quad (3.45)$$

**Exercice 25 :** Établir les relations (3.44) et (3.45).

### Limite d'une courbure nulle

Dans la limite d'une courbure nulle, on retrouve les équations de moments établies dans le cas de la géométrie plan-parallèle. En effet, lorsque  $r \rightarrow \infty$  les deux équations de moments ci-dessus deviennent

$$\frac{dF_\nu}{dr} + c\kappa_\nu u_\nu - 4\pi\epsilon_\nu = 0 \quad \frac{dp_\nu}{dr} + \frac{\kappa_\nu F_\nu}{c} = 0 \quad (3.46)$$

En posant  $d\tau_\nu = -\kappa_\nu dr$ , elles deviennent bien

$$\frac{dF_\nu}{d\tau_\nu} = cu_\nu - 4\pi S_\nu = 4\pi (J_\nu - S_\nu) \quad \frac{dp_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{F_\nu}{c} \quad (3.47)$$

## 3.2 Transfert de rayonnement avec diffusion

### 3.2.1 Phénomènes de diffusion

Dans la réalité, lors de l'interaction du rayonnement avec la matière, le phénomène de diffusion du rayonnement, négligé dans la section précédente, coexiste souvent avec l'absorption.

► La **diffusion Thomson** a lieu lors de l'interaction de photons de faible énergie avec des charges libres, donc dans des gaz au moins partiellement ionisés, comme les intérieurs stellaires. Du fait de leur moindre inertie, l'interaction se fait principalement avec les électrons. La section efficace d'interaction est indépendante de la longueur d'onde  $\lambda$  et vaut, pour du rayonnement non polarisé,  $s_\nu = 6.65 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$ . La répartition angulaire du rayonnement diffusé, toujours pour du rayonnement incident non polarisé, est également indépendante de la longueur d'onde, et varie comme  $1 + \cos^2 \vartheta$ , avec  $\vartheta$  l'angle entre les directions incidente et diffusée. Cette diffusion est **élastique**, ou encore **cohérente**, ce qui signifie que la fréquence du photon n'est pas modifiée. La diffusion Thomson contribue par exemple à l'épaisseur

optique des étoiles et à l'épaisseur optique de l'univers avant la recombinaison.

► En présence de photons ou d'électrons très énergétiques, on ne peut adopter un traitement classique fondé sur le rayonnement du dipôle et on parle de **diffusion Compton**, là encore sur les charges libres. Notons que cette diffusion est **inélastique**, ce qui signifie que l'énergie du photon, donc la fréquence du rayonnement, change lors de l'interaction. Lorsque le photon perd de l'énergie, on parle de **diffusion Compton directe**, et lorsqu'il en gagne de **diffusion Compton inverse**. Un exemple de ce dernier cas est l'**effet Sunyaev-Zeldovich**, qui explique la distortion spectrale du fond diffus cosmologique au travers du gaz très chaud des amas de galaxies. Notons que la diffusion Thomson est la limite de la diffusion Compton à basse énergie.

► La **diffusion Rayleigh** a lieu lorsqu'un photon interagit avec une charge liée (dans un atome ou une molécule), que l'on peut en première approximation traiter par le modèle de l'électron élastiquement lié. La différence importante par rapport à la diffusion Thomson est le comportement à basse fréquence, où une dépendance en  $\omega^4$  apparaît. Celle-ci explique que les atmosphères planétaires (celle de la Terre en particulier!) diffusent davantage la lumière solaire dans le bleu que dans le rouge, d'où la couleur bleue du ciel. Lorsque la taille des particules diffusantes augmente (grains de poussière interstellaires, gouttelettes d'eau dans un brouillard), on passe à la **diffusion de Mie**, beaucoup moins chromatique.

### 3.2.2 Équation du transfert en présence de diffusion

On a vu précédemment qu'en l'absence de diffusion, on peut résoudre l'équation du transfert le long d'une ligne de visée particulière, indépendamment des autres, à condition de connaître  $S$ . Le phénomène de diffusion va coupler entre elles toutes les régions et il nous faudra maintenant résoudre l'équation du transfert globalement, pour l'ensemble du milieu, ce qui complique beaucoup le problème. Dans la suite, nous allons pour simplifier supposer que la diffusion est cohérente.

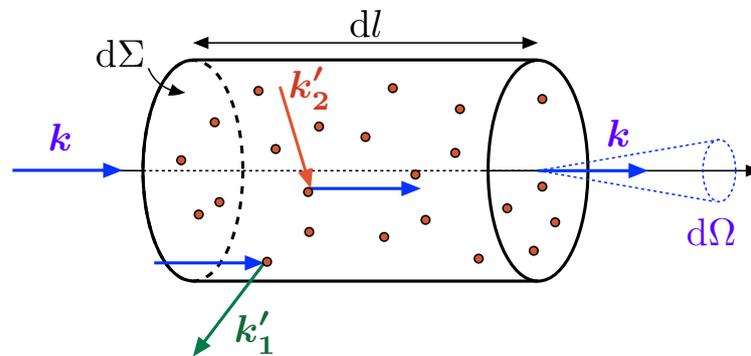


FIGURE 3.6 – **Le double effet de la diffusion.** La diffusion a pour effet d'une part d'envoyer des photons ayant la direction incidente considérée  $k$  vers une autre direction  $k'_1$  (contribution négative à  $dE_{\nu}$ ) et d'autre part de ramener dans la direction  $k$  des photons traversant l'élément de volume  $dV$  avec des directions de vol telles que  $k'_2$  (contribution positive à  $dE_{\nu}$ ).

#### Section efficace, coefficient de diffusion, diffusion hors du faisceau

Comme pour le cas sans diffusion, nous allons chercher à exprimer la variation  $d^2E_{\nu,d}$  - due uniquement à la diffusion - de l'énergie  $dE_{\nu}$  traversant le volume  $dV = d\Sigma dl$  dans la direction  $k = n$ .

Ce processus provoque d'une part une diminution de  $dE_\nu$ , notée  $d^2E_{\nu,d}^-$ , car des photons sont défléchis dans une direction autre que  $\mathbf{k}$ , telle que  $\mathbf{k}'_1$  sur la figure 3.6. Pour caractériser cet effet, nous définissons comme pour l'absorption une **section efficace de diffusion**  $s_{\nu,d}$  et un **coefficient de diffusion**  $\sigma_\nu = ns_{\nu,d}$ , avec  $n$  la densité numérique des éléments diffusants. La dimension de  $\sigma_\nu$  est la même que celle de  $\kappa_\nu$ , à savoir l'inverse d'une longueur, et ce coefficient dépend en général de la fréquence. La variation de l'énergie lumineuse du fait de ce phénomène de **diffusion hors du faisceau** est alors

$$d^2E_{\nu,d}^- = -ns_{\nu,d}dl dE_\nu = -\sigma_\nu dl dE_\nu = -\sigma_\nu I_\nu dV d\Omega dt d\nu, \quad (3.48)$$

### Exercice 26 : Établir la relation (3.48).

À cette diminution  $d^2E_{\nu,d}^-$  est associée une variation de  $I_\nu$ , tout à fait analogue à celle liée à l'absorption, à savoir  $dI_{\nu,a} = -\kappa_\nu I_\nu dl$  (voir l'équation 3.3),

$$dI_{\nu,d}^- = -\sigma_\nu I_\nu dl. \quad (3.49)$$

### Section efficace différentielle de diffusion

La diffusion a d'autre part pour effet de ramener dans la direction  $\mathbf{k}$  des photons issus d'autres directions telles que  $\mathbf{k}'_2$  (Fig. 3.6). Afin d'exprimer la contribution correspondante à la variation de l'énergie ( $d^2E_{\nu,d}^+$ , positive cette fois) il faut revenir sur l'expression du terme  $d^2E_{\nu,d}^-$  en faisant apparaître explicitement l'énergie diffusée dans chacune des différentes directions  $\mathbf{k}'_1 \neq \mathbf{k}$ . Pour ce faire, on introduit la **section efficace différentielle de diffusion**  $\tilde{s}_{\nu,d}(\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}')$  caractérisant l'efficacité de la diffusion depuis la direction  $\mathbf{k}$  initiale (à  $d\Omega$  près) vers la direction finale  $\mathbf{k}'$  (à  $d\Omega'$  près). À  $\tilde{s}_{\nu,d}$  est associé un coefficient différentiel de diffusion  $\tilde{\sigma}_\nu(\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}') = n\tilde{s}_{\nu,d}(\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}')$  que, par analogie avec l'équation (3.48), nous définirons par la relation

$$d^3E_{\nu,d}^-(\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}') = -\frac{\tilde{\sigma}_\nu(\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}')}{4\pi} d\Omega' I_\nu(\mathbf{k}) dV d\Omega dt d\nu, \quad (3.50)$$

où  $d^3E_{\nu,d}^-(\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}')$  désigne l'énergie venant de  $\mathbf{k}$  et redistribuée dans la direction  $\mathbf{k}'$ . Le terme  $d^2E_{\nu,d}^-$  n'est alors rien d'autre que le résultat de l'intégration sur  $d\Omega'$  de l'expression précédente, soit

$$d^2E_{\nu,d}^-(\mathbf{k}) = \int_{\Omega'} d^3E_{\nu,d}^-(\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}') = - \left[ \int \frac{\tilde{\sigma}_\nu(\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}')}{4\pi} d\Omega' \right] I_\nu(\mathbf{k}) dV d\Omega dt d\nu. \quad (3.51)$$

Ainsi, avec la définition choisie pour  $\tilde{\sigma}_\nu$ , on a simplement

$$\sigma_\nu = \int \frac{\tilde{\sigma}_\nu(\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}')}{4\pi} d\Omega', \quad (3.52)$$

et  $\sigma_\nu$  n'est autre que la valeur moyenne de  $\tilde{\sigma}_\nu$  sur tous les angles de diffusion  $(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ . Notons que  $\tilde{\sigma}_\nu$  a la même dimension que  $\sigma_\nu$  et s'exprime donc en  $\text{m}^{-1}$  ou en  $\text{cm}^{-1}$ .

### Diffusion à l'intérieur du faisceau

Nous sommes maintenant en mesure d'exprimer la variation  $dI_{\nu,d}^+$  de l'intensité spécifique  $I_\nu$  liée au phénomène de **diffusion à l'intérieur du faisceau**, qui s'écrit

$$dI_{\nu,d}^+(\mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'} \tilde{\sigma}_{\nu}(\mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{k}) I_{\nu}(\mathbf{k}') d\Omega' dl. \quad (3.53)$$

**Exercice 27 :** Établir l'expression (3.53).

### Équation du transfert

L'équation du transfert devient alors, en comptant toutes les contributions,

$$\frac{dI_{\nu}}{dl} = -(\kappa_{\nu} + \sigma_{\nu})I_{\nu} + \epsilon_{\nu} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'} \tilde{\sigma}_{\nu}(\mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{k}) I_{\nu}(\mathbf{k}') d\Omega' \quad (3.54)$$

Cette équation fait clairement apparaître la difficulté supplémentaire imposée par la diffusion dans le traitement du transfert. Même en supposant que l'émissivité et les coefficients d'absorption et de diffusion sont indépendants du champ de rayonnement, on doit néanmoins résoudre une équation intégral-différentielle couplant tous les rayons.

### Cas particulier de la diffusion isotrope

Dans le cas important de la **diffusion isotrope**,  $\tilde{\sigma}_{\nu}(\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}')$  ne dépend pas de l'angle de diffusion (angle entre les directions  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{k}'$ ) et l'on a simplement  $\sigma_{\nu} = \tilde{\sigma}_{\nu}$ . C'est pour obtenir cette propriété que l'on a introduit le facteur  $1/(4\pi)$  dans (3.50). Dans ce cas, l'équation du transfert devient

$$\frac{dI_{\nu}}{dl} = -(\kappa_{\nu} + \sigma_{\nu})I_{\nu} + \epsilon_{\nu} + \sigma_{\nu}J_{\nu}. \quad (3.55)$$

On voit que l'hypothèse d'une diffusion isotrope rend l'équation vérifiée par  $I_{\nu}$  (apparemment) plus simple. Le coefficient  $\alpha_{\nu} = \kappa_{\nu} + \sigma_{\nu}$  est appelé **coefficient d'extinction**. On introduit également l'**albedo de simple diffusion**  $\omega_{\nu}$  qui représente la part de l'extinction due à la diffusion, soit

$$\omega_{\nu} = \frac{\sigma_{\nu}}{\kappa_{\nu} + \sigma_{\nu}}. \quad (3.56)$$

Il est alors naturel de définir l'épaisseur optique par  $d\tau_{\nu} = (\kappa_{\nu} + \sigma_{\nu})dl$ , de sorte que

$$\frac{dI_{\nu}}{d\tau_{\nu}} = -I_{\nu} + \mathcal{S}_{\nu} \quad \text{avec} \quad \mathcal{S}_{\nu} = \frac{\epsilon_{\nu} + \sigma_{\nu}J_{\nu}}{\kappa_{\nu} + \sigma_{\nu}} = \omega_{\nu}J_{\nu} + (1 - \omega_{\nu})S_{\nu} \quad (3.57)$$

où  $S_{\nu} = \epsilon_{\nu}/\kappa_{\nu}$  est la fonction source en l'absence de diffusion. Cette équation est analogue à (3.14) mais on voit clairement ici que  $\mathcal{S}_{\nu}$  ne saurait être connue a priori puisqu'elle dépend explicitement de  $J_{\nu}$ , c'est-à-dire du champ de rayonnement lui-même. Les solutions obtenues précédemment pour l'équation sans diffusion (3.20) ou (3.23) ont exactement la même forme. Ces expressions ne fournissent toutefois pas une solution explicite puisque  $\mathcal{S}_{\nu}$  dépend de  $I_{\nu}$  via  $J_{\nu}$ .

### 3.2.3 Approximation d'Eddington

Lorsque des processus de diffusion interviennent, il devient bien plus difficile de déterminer  $I_{\nu}(M, \mathbf{k}, t)$ . En effet, comme indiqué plus haut, toutes les lignes de visée sont couplées entre elles, ce qui se manifeste par la présence de  $J_{\nu}$  dans l'équation du transfert établie ci-dessus. L'approximation d'Eddington est alors d'autant plus utile. Pour la mettre en oeuvre, nous allons reprendre la démarche effectuée

précédemment (paragraphe 3.1.9) en adoptant les hypothèses suivantes : a) le milieu et les conditions aux limites présentent la symétrie axiale ; b) l'émissivité  $\epsilon_\nu$  est isotrope ; c) la diffusion est isotrope<sup>10</sup>. La symétrie axiale nous incite à utiliser une variable  $z$  évaluée le long de l'axe de symétrie, que nous prendrons croissante dans la direction  $\mu = -1$  (convention observateur), et qui désigne donc simplement la profondeur (pour des raisons qui apparaîtront plus loin, nous n'utilisons pas ici la profondeur optique). Avec ces notations, l'équation du transfert prend la forme

$$\mu \frac{dI_\nu}{dz} = (\kappa_\nu + \sigma_\nu)I_\nu - (\epsilon_\nu + \sigma_\nu J_\nu). \quad (3.58)$$

On montre alors que les premiers moments de l'intensité spécifique obéissent aux équations

$$\frac{dF_\nu}{dz} = 4\pi (\kappa_\nu J_\nu - \epsilon_\nu) \quad (3.59)$$

$$\frac{dp_\nu}{dz} = (\kappa_\nu + \sigma_\nu) \frac{F_\nu}{c}. \quad (3.60)$$

### **Exercice 28 : Établir les relations (3.59) et (3.60).**

En appliquant l'approximation d'Eddington,  $p_\nu = (4\pi/3c)J_\nu$ , on peut clore le système et en déduire que l'intensité moyenne obéit à l'équation

$$\frac{1}{3} \frac{d^2 J_\nu}{d\tau_{\text{eff},\nu}^2} = J_\nu - S_\nu \quad (3.61)$$

en introduisant une **profondeur optique effective**  $\tau_{\text{eff},\nu}$  telle que

$$d\tau_{\text{eff},\nu} = \sqrt{\kappa_\nu(\kappa_\nu + \sigma_\nu)} dz = \kappa_{\text{eff},\nu} dz \quad (3.62)$$

Cette profondeur optique effective est la moyenne géométrique de celle associée à la seule absorption  $d\tau_{a,\nu} = \kappa_\nu dz$  et de celle associée à l'extinction  $d\tau_\nu = (\kappa_\nu + \sigma_\nu) dz$ . Elle a donc une valeur intermédiaire entre les deux.

### **Exercice 29 : Établir l'équation (3.61).**

Le point important est que le membre de droite de l'équation obtenue ne fait plus intervenir la fonction source complète  $S_\nu$ , mais uniquement la fonction source sans diffusion  $S_\nu$ , ce qui la rend *a priori* plus simple à résoudre. Dans le cadre de l'approximation d'Eddington, les solutions de l'équation du transfert avec diffusion seront donc les mêmes que celles obtenues en l'absence de diffusion, à condition de remplacer la profondeur optique par la profondeur optique effective. On voit là l'intérêt de cette approximation.

## **3.2.4 Interprétation probabiliste de la diffusion**

Afin de mieux comprendre la signification physique de l'épaisseur optique effective, nous allons préciser en quoi le phénomène de diffusion modifie le destin d'un photon avant son absorption. Pour ce faire, nous nous placerons dans la limite où les photons subissent (en moyenne) un nombre élevé de diffusions avant d'être absorbés. Cela implique d'une part que l'albedo  $\omega_\nu$  soit voisin de l'unité et d'autre part que le milieu considéré soit optiquement épais (sans quoi de nombreux photons pourraient quitter le milieu avant d'interagir).

10. Comme remarqué plus haut, le coefficient d'absorption est généralement isotrope, on ne le précise donc pas.

### Probabilités d'interaction

Considérons le déplacement de photons individuels et les interactions que ceux-ci subissent avec la matière. Ces interactions sont de deux types : absorption (le photon disparaît "sur place") et diffusion (le photon repart dans une autre direction, aléatoire, telle qu'en moyenne sur de nombreux événements la distribution des angles de diffusion reproduise la dépendance angulaire du coefficient  $\tilde{\sigma}_\nu$ ). La probabilité pour qu'une interaction soit une diffusion vaut simplement  $\omega_\nu$  (albedo de simple diffusion), la probabilité pour que cette interaction soit une absorption étant quant à elle simplement égale à  $\eta_\nu = 1 - \omega_\nu$ .

### Libre parcours moyen

On montre que la distance moyenne  $\langle l \rangle$  parcourue avant interaction (le **libre parcours moyen**) est

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\kappa_\nu + \sigma_\nu} \quad (3.63)$$

**Exercice 30 :** Établir l'expression (3.63) du libre parcours moyen. On pourra commencer par montrer que la probabilité de non-interaction d'un photon après un trajet de "longueur"  $\tau_\nu$  dans le milieu est  $P_s(\tau_\nu) = e^{-\tau_\nu}$ , puis en déduire la probabilité pour qu'une interaction intervienne précisément entre  $\tau_\nu$  et  $\tau_\nu + d\tau_\nu$ .

### Nombre moyen de diffusions avant absorption

Ce nombre moyen de diffusions avant absorption, noté  $\bar{N}(\omega_\nu)$ , est évidemment une fonction de l'albedo  $\omega_\nu$  et on peut dire a priori que lorsque  $\omega_\nu \rightarrow 0$  alors  $\bar{N} \rightarrow 0$ , et que pour  $\omega_\nu \rightarrow 1$  alors  $\bar{N} \rightarrow +\infty$ . On montre sans grande difficulté qu'il a pour expression

$$\bar{N}(\omega_\nu) = \frac{\omega_\nu}{1 - \omega_\nu} \quad (3.64)$$

**Exercice 31 :** Établir l'expression (3.64). On commencera par exprimer la probabilité  $p(N)$  d'observer exactement  $N$  diffusions avant une absorption.

Dans la limite  $\omega_\nu \rightarrow 1$ , correspondant à un grand nombre de diffusions avant absorption,

$$\bar{N}(\omega_\nu) \simeq \frac{1}{1 - \omega_\nu} \quad (3.65)$$

### Distance moyenne parcourue avant absorption

La diffusion revêt ici un caractère de **marche aléatoire**. On en déduit que la distance moyenne  $\mathcal{R}$  à laquelle se trouve un photon, par rapport à son point de départ, lorsqu'il est finalement absorbé, est  $\mathcal{R} = \sqrt{\bar{N}} \times \langle l \rangle$ . Dans la limite  $\omega_\nu \rightarrow 1$ , on a donc

$$\mathcal{R} = \sqrt{\bar{N}} \langle l \rangle \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \omega_\nu}(\kappa_\nu + \sigma_\nu)} = \frac{1}{\kappa_{\text{eff},\nu}} \quad (3.66)$$

Ainsi, il apparaît que l'expression de  $\kappa_{\text{eff},\nu}$  (moyenne géométrique de  $\kappa_\nu$  et  $\kappa_\nu + \sigma_\nu$ ) traduit directement l'augmentation du trajet moyen parcouru avant absorption du fait des diffusions multiples préalables. On verra plus loin comment tirer parti de cette approche probabiliste pour établir une grande classe de méthodes de résolution de l'équation du transfert par simulation Monte-Carlo.

## Réponses aux exercices du chapitre 3

### **Exercice 12**

Le volume  $dV = d\Sigma dl$  contient  $n dV$  éléments absorbants qui, à eux tous, présentent au rayonnement une surface projetée  $n s_{\nu,a} dV$ . La fraction de la surface occultée par ces éléments absorbants vaut donc

$$\frac{n s_{\nu,a} dV}{d\Sigma} = n s_{\nu,a} dl,$$

et représente également la fraction de l'énergie  $dE_\nu$  absorbée. D'où l'expression de  $d^2 E_{\nu,a}$ ,

$$d^2 E_{\nu,a} = -n s_{\nu,a} dl dE_\nu = -\kappa_\nu dl dE_\nu,$$

le signe  $-$  traduisant le fait que l'absorption prélève de l'énergie au faisceau.

Lorsqu'on a écrit que les éléments absorbants présentent au rayonnement une surface projetée  $n s_{\nu,a} dV$ , on a supposé sans le dire que ces éléments absorbants ne s'occultent pas mutuellement. Cela est bien sûr justifié par le fait que l'on considère un cylindre élémentaire de longueur  $dl$  "très petite", mais suppose toutefois que l'on soit en présence d'un milieu suffisamment dilué. En pratique, notre raisonnement suppose que la racine carrée de  $s_{\nu,a}$  soit très petite devant la distance typique séparant un absorbant et ses plus proches voisins, soit

$$\sqrt{s_{\nu,a}} \ll n^{-1/3}$$

Ainsi, le raisonnement ci-dessus ne s'applique pas du tout aux atomes constituant un solide, où, de plus, l'interaction mutuelle entre les atomes du solide induit un comportement collectif (modes d'oscillation du réseau) qui modifie radicalement l'interaction avec le rayonnement.

### **Exercice 13**

L'équation du transfert que nous avons obtenue est évidemment compatible avec la conservation de  $I$  dans le vide établie précédemment. En effet, on a dans ce cas  $\kappa = 0$  et  $\epsilon = 0$ , et donc

$$\frac{dI}{dl} = 0.$$

### **Exercice 14**

Lorsque  $\tau \ll 1$ , l'atténuation varie linéairement avec la quantité d'absorbants présents sur la ligne de visée (c'est-à-dire la densité de colonne  $N$ ) :

$$I(\tau) \simeq I_0 (1 - \tau) = I_0 (1 - s_a N)$$

mais quand  $\tau$  devient proche de 1, l'absorption "sature" et cette écriture approchée linéaire n'est plus valable. Ceci est simplement dû à l'effet d'occultation mutuelle des absorbants qui devient non négligeable, voire important.

### **Exercice 15**

On multiplie d'abord chaque membre par de l'équation du transfert (3.14) par  $e^{\tau'}$  :

$$\frac{dI(\tau')}{d\tau'} e^{\tau'} + I(\tau') e^{\tau'} = \frac{d}{d\tau'} (I e^{\tau'}) = S(\tau') e^{\tau'}.$$

L'intégration entre  $\tau' = 0$  et  $\tau' = \tau$  conduit alors à

$$\left[ I(\tau') e^{\tau'} \right]_0^\tau = I(\tau) e^\tau - I_0 = \int_0^\tau S(\tau') e^{\tau'} d\tau'.$$

et donc à l'expression annoncée.

### Exercice 16

En multipliant maintenant chaque membre de l'équation (3.22) par  $e^{-\hat{\tau}'}$  (au lieu de  $e^{\tau'}$  précédemment), on obtient alors, après intégration entre  $\hat{\tau}' = 0$  et  $\hat{\tau}' = \hat{\tau}$ ,

$$I(\hat{\tau})e^{-\hat{\tau}} - I_{\text{obs}} = - \int_0^{\hat{\tau}} S(\hat{\tau}')e^{-\hat{\tau}'} d\hat{\tau}',$$

d'où l'expression de l'intensité observée,  $I_{\text{obs}}$  (intensité "émergente" en  $\hat{\tau} = 0$ ),

$$I_{\text{obs}} = I(\hat{\tau})e^{-\hat{\tau}} + \int_0^{\hat{\tau}} S(\hat{\tau}')e^{-\hat{\tau}'} d\hat{\tau}'.$$

### Exercice 17

Lorsque  $\tau_0 \rightarrow 0$  (cas optiquement mince), l'intensité émergente est

$$I(\tau_0 \rightarrow 0, \mu) \approx S_0 \frac{\tau_0}{\mu} \approx \frac{\epsilon_0}{\kappa_0} \frac{\kappa_0 L}{\mu} \approx \frac{\epsilon_0 L}{\mu},$$

où l'on a admis de plus que l'émissivité ( $\epsilon = \epsilon_0$ ) et le coefficient d'absorption ( $\kappa = \kappa_0$ ) sont eux mêmes uniformes<sup>11</sup>. Cette expression est valable pour  $\mu > 0$ . Pour  $\mu < 0$ , on suppose qu'il n'y a pas non plus de rayonnement incident sur la face supérieure, soit  $I(\tau_0, \mu < 0) = 0$ . Le flux correspondant au niveau de cette face vaut donc

$$F = 2\pi \int_{-1}^{+1} \mu I(\mu) d\mu \approx 2\pi \int_0^{+1} \mu \frac{\epsilon_0 L}{\mu} d\mu \approx 2\pi \epsilon_0 L.$$

Une portion de couche de surface  $\Sigma$  rayonne donc une puissance  $\mathcal{P}_r$ .

$$\mathcal{P}_r = 2 \times 2\pi \epsilon_0 L \Sigma = 4\pi \epsilon_0 V$$

où  $V = \Sigma L$  est le volume de la région considérée (le facteur 2 provient du fait que chacune des deux faces de la couche émet le flux  $F$ ). Par ailleurs, la puissance  $\mathcal{P}_e$  émise par ce même volume  $V$  vaut simplement  $\mathcal{P}_e = 4\pi \epsilon_0 V$ , par définition de l'émissivité  $\epsilon_0$ . À cet ordre d'approximation, la puissance rayonnée est donc égale à celle produite au sein du milieu. Toute l'énergie produite dans la couche est rayonnée vers l'extérieur, pour moitié vers le haut, pour moitié vers le bas.

On pourrait s'étonner du fait que  $I \rightarrow \infty$  lorsque  $\mu \rightarrow 0$  (cas rasant) dans l'expression approchée de  $I$ . Cette divergence "artificielle" est liée au fait qu'on a développé l'exponentielle au premier ordre, alors que dans cette limite  $\mu \rightarrow 0$  ce développement n'est pas valable. En effet, comme  $\tau_0 \neq 0$ ,  $I$  doit nécessairement rester finie. En revenant à l'expression exacte, on a en effet  $I(\tau_0, \mu \rightarrow 0) = S_0$ , comme on s'y attendait d'après la remarque qualitative faite plus haut.

### Exercice 18

Lorsque  $\tau_0 \gg 1$  (cas optiquement épais), l'intensité émergente devient  $I(\tau_0, \mu > 0) \approx S_0$  et le flux associé vaut<sup>12</sup>

$$F = 2\pi \int_{-1}^{+1} \mu I(\mu) d\mu \approx 2\pi S_0 \int_0^{+1} \mu d\mu \approx \pi S_0.$$

La luminosité correspondante pour une portion de couche de surface  $\Sigma$  vaut

$$\mathcal{P}_r = 2 \times \pi S_0 \times \Sigma = 2 \times \pi \frac{\epsilon_0}{\kappa_0} \Sigma$$

11. Étant donné que  $S$  est uniforme, il suffit de supposer que l'un des deux coefficients l'est aussi.

12. On a toujours l'hypothèse  $I(\tau_0, \mu < 0) = 0$ .

Cette fois, la puissance rayonnée ne représente qu'une faible partie de la puissance  $\mathcal{P}_e$  produite au sein du milieu :

$$\frac{\mathcal{P}_r}{\mathcal{P}_e} = \frac{2\pi \frac{\epsilon_0}{\kappa_0} \Sigma}{4\pi \epsilon_0 V} = \frac{1}{2\kappa_0 L} = \frac{1}{2\tau_0} \ll 1.$$

### **Exercice 19**

L'intégration formelle de l'équation du transfert, en convention observateur (3.22), entre deux profondeurs optiques quelconques  $\tau_1$  et  $\tau_2$  est

$$e^{-\tau_2} I(\tau_2) - e^{-\tau_1} I(\tau_1) = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} S(\tau') e^{-\tau'} d\tau'.$$

En symétrie axiale, il suffit de modifier légèrement cette expression en remplaçant judicieusement  $\tau$  par  $\tau/\mu$ , ce qui donne

$$I(\tau_2, \mu) e^{-\tau_2/\mu} - I(\tau_1, \mu) e^{-\tau_1/\mu} = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} S(\tau') e^{-\tau'/\mu} \frac{d\tau'}{\mu}.$$

Nous obtenons l'expression de l'intensité du rayonnement dirigé vers les couches profondes,  $I(\tau, \mu < 0)$ , en choisissant  $\tau_1 = 0$  et  $\tau_2 = \tau$  :

$$I(\tau, \mu < 0) = \int_0^{\tau} S(\tau') e^{-(\tau-\tau')/|\mu|} \frac{d\tau'}{|\mu|},$$

expression dans laquelle on a pris en compte la négativité de  $\mu$ , soit  $|\mu| = -\mu$ , ainsi que la condition aux limites  $I(\tau = 0, \mu < 0) = 0$ .

Pour  $\mu > 0$ ,  $I$  est obtenue en choisissant  $\tau_1 = \tau$  et  $\tau_2 \rightarrow \infty$ , ce qui, en tenant compte de la seconde condition aux limites, conduit à

$$I(\tau, \mu > 0) = \int_{\tau}^{\infty} S(\tau') e^{-(\tau'-\tau)/\mu} \frac{d\tau'}{\mu}.$$

À la surface ( $\tau = 0$ ), on obtient ainsi pour le rayonnement sortant,

$$I(\tau = 0, \mu > 0) = \int_0^{\infty} S(\tau') e^{-\tau'/\mu} \frac{d\tau'}{\mu}.$$

### **Exercice 20**

Le flux sortant correspondant,  $F^+$ , est donné par

$$F^+ = 2\pi \int_0^1 \mu I(\tau = 0, \mu > 0) d\mu.$$

En reportant l'expression obtenue précédemment pour  $I(\tau = 0, \mu > 0)$ , on aboutit après permutation des intégrales sur  $\mu$  et sur  $\tau'$  à

$$F^+ = 2\pi \int_0^{\infty} S(\tau') E_2(\tau') d\tau',$$

où  $E_2$  désigne la fonction intégrale exponentielle d'ordre 2, définie par

$$E_2(x) = \int_1^{\infty} e^{-ux} \frac{du}{u^2}.$$

Pour aboutir à ce résultat, on a posé  $u = 1/\mu$ .

### **Exercice 21**

On considère une atmosphère plan-parallèle sans radiation incidente à son sommet, et infiniment étendue vers le bas ( $\tau \rightarrow \infty$ ). On écrit l'intégration de l'équation du transfert en convention observateur entre  $\tau_1$  et  $\tau_2$  (3.67), qu'on rappelle ici :

$$I(\tau_2, \mu) e^{-\tau_2/\mu} - I(\tau_1, \mu) e^{-\tau_1/\mu} = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} S(\tau') e^{-\tau'/\mu} \frac{d\tau'}{\mu}.$$

et on en déduit l'intensité spécifique au sein de ce milieu pour  $\mu > 0$ , en posant  $\tau_1 = \tau$  et  $\tau_2 = +\infty$ ,

$$I(\tau, \mu \geq 0) = \int_{\tau}^{\infty} S(\tau') \exp\left(-\frac{\tau' - \tau}{\mu}\right) \frac{d\tau'}{\mu}$$

Pour  $\mu < 0$ , on pose  $\tau_1 = 0$  et  $\tau_2 = \tau$ , et on utilise l'hypothèse de nullité du rayonnement incident,  $I(\tau = 0, \mu < 0) = 0$ , pour écrire

$$I(\tau, \mu < 0) = - \int_0^{\tau} S(\tau') \exp\left(-\frac{\tau' - \tau}{\mu}\right) \frac{d\tau'}{\mu}$$

On calcule alors les moments de l'intensité spécifique. L'intensité moyenne est

$$J(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) d\mu$$

soit

$$J(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \int_{\tau}^{\infty} d\tau' S(\tau') \exp\left(-\frac{\tau' - \tau}{\mu}\right) - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \frac{d\mu}{\mu} \int_0^{\tau} d\tau' S(\tau') \exp\left(-\frac{\tau' - \tau}{\mu}\right)$$

on intervertit alors l'ordre des intégrations, ce qui donne

$$J(\tau) = \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty} d\tau' S(\tau') \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \exp\left(-\frac{\tau' - \tau}{\mu}\right) - \frac{1}{2} \int_0^{\tau} d\tau' S(\tau') \int_{-1}^0 \frac{d\mu}{\mu} \exp\left(-\frac{\tau' - \tau}{\mu}\right)$$

et on pose  $w = 1/\mu$  dans la première intégrale, et  $w = -1/\mu$  dans la seconde,

$$J(\tau) = -\frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty} d\tau' S(\tau') \int_{\infty}^1 \frac{dw}{w} \exp[-w(\tau' - \tau)] + \frac{1}{2} \int_0^{\tau} d\tau' S(\tau') \int_1^{\infty} \frac{dw}{w} \exp[w(\tau' - \tau)]$$

On introduit alors la famille d'intégrales exponentielles

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} y^{-n} e^{-xy} dy$$

qui permet d'écrire  $J$  sous la forme

$$J(\tau) = \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty} d\tau' S(\tau') E_1(\tau' - \tau) + \frac{1}{2} \int_0^{\tau} d\tau' S(\tau') E_1(\tau - \tau')$$

expression qu'on peut regrouper sous une forme plus compacte

$$J(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\tau' S(\tau') E_1(|\tau' - \tau|)$$

Pour la densité spectrale de flux et la densité spectrale de pression de radiation, on obtient, de la même manière

$$F = 2\pi \left[ \int_{\tau}^{\infty} S(\tau') E_2(\tau' - \tau) d\tau' - \int_0^{\tau} S(\tau') E_2(\tau - \tau') d\tau' \right]$$

et

$$p(\tau) = \frac{2\pi}{c} \int_0^\infty d\tau' S(\tau') E_3(|\tau' - \tau|)$$

### **Exercice 22**

Nous adoptons la convention observateur pour laquelle l'équation du transfert s'écrit

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - S.$$

Puisque nous renonçons à déterminer la dépendance du champ de rayonnement avec  $\mu$ , intégrons chaque membre de cette équation par rapport à  $\mu$  ou, plus précisément, appliquons l'opérateur

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} [\dots] d\mu.$$

Le calcul du terme de gauche conduit, après permutation de l'intégration sur  $\mu$  et de la dérivation par rapport à  $\tau$ , à

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mu \frac{dI}{d\tau} d\mu = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \int_{-1}^{+1} \mu I d\mu = \frac{1}{4\pi} \frac{dF}{d\tau}.$$

Quant au membre de droite, l'intégration fournit simplement  $J - S$  ( $S$  est invariant, puisque indépendant de  $\mu$ ). On aboutit finalement à l'équation

$$\frac{dF}{d\tau} = 4\pi(J - S).$$

Pour obtenir la seconde équation, on applique maintenant l'opérateur

$$\int_{-1}^{+1} [\dots] \mu d\mu.$$

On obtient alors, par une démarche analogue,

$$\frac{c}{2\pi} \frac{dp}{d\tau} = \frac{F}{2\pi} - 0, \text{ soit } c \frac{dp}{d\tau} = F.$$

### **Exercice 23**

Dérivons l'équation (3.38) et remplaçons  $p$  par son expression en fonction de  $J$ ; nous obtenons

$$c \frac{d^2 p}{d\tau^2} = c \frac{4\pi}{3c} \frac{d^2 J}{d\tau^2} = \frac{dF}{d\tau} = 4\pi(J - S),$$

ce qui donne l'équation d'Eddington annoncée,

$$\frac{1}{3} \frac{d^2 J}{d\tau^2} = J - S,$$

ainsi que la relation entre le flux et l'intensité moyenne,

$$F = c \frac{dp}{d\tau} = \frac{4\pi}{3} \frac{dJ}{d\tau}.$$

### **Exercice 24**

De manière générale, on a

$$\frac{dI_\nu}{dl} = \frac{\partial I_\nu}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial l} + \frac{\partial I_\nu}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial l} = \epsilon_\nu - \kappa_\nu I_\nu$$

où  $l$  est l'abscisse curviligne le long du rayon considéré. Pour écrire les dérivées partielles de  $r$  et  $\theta$  par rapport à  $l$ , on remarque que  $d\theta < 0$  se retrouve comme angle  $(\mathbf{OA}, \mathbf{OB})$  entre les normales aux surfaces  $r$  et  $r + dr$ . Par conséquent, dans le triangle  $(ABC)$ , on a  $OA \times (-d\theta) = AB$ , soit encore  $(r + dr) \times (-d\theta) \simeq -rd\theta \simeq (\sin \theta)dl$ . Dans ce même triangle, on a également  $AC = dr = (\cos \theta)dl$ . On a donc

$$\frac{\partial r}{\partial l} = \cos \theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta}{\partial l} = -\frac{\sin \theta}{r}$$

ce qui donne pour l'équation du transfert

$$(\cos \theta) \frac{\partial I_\nu}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial I_\nu}{\partial \theta} + \kappa_\nu I_\nu - \epsilon_\nu = 0$$

qu'on met souvent sous la forme suivante, avec  $\mu = \cos \theta$ ,

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial I_\nu}{\partial \mu} + \kappa_\nu I_\nu - \epsilon_\nu = 0$$

qu'on obtient en notant que  $d\mu = -\sin \theta d\theta$ .

### **Exercice 25**

En appliquant l'opérateur  $\int d\Omega$  à l'équation du transfert en symétrie sphérique, on a

$$\int d\Omega \left[ (\cos \theta) \frac{\partial I_\nu}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial I_\nu}{\partial \theta} + \kappa_\nu I_\nu - \epsilon_\nu \right] = 0$$

En faisant l'hypothèse d'isotropie pour  $\kappa_\nu$  et  $\epsilon_\nu$ , on a

$$\frac{d}{dr} \int I_\nu \cos \theta d\Omega - \frac{1}{r} \int d\Omega \sin \theta \frac{\partial I_\nu}{\partial \theta} + \kappa_\nu \int I_\nu d\Omega - 4\pi \epsilon_\nu = 0$$

On développe  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$  :

$$\frac{dF_\nu}{dr} - \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^2 \theta \frac{\partial I_\nu}{\partial \theta} d\theta + c\kappa_\nu u_\nu - 4\pi \epsilon_\nu = 0$$

Par une intégration par parties du deuxième terme :

$$\frac{dF_\nu}{dr} - \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} d\phi \left\{ [I_\nu \sin^2 \theta]_0^\pi - 2 \int_0^\pi I_\nu \sin \theta \cos \theta d\theta \right\} + c\kappa_\nu u_\nu - 4\pi \epsilon_\nu = 0$$

Le terme tout intégré est nul, et en réutilisant la notation  $d\Omega$  pour le terme non intégré :

$$\frac{dF_\nu}{dr} + \frac{2}{r} \int d\Omega \cos \theta I_\nu + c\kappa_\nu u_\nu - 4\pi \epsilon_\nu = 0$$

ce qui fait apparaître la densité spectrale de flux  $F_\nu$ , comme annoncé,

$$\frac{dF_\nu}{dr} + \frac{2F_\nu}{r} + c\kappa_\nu u_\nu - 4\pi \epsilon_\nu = 0$$

Pour obtenir l'équation portant sur  $p_\nu$ , on fait la même chose avec l'opérateur  $\frac{1}{c} \int d\Omega \cos \theta$  :

$$\frac{1}{c} \int d\Omega \cos \theta \left[ (\cos \theta) \frac{\partial I_\nu}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial I_\nu}{\partial \theta} + \kappa_\nu I_\nu - \epsilon_\nu \right] = 0$$

En développant, on fait apparaître des termes connus ce qui donne

$$\frac{1}{c} \int d\Omega \cos^2 \theta \frac{\partial I_\nu}{\partial r} - \frac{1}{rc} \int d\Omega \cos \theta \sin \theta \frac{\partial I_\nu}{\partial \theta} + \frac{\kappa_\nu}{c} \int d\Omega \cos \theta I_\nu - \frac{\epsilon_\nu}{c} \int d\Omega \cos \theta = 0$$

Puisque

$$\frac{1}{c} \int d\Omega \cos^2 \theta \frac{\partial I_\nu}{\partial r} = \frac{dp_\nu}{dr} \quad \frac{\kappa_\nu}{c} \int d\Omega \cos \theta I_\nu = \frac{\kappa_\nu F_\nu}{c} \quad \frac{\epsilon_\nu}{c} \int d\Omega \cos \theta = 0$$

on a donc

$$\frac{dp_\nu}{dr} - \frac{1}{rc} \int d\Omega \cos \theta \sin \theta \frac{\partial I_\nu}{\partial \theta} + \frac{\kappa_\nu F_\nu}{c} = 0$$

On redéveloppe  $d\Omega$  dans le terme restant

$$\frac{dp_\nu}{dr} - \frac{1}{rc} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \theta \frac{\partial I_\nu}{\partial \theta} d\theta + \frac{\kappa_\nu F_\nu}{c} = 0$$

et on fait une intégration par parties

$$\frac{dp_\nu}{dr} - \frac{1}{rc} \int_0^{2\pi} d\phi \left\{ [(\cos \theta - \cos^3 \theta) I_\nu]_0^\pi - \int_0^\pi (-\sin \theta + 3 \sin \theta \cos^2 \theta) I_\nu \right\} + \frac{\kappa_\nu F_\nu}{c} = 0$$

Le terme tout intégré est nul, et dans le terme non intégré, on fait réapparaître  $d\Omega$

$$\frac{dp_\nu}{dr} + \frac{1}{rc} \int d\Omega (3 \cos^2 \theta - 1) I_\nu + \frac{\kappa_\nu F_\nu}{c} = 0$$

ce qui fait apparaître  $u_\nu$  et  $p_\nu$  et donne l'équation cherchée portant sur la densité spectrale de pression de radiation  $p_\nu$

$$\frac{dp_\nu}{dr} + \frac{3p_\nu - u_\nu}{r} + \frac{\kappa_\nu F_\nu}{c} = 0$$

### Exercice 26

Dans l'hypothèse où tous les éléments diffusants sont identiques et au nombre de  $n$  par unité de volume, l'aire occultée<sup>13</sup> par les éléments contenus dans le volume  $d\Sigma dl$  vaut simplement  $ns_{\nu,d} d\Sigma dl$ . La fraction de l'aire occultée est donc égale à  $ns_{\nu,d} dl$ , d'où l'expression de  $d^2 E_{\nu,d}^-$ ,

$$d^2 E_{\nu,d}^- = -ns_{\nu,d} dl dE_\nu = -\sigma_\nu dl dE_\nu = -\sigma_\nu I_\nu dV d\Omega dt d\nu.$$

À nouveau, la valeur de  $d^2 E_{\nu,d}^-$  est indépendante de la forme de l'élément  $dV$ .

### Exercice 27

Par analogie avec la relation (3.50), les photons issus des directions  $\mathbf{k}'$  (à  $d\Omega'$  près) redirigés vers  $\mathbf{k}$  (à  $d\Omega$  près) apportent une contribution

$$d^3 E_{\nu,d}^+(\mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{k}) = + \frac{\tilde{\sigma}_\nu(\mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{k})}{4\pi} d\Omega' I_\nu(\mathbf{k}') dV d\Omega dt d\nu.$$

En intégrant sur toutes les directions  $\mathbf{k}'$ , il vient

$$d^2 E_{\nu,d}^+(\mathbf{k}) = \int_{\Omega'} d^3 E_{\nu,d}^+(\mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{k}) = + \left[ \int \frac{\tilde{\sigma}_\nu(\mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{k})}{4\pi} I_\nu(\mathbf{k}') d\Omega' \right] dV d\Omega dt d\nu.$$

13. La même condition de validité  $\sqrt{s_{\nu,d}} \ll n^{-1/3}$  doit être assurée.

Avec  $d^2E_{\nu,d}^+(\mathbf{k}) = dI_{\nu,d}^+(\mathbf{k})d\Omega d\Omega' dt d\nu$ , cela conduit à l'expression de la variation  $dI_{\nu,d}^+$  de  $I_\nu$  :

$$dI_{\nu,d}^+(\mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'} \tilde{\sigma}_\nu(\mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{k}) I_\nu(\mathbf{k}') d\Omega' dl.$$

### Exercice 28

Appliquons l'opérateur

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} [\dots] d\mu$$

et permutons l'intégration sur  $\mu$  et la dérivation par rapport à  $z$ . Nous obtenons alors

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mu \frac{dI_\nu}{dz} d\mu = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \int_{-1}^{+1} \mu I_\nu d\mu = \frac{1}{4\pi} \frac{dF_\nu}{dz} = (\kappa_\nu + \sigma_\nu) J_\nu - (\epsilon_\nu + \sigma_\nu J_\nu) = \kappa_\nu J_\nu - \epsilon_\nu.$$

En effet, le terme  $(\epsilon_\nu + \sigma_\nu J_\nu)$  étant isotrope, il est invariant lors de la moyenne sur  $\mu$ . On constate que l'équation ci-dessus ne fait pas apparaître  $\sigma_\nu$  ; cela signifie que la valeur du gradient de flux,  $dF_\nu/dz$ , est indépendante de la présence ou non de diffusion lorsque celle-ci est isotrope.

Appliquons ensuite l'opérateur

$$\int_{-1}^{+1} [\dots] \mu d\mu$$

et nous obtenons une équation liant  $p_\nu$  à  $F_\nu$ ,

$$\frac{c}{2\pi} \frac{dp_\nu}{dz} = (\kappa_\nu + \sigma_\nu) \frac{F_\nu}{2\pi} - 0 \text{ soit } c \frac{dp_\nu}{dz} = (\kappa_\nu + \sigma_\nu) F_\nu.$$

### Exercice 29

Dérivons les deux membres de l'équation précédente par rapport à  $z$  et effectuons l'approximation d'Eddington,  $p_\nu = (4\pi/3c)J_\nu$  ; cela nous conduit à

$$\frac{1}{3} \frac{d^2 J_\nu}{dz^2} = (\kappa_\nu + \sigma_\nu)(\kappa_\nu J_\nu - \epsilon_\nu) = (\kappa_\nu + \sigma_\nu)\kappa_\nu(J_\nu - S_\nu),$$

où  $S_\nu$  désigne la fonction source définie comme en l'absence de diffusion ( $S_\nu = \epsilon_\nu/\kappa_\nu$ ). On constate finalement que l'équation d'Eddington prend exactement la même forme que précédemment,

$$\frac{1}{3} \frac{d^2 J_\nu}{d\tau_{\text{eff},\nu}^2} = J_\nu - S_\nu \text{ avec } d\tau_{\text{eff},\nu} = \sqrt{\kappa_\nu(\kappa_\nu + \sigma_\nu)} dz = \kappa_{\text{eff},\nu} dz$$

où  $\tau_{\text{eff},\nu}$  est la profondeur optique effective.

### Exercice 30

Imaginons qu'on lance dans une direction bien déterminée (faisceau laser par exemple) un nombre  $N_0 \gg 1$  de photons de fréquence  $\nu$  à  $d\nu$  près dans un milieu uniforme, caractérisé par un coefficient d'absorption  $\kappa_\nu$  et un coefficient de diffusion  $\sigma_\nu$ . Après avoir parcouru un trajet  $l$  dans ce milieu, le nombre de photons restant dans le faisceau est déterminé par la loi d'atténuation exponentielle de Beer-Lambert et vaut simplement  $N(l) = N(\tau_\nu) = N_0 e^{-\tau_\nu}$  où  $\tau_\nu = (\kappa_\nu + \sigma_\nu)l$ . Cette équation traduit le fait que la probabilité de non-interaction d'un photon après un trajet de "longueur"  $\tau_\nu$  dans le milieu, notée  $P_s(\tau_\nu)$  vaut

$$P_s(\tau_\nu) = e^{-\tau_\nu} = e^{-\kappa_\nu l} \times e^{-\sigma_\nu l}$$

et, par conséquent, la probabilité pour un photon de subir une interaction sur ce même trajet est

$$P_i(\tau_\nu) = 1 - e^{-\tau_\nu}$$

Ainsi, la probabilité pour qu'une interaction intervienne précisément entre  $\tau_\nu$  et  $\tau_\nu + d\tau_\nu$  - qui est par définition la différentielle de  $P_i$  - s'écrit, en prenant la limite  $d\tau_\nu \ll 1$ ,

$$dP_i = P_s(\tau_\nu)P_i(d\tau_\nu) = e^{-\tau_\nu} (1 - e^{-d\tau_\nu}) \simeq e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu.$$

On vérifie aisément que  $\int_0^\infty dP_i = 1$ , c'est-à-dire que le photon subit à coup sûr une interaction *in fine*. Le libre parcours moyen a alors pour expression, comme annoncé,

$$\langle l \rangle = \int_0^\infty l dP_i = \int_0^\infty \frac{\tau_\nu}{\kappa_\nu + \sigma_\nu} e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu = \frac{1}{\kappa_\nu + \sigma_\nu}.$$

### **Exercice 31**

Pour calculer  $\bar{N}$ , exprimons la probabilité  $p(N)$  d'observer exactement  $N$  diffusions avant une absorption. Les interactions successives étant des événements indépendants, on a simplement

$$p(N) = \omega_\nu^N (1 - \omega_\nu),$$

expression qui satisfait bien

$$\sum_{N=0}^{\infty} p(N) = 1$$

puisque, comme  $\omega_\nu < 1$ ,

$$f(\omega_\nu) = \sum_{N=0}^{\infty} \omega_\nu^N = \frac{1}{1 - \omega_\nu}$$

Le nombre moyen cherché,  $\bar{N}(\omega_\nu)$ , s'exprime directement à partir de  $p(N)$  par

$$\bar{N}(\omega_\nu) = \sum_{N=0}^{\infty} N p(N) = (1 - \omega_\nu) \sum_{N=0}^{\infty} N \omega_\nu^N = (1 - \omega_\nu) \omega_\nu f'(\omega_\nu)$$

On obtient alors sans difficulté, et comme annoncé,

$$\bar{N}(\omega_\nu) = \frac{\omega_\nu}{1 - \omega_\nu}$$

## L'équilibre thermodynamique

Dans des milieux assez denses et opaques ( $\tau \gg 1$ ) s'établit un **équilibre thermodynamique** (ET - **thermodynamic equilibrium**, soit TE, en anglais) au sein de la matière et entre la matière et le rayonnement. Des lois simples permettent alors de décrire les caractéristiques du rayonnement (distribution spectrale de  $I_\nu$ ) et de la matière (population des niveaux fondamental et excités, distribution des vitesses, états d'ionisation, ...). Cette description peut être étendue à des systèmes où l'équilibre thermodynamique varie de point en point, ce qu'on nomme ETL pour **équilibre thermodynamique local** (**local thermodynamic equilibrium** ou LTE en anglais). Cette situation idéale est généralement prise pour référence, même si, fréquemment, les milieux astrophysiques ne sont pas à l'ETL.

### 4.1 Rayonnement de corps noir

Considérons une enceinte, maintenue à la température  $T$  par un thermostat, contenant un champ de rayonnement, et supposons que cette enceinte soit entièrement opaque à toutes les fréquences, ce qui revient à supposer que l'épaisseur optique  $\tau_\nu \rightarrow \infty$  quelle que soit la fréquence  $\nu$ . Du fait des collisions entre les photons enfermés dans l'enceinte avec les parois, qui amènent un échange d'énergie entre photons et matière, un équilibre va s'établir entre la matière constituant ces parois et le rayonnement, et donc entre les photons eux-mêmes. Le système ainsi constitué est appelé **corps noir**, appellation qui fait référence à son épaisseur optique infinie à toutes les fréquences. Nous allons établir les propriétés du rayonnement du corps noir, qu'on peut mesurer en perçant un trou suffisamment petit dans la paroi de l'enceinte pour que l'équilibre ne soit pas fondamentalement perturbé. Il faut noter que la notion de corps noir est un concept idéalisé, même si certains systèmes physiques s'en approchent.

#### 4.1.1 Loi de Kirchhoff

Une propriété importante du rayonnement du corps noir est que son intensité spécifique  $I_\nu$  ne dépend que de la température<sup>1</sup>, ce qui constitue la **loi de Kirchhoff**, qu'on écrit sous la forme

$$I_\nu = B_\nu(T) \quad (4.1)$$

Une démonstration élégante de cette propriété, fondée sur la considération de deux enceintes à la même température  $T$  percées chacune d'un petit trou en regard (Fig. 4.1), est laissée en exercice.

1. et de la fréquence, bien entendu...

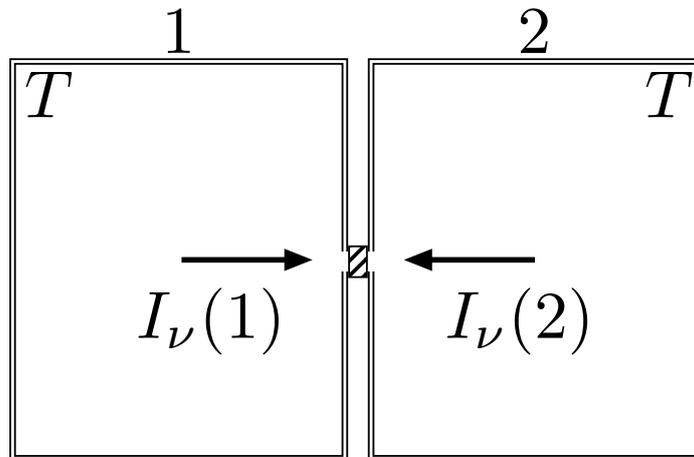


FIGURE 4.1 – Schéma d'une expérience de pensée permettant de démontrer la loi de Kirchhoff. Deux enceintes à la température  $T$ , séparées par un filtre de largeur spectrale  $\delta\nu$  autour de  $\nu$ .

**Exercice 32 :** En considérant l'expérience de pensée décrite sur la Fig. 4.1, et en partant de l'hypothèse qu'à une fréquence  $\nu$  donnée l'intensité du rayonnement dans l'enceinte (1) est supérieure à celle du rayonnement dans l'enceinte (2), montrer qu'on aboutit à une contradiction avec un principe fondamental de la physique. Conclure.

Ce rayonnement est nécessairement **isotrope** et **non polarisé**, du fait des interactions multiples (en nombre infini, en toute rigueur) que subissent les photons avec les parois de l'enceinte.

### Émission thermique et émission de corps noir

Revenons à notre enceinte unique à la température  $T$ , et plaçons maintenant, à l'intérieur de l'enceinte et juste devant le trou, un corps matériel, lui aussi à la température  $T$  (Fig. 4.2). On cherche à savoir quelles sont les propriétés de l'émission de ce corps du fait qu'il est porté à cette température. On montre que la fonction source  $S_\nu$  associée à cette **émission thermique** est donnée par

$$S_\nu = B_\nu(T) \quad (4.2)$$

**Exercice 33 :** Démontrer cette relation, en considérant l'équation du transfert appliquée à un rayon traversant le corps matériel et sortant par le trou percé dans l'enceinte. On pourra raisonner par l'absurde en supposant par exemple que  $S_\nu > B_\nu(T)$ .

Sous cette forme, la loi de Kirchhoff relie donc de manière fondamentale les propriétés d'absorption et d'émission des corps matériels en équilibre thermique, puisqu'elle indique que le rapport de l'émissivité au coefficient d'absorption est une fonction - qu'on déterminera plus loin - de la seule température<sup>2</sup>.

$$\frac{\epsilon_\nu}{\kappa_\nu} = B_\nu(T) \quad (4.3)$$

2. Il s'agit bien entendu de la température cinétique, caractérisant l'agitation thermique des constituants du corps (degrés de liberté translationnels).

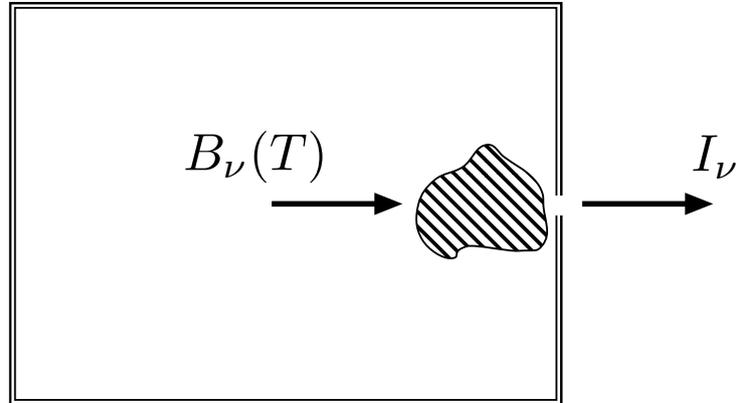


FIGURE 4.2 – **Emission thermique.** Source thermique placée en sortie de l'enceinte corps noir.

On a ainsi l'expression de la fonction source pour un milieu à l'équilibre thermique, l'intensité émise étant ensuite obtenue par intégration de l'équation du transfert le long de la ligne de visée, suivant

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = B_\nu(T) - I_\nu. \quad (4.4)$$

Il convient donc de bien distinguer **l'émission thermique, pour laquelle  $S_\nu = B_\nu(T)$ , de l'émission de corps noir, pour laquelle  $I_\nu = B_\nu(T)$** . La seconde est la limite de la première lorsque l'épaisseur optique tend vers l'infini.

#### 4.1.2 Loi de Planck

La forme de  $B_\nu(T)$  a été obtenue par Planck en supposant que le rayonnement est constitué de quanta d'énergie, les photons. Cette hypothèse était à l'époque (1900) plutôt iconoclaste, étant donné les succès de la théorie électromagnétique de Maxwell, pour laquelle la nature ondulatoire de la lumière ne fait aucun doute. Pour faire ce calcul en s'appuyant sur des méthodes de physique statistique, il faut obtenir d'une part la **densité d'états des photons** dans une enceinte de type corps noir<sup>3</sup>, et d'autre part trouver le **nombre moyen de photons** dans chacun de ces états. Le produit de ces deux quantités donnera ainsi accès à la quantité  $\mathcal{N}_\nu$ , reliée à l'intensité spécifique par  $I_\nu = h\nu c \mathcal{N}_\nu$ .

##### Densité d'états des photons du corps noir

Le calcul de la densité d'états implique de considérer les états quantiques possibles pour un photon enfermé dans une enceinte de volume  $V$  opaque à tout rayonnement. On montre que ces états sont caractérisés par des valeurs discrètes du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , qui est relié à l'impulsion du photon par  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ . On montre alors, en dénombrant les états possibles correspondant à un intervalle  $[\nu, \nu + d\nu]$ , par unité de volume et d'angle solide, que cette densité d'état s'écrit

$$\rho(\nu) = \frac{2\nu^2}{c^3} \quad (4.5)$$

3. C'est-à-dire le nombre d'états quantiques par intervalle d'énergie, ou ce qui revient au même par intervalle de fréquence, par unité de volume, et par unité d'angle solide.

**Exercice 34 : Démontrer la relation 4.5. On pourra considérer l'enceinte comme parallépipédique, et on n'omettra pas de compter les deux états de spin possibles.**

### Nombre moyen d'occupation d'un état

Les photons sont des bosons, ils obéissent donc à la **statistique quantique de Bose-Einstein**, selon laquelle le nombre moyen  $\langle N(E) \rangle$  de particules dans un état d'énergie  $E$  est donné par

$$\langle N(E) \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu}{kT}\right) - 1} \quad (4.6)$$

où  $\mu$  est le potentiel chimique. Comme les photons sont des particules de masse nulle, dont le nombre n'est pas nécessairement conservé lors des interactions avec les parois de l'enceinte, ce potentiel chimique est nul. Avec  $E = h\nu$ , on en déduit que les photons suivent la **statistique de Bose**, avec un nombre d'occupation moyen par état

$$\langle N_\nu \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \quad (4.7)$$

**Exercice 35 : Démontrer la relation (4.7). On partira d'une approche microcanonique et de la fonction de partition  $Z$  correspondante, pour calculer l'énergie moyenne d'un état contenant un nombre variable  $n$  de photons de même énergie  $h\nu$ .**

### Loi de Planck

Il est alors simple d'écrire l'intensité spécifique du rayonnement de corps noir en passant par la grandeur  $\mathcal{N}_\nu(\mathbf{n})$  introduite au chapitre 2, telle que  $\mathcal{N}_\nu(\mathbf{n})d\nu d\Omega$  est le nombre de photons par unité de volume dont la direction de propagation<sup>4</sup> est  $\mathbf{n}$  à  $d\Omega$  près et la fréquence  $\nu$  à  $d\nu$  près, car on a manifestement  $\mathcal{N}_\nu = \rho(\nu) \langle N_\nu \rangle$  et donc  $B_\nu(T) = I_\nu = h\nu c \mathcal{N}_\nu = h\nu c \rho(\nu) \langle N_\nu \rangle$ .

On en déduit la **loi de Planck**, donnant l'intensité spécifique du rayonnement de corps noir

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \quad (4.8)$$

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1} \quad (4.9)$$

La seconde expression est obtenue via la relation  $\nu I_\nu = \lambda I_\lambda$  vue au chapitre 2.

### Courbes représentatives

À une fréquence  $\nu$  donnée, si  $T_2 > T_1$ , on a immédiatement  $B_\nu(T_2) > B_\nu(T_1)$  et  $B_\lambda(T_2) > B_\lambda(T_1)$ , ce qui montre que les courbes représentatives de l'émission du corps noir sont "emboîtées", c'est-à-dire

4. Noter qu'on a modifié la notation du vecteur unitaire de propagation pour éviter une confusion possible avec le vecteur d'onde.

qu'à toute fréquence, elles se placent les unes par rapport aux autres de façon monotone croissante avec la température, comme indiqué sur les Figs. 4.3, 4.4 et 4.5.

### 4.1.3 Loi de déplacement de Wien

#### Cas de $B_\nu(T)$

À chaque température, la courbe  $B_\nu(T)$  présente un maximum en fonction de la fréquence dont la position  $\nu_{\max}$  est donnée par la **loi de déplacement de Wien**, qui s'écrit

$$\frac{\nu_{\max}}{T} \approx 2.82 \frac{k}{h} = 5.88 \cdot 10^{10} \text{ Hz.K}^{-1} \quad (4.10)$$

**Exercice 36 :** Démontrer la loi de déplacement de Wien pour  $B_\nu(T)$  (4.10). On pourra montrer analytiquement que cette démonstration implique de résoudre l'équation implicite  $(3 - x)e^x = 3$  et résoudre celle-ci numériquement.

#### Cas de $B_\lambda(T)$

Pour obtenir la longueur d'onde  $\lambda_{\max}$  maximisant  $B_\lambda(T)$ , on procède de la même manière, et on obtient dans ce cas une forme alternative de la loi de déplacement de Wien :

$$\lambda_{\max} T = 2.89 \cdot 10^{-3} \text{ K.m} \quad (4.11)$$

**Exercice 37 :** Démontrer la loi de déplacement de Wien pour  $B_\lambda(T)$  (4.11).

Note : On n'a pas  $\lambda_{\max} \nu_{\max} = c$  parce qu'on ne maximise pas la même fonction. On a en fait

$$\lambda_{\max} \nu_{\max} = c \frac{x_{\max}}{y_{\max}} \approx 0.57c. \quad (4.12)$$

#### Cas de $\nu B_\nu = \lambda B_\lambda$

Dans ce cas, on doit maximiser la même fonction, et on obtient donc une fréquence  $\nu'_{\max}$  et une longueur d'onde  $\lambda'_{\max}$  du maximum d'intensité qui sont bien liées par  $\lambda'_{\max} \nu'_{\max} = c$ . On a, numériquement,

$$\frac{\nu'_{\max}}{T} \approx 3.92 \frac{k}{h} = 8.17 \cdot 10^{10} \text{ Hz.K}^{-1} \quad \text{et} \quad \lambda'_{\max} T = 3.67 \cdot 10^{-3} \text{ K.m} \quad (4.13)$$

**Exercice 38 :** Démontrer la loi de déplacement de Wien pour  $\nu B_\nu(T) = \lambda B_\lambda(T)$  (4.13).

Exemple : À titre d'exemple, pour des étoiles de divers types spectraux, dont le Soleil (G2), on a les valeurs suivantes des maxima d'intensité, en fréquence et en longueur d'onde :

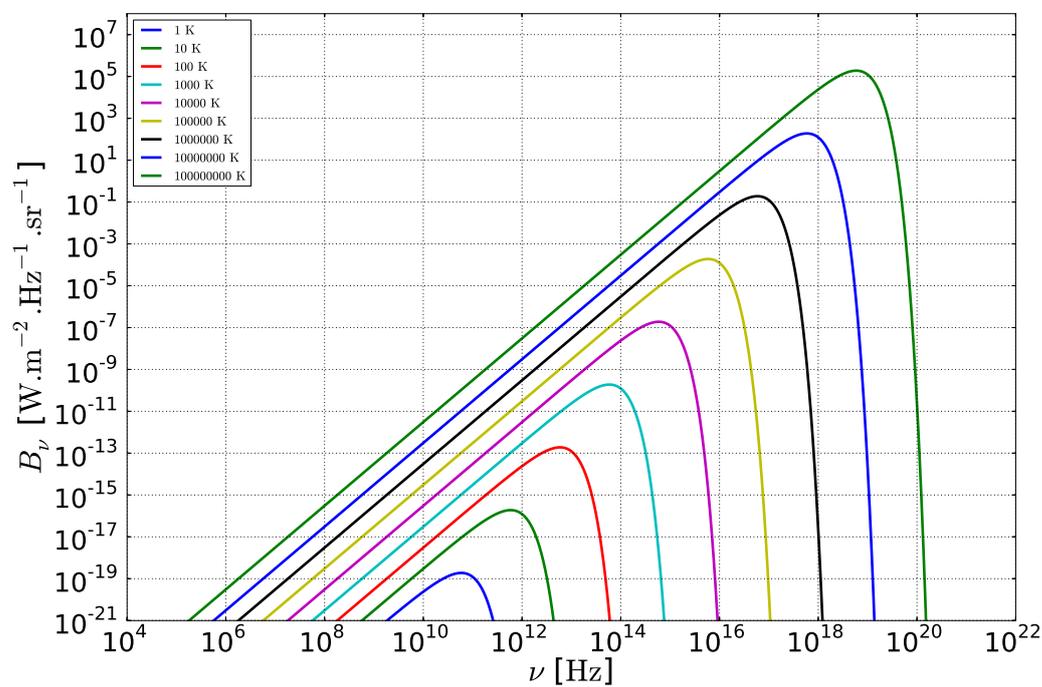
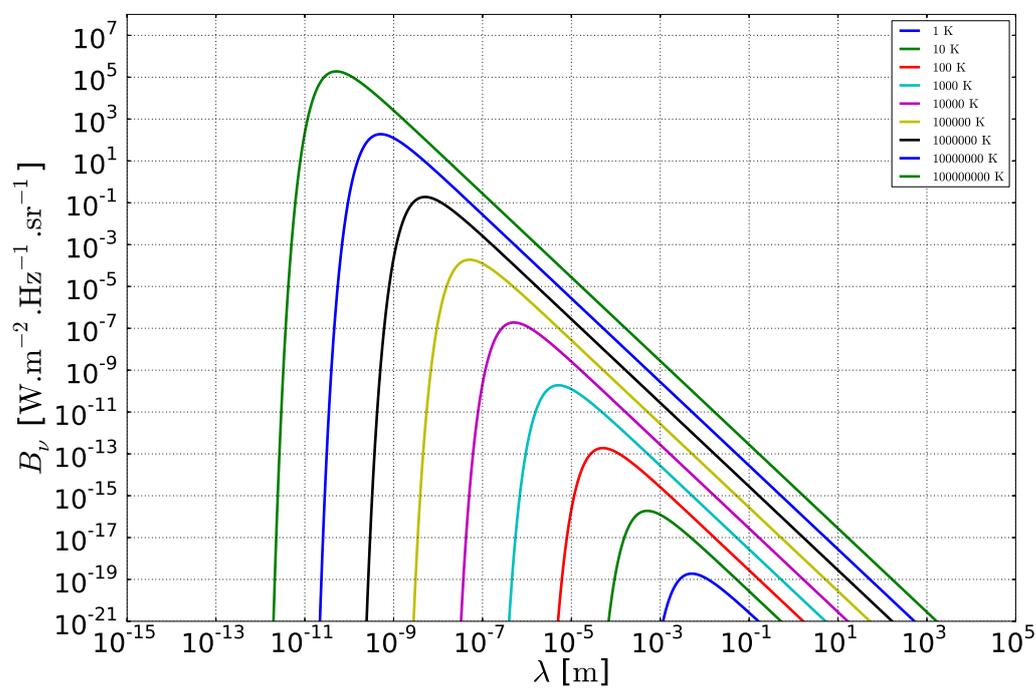


FIGURE 4.3 – **Courbes de l'émission du corps noir  $B_\nu$ .** Ces courbes sont représentées pour  $T = 1 \text{ K}$ ,  $10 \text{ K}$ ,  $10^2 \text{ K}$ ,  $10^3 \text{ K}$ ,  $10^4 \text{ K}$ ,  $10^5 \text{ K}$ ,  $10^6 \text{ K}$ ,  $10^7 \text{ K}$  et  $10^8 \text{ K}$  (de bas en haut sur chaque sous-figure), en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$  (en haut), et de la fréquence  $\nu$  (en bas).

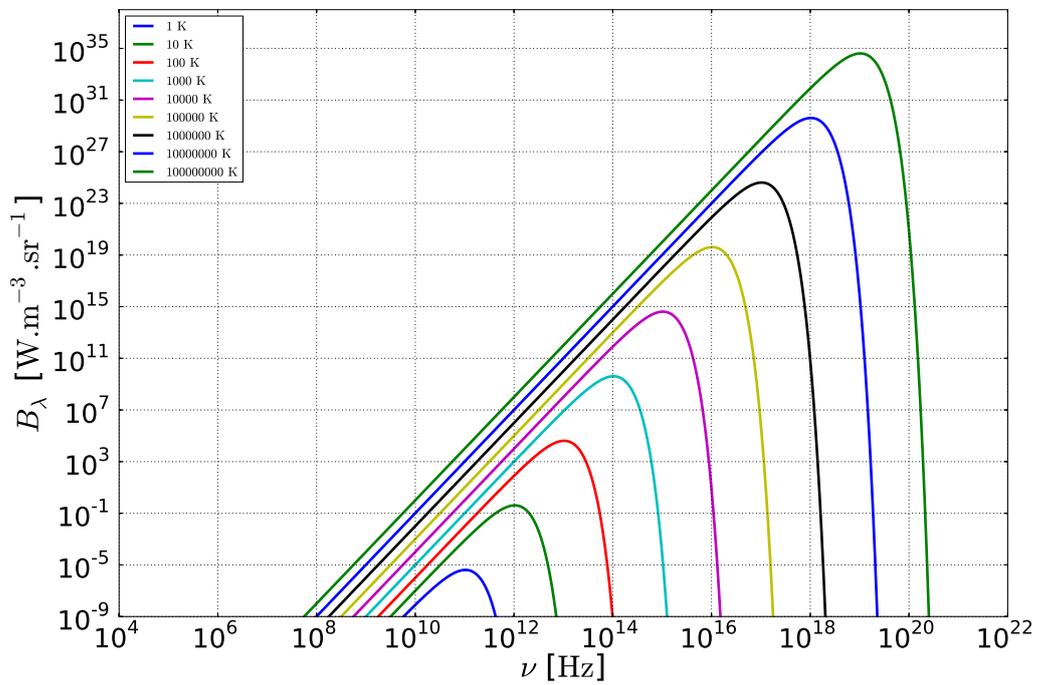
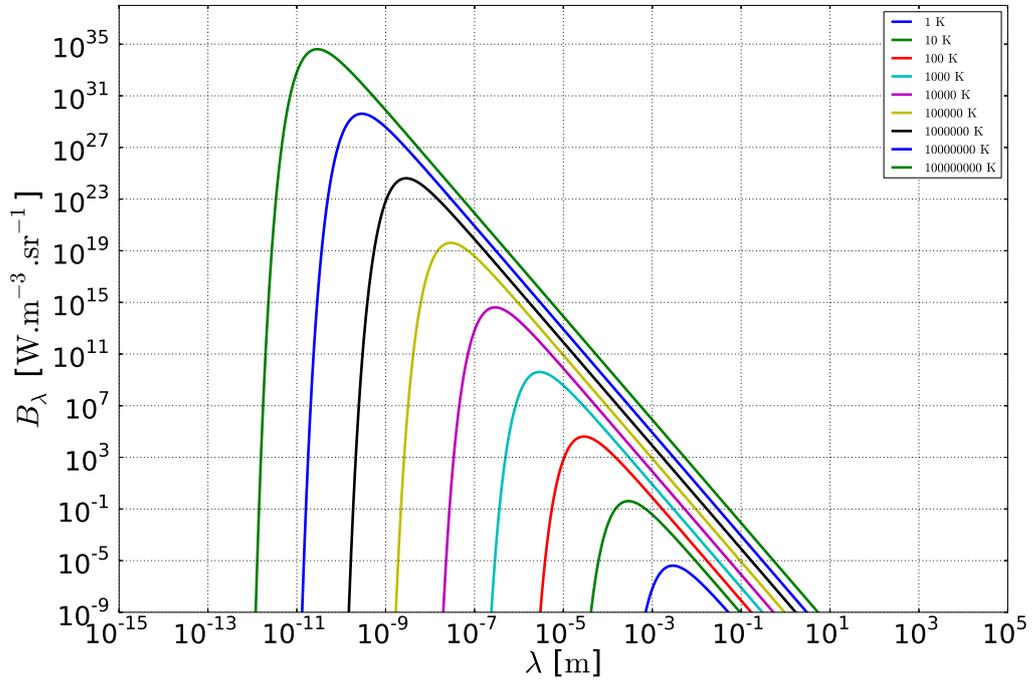


FIGURE 4.4 – **Courbes de l'émission du corps noir  $B_\lambda$ .** Ces courbes sont représentées pour  $T = 1 \text{ K}$ ,  $10 \text{ K}$ ,  $10^2 \text{ K}$ ,  $10^3 \text{ K}$ ,  $10^4 \text{ K}$ ,  $10^5 \text{ K}$ ,  $10^6 \text{ K}$ ,  $10^7 \text{ K}$  et  $10^8 \text{ K}$  (de bas en haut sur chaque sous-figure), en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$  (en haut), et de la fréquence  $\nu$  (en bas).

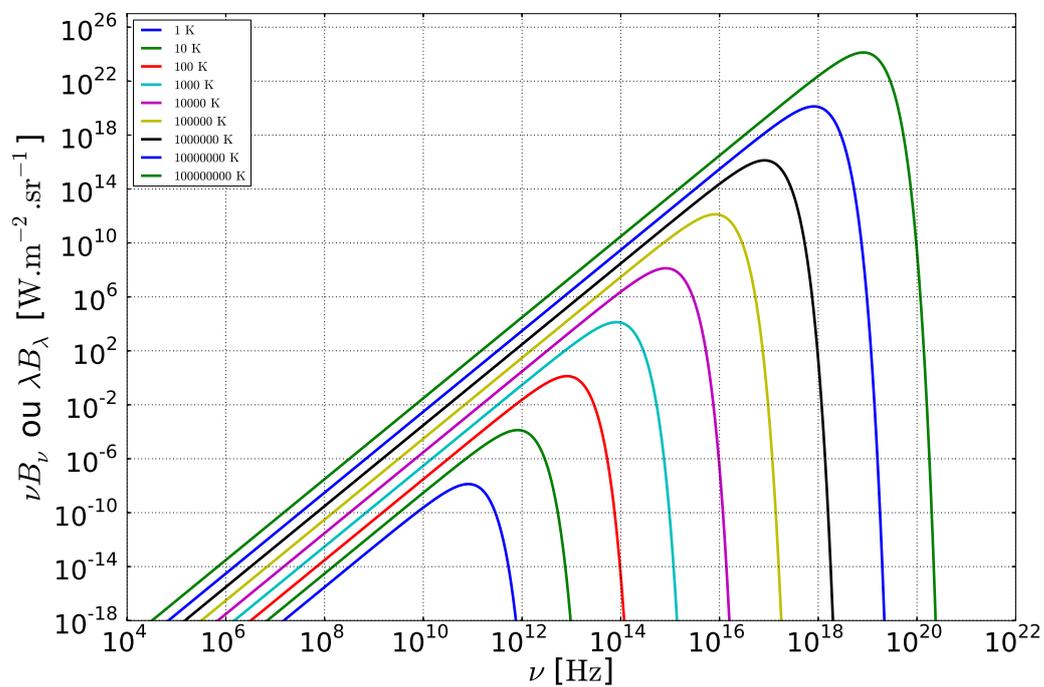
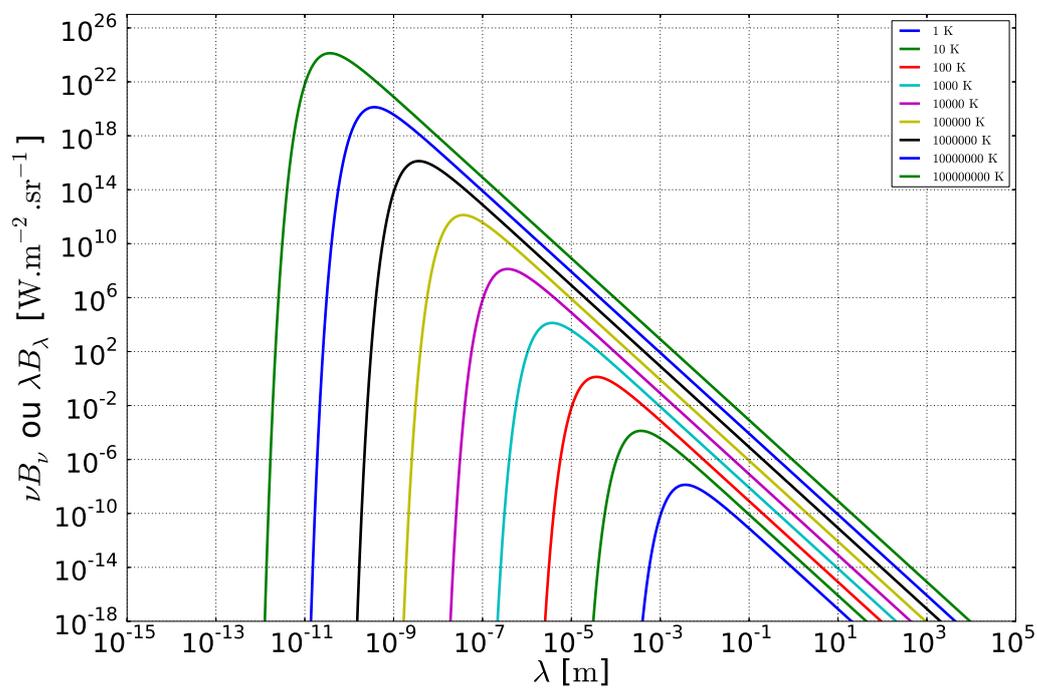


FIGURE 4.5 – **Courbes de l'émission du corps noir**  $\nu B_\nu = \lambda B_\lambda$ . Ces courbes sont représentées pour  $T = 1 \text{ K}, 10 \text{ K}, 10^2 \text{ K}, 10^3 \text{ K}, 10^4 \text{ K}, 10^5 \text{ K}, 10^6 \text{ K}, 10^7 \text{ K}$  et  $10^8 \text{ K}$  (de bas en haut sur chaque sous-figure), en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$  (en haut), et de la fréquence  $\nu$  (en bas).

Type spectral	O5	B5	A5	F5	G2	G5	K5	M5
$T$ [K]	54000	15200	8310	6700	5778	5660	4400	3200
$\nu_{\max}$ [ $10^{15}$ Hz]	3.17	0.89	0.49	0.39	0.34	0.33	0.26	0.19
$\lambda_{\max}$ [ $\mu\text{m}$ ]	0.05	0.19	0.35	0.43	0.50	0.51	0.66	0.91
$\nu'_{\max}$ [ $10^{15}$ Hz]	4.41	1.24	0.68	0.55	0.47	0.46	0.36	0.26
$\lambda'_{\max}$ [ $\mu\text{m}$ ]	0.07	0.24	0.44	0.55	0.64	0.65	0.83	1.15
Domaine	UV extrême	UV lointain	proche UV	bleu	jaune	jaune	rouge	proche IR

#### 4.1.4 Loi de Stefan

La **loi de Stefan** exprime que la puissance rayonnée par élément de surface d'un corps noir à la température  $T$  est proportionnelle à  $T^4$ , ce qu'on écrit

$$F = \int_0^{\infty} F_{\nu}^+ d\nu = \sigma_S T^4 \quad (4.14)$$

La constante de proportionnalité est appelée **constante de Stefan**, et elle vaut

$$\sigma_S = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4} \quad (4.15)$$

**Exercice 39 : Démontrer la loi de Stefan (4.14) directement à partir de l'expression de l'intensité spécifique du corps noir  $B_{\nu}(T)$ .**

La densité volumique d'énergie et la pression de radiation correspondantes sont alors toutes les deux également proportionnelles à  $T^4$ , ce qu'on démontre en utilisant le caractère isotrope du rayonnement du corps noir (voir la section 2.6.1) :

$$u = \int_0^{\infty} u_{\nu} d\nu = \frac{4\pi}{c} \int_0^{\infty} I_{\nu} d\nu = \frac{4F}{c} = \frac{4\sigma_S}{c} T^4 \quad (4.16)$$

$$p = \int_0^{\infty} p_{\nu} d\nu = \int_0^{\infty} \frac{u_{\nu}}{3} d\nu = \frac{u}{3} = \frac{4\sigma_S}{3c} T^4 \quad (4.17)$$

#### Dérivation thermodynamique

On peut également aboutir à la loi de Stefan par des raisonnements de thermodynamique classique. Pour cela, on considère une enceinte de température  $T$ , dans laquelle le rayonnement est à l'équilibre thermodynamique avec l'enceinte. Celle-ci ne contient pas de gaz matériel mais uniquement des photons, et est reliée à un piston, de sorte que  $V$  puisse varier sous l'effet de la pression de radiation. L'énergie interne du gaz de photons s'écrit  $U(T, V) = u(T)V$ , expression dans laquelle la densité d'énergie  $u$  est une grandeur intensive, uniforme, indépendante du volume, et ne dépendant donc que de la température, conformément à la loi de Kirchhoff. On montre alors que  $u \propto T^4$ .

**Exercice 40 : Procéder à cette dérivation. On pourra commencer par écrire la variation  $dU$  de l'énergie interne en variables  $(T, V)$ , et en déduire l'expression du coefficient de variation de  $U$  par rapport à  $V$ , en fonction de  $u$ . On écrira ensuite le second principe et on utilisera le**

### caractère de fonction d'état de l'entropie $S$ .

Cette dérivation thermodynamique permet également d'obtenir l'entropie du rayonnement de corps noir, en posant comme troisième principe de la thermodynamique que  $S = 0$  à température nulle,

$$S = \frac{16\sigma_S}{3c} VT^3 \quad (4.18)$$

#### **Exercice 41 : Établir l'expression (4.18).**

Cette expression montre que pour un champ de rayonnement de corps noir en évolution adiabatique réversible ( $dS = 0$ ), le produit  $T^3V$  est une constante. Par exemple, la température du fond diffus cosmologique (CMB) varie avec le facteur d'échelle  $R$  de l'Univers et avec le redshift  $z$  comme<sup>5</sup>

$$T_{\text{CMB}} \propto \frac{1}{R} \propto 1 + z \quad (4.19)$$

### 4.1.5 Loi de Rayleigh-Jeans et loi de Wien

Aux basses fréquences, c'est-à-dire pour  $\nu \ll kT/h$ , ou de manière équivalente aux grande longueurs d'onde  $\lambda \gg hc/kT$ , les fonctions de Planck  $B_\nu(T)$  et  $B_\lambda(T)$  peuvent être approchées par des expressions constituant la **loi de Rayleigh-Jeans**

$$B_{\nu,\text{RJ}} = \frac{2kT\nu^2}{c^2} \quad \text{et} \quad B_{\lambda,\text{RJ}} = \frac{2kcT}{\lambda^4}. \quad (4.20)$$

Inversement, à haute fréquence  $\nu \gg kT/h$  et à courte longueur d'onde  $\lambda \ll hc/kT$ , les fonctions de Planck  $B_\nu(T)$  et  $B_\lambda(T)$  peuvent être approchées par des expressions constituant la **loi de Wien**

$$B_{\nu,\text{W}} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \quad \text{et} \quad B_{\lambda,\text{W}} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{hc}{\lambda kT}\right). \quad (4.21)$$

#### **Exercice 42 : Démontrer les relations (4.20) et (4.21).**

Les courbes correspondantes sont représentées sur la Fig. 4.6 pour un corps noir à  $T = 5800 \text{ K}$ .

La loi de Rayleigh-Jeans est particulièrement utilisée en radio-astronomie, car à ces fréquences (disons  $\nu \sim 100 \text{ GHz}$ ) on a typiquement un rapport  $h\nu/k \sim 5 \text{ K}$ , généralement inférieur aux températures mises en jeu dans les objets étudiés. La loi de Wien, inversement, est appliquée en astronomie X.

Notons que dans la limite de Rayleigh-Jeans, à savoir la limite basse énergie, il faut beaucoup de photons pour obtenir une énergie  $kT$ , de sorte que la quantification de la lumière n'apparaît pas dans cette limite. L'absence de la constante de Planck dans l'expression de  $B_{\nu,\text{RJ}}$  en est la signature. Inversement, à haute fréquence, chaque photon transporte une part non négligeable de l'énergie du champ et leur caractère discret devient manifeste. C'est d'ailleurs pour résoudre le problème de la **catastrophe**

5. L'hypothèse d'une évolution adiabatique réversible pour le gaz de photons du CMB est loin d'être évidente...

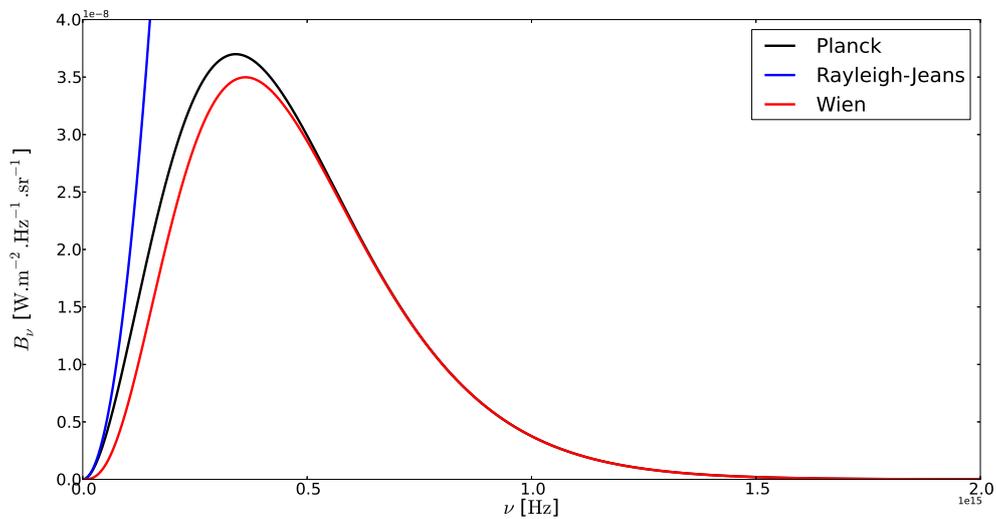


FIGURE 4.6 – **Lois de Planck, Rayleigh-Jean et Wien.** Loi de Planck (en noir), loi de Rayleigh-Jeans (en bleu) et loi de Wien (en rouge), pour un corps noir à  $T = 5800$  K.

**ultraviolette** que Max Planck a été amené à postuler la quantification de l'énergie du champ électromagnétique.

**Exercice 43 :** Démontrer ce qu'on entend par catastrophe ultraviolette. On rappelle que, classiquement, chaque mode du champ porte en moyenne une énergie  $kT$ .

#### 4.1.6 Températures caractéristiques

##### Température de brillance

Le corps noir est pris comme référence pour définir la **température de brillance**,  $T_b(\nu)$ , d'une source astrophysique par la relation suivante, qui exprime que  $T_b$  est la température du corps noir émettant la même intensité spécifique que la source considérée à la fréquence  $\nu$ ,

$$I_\nu = B_\nu(T_b), \quad (4.22)$$

De manière générale, la température de brillance dépend donc de la fréquence d'observation  $\nu$ . L'exception à cette règle est bien entendu le cas d'une source ayant un spectre de corps noir à la température  $T$ . Dans ce cas,  $T_b = T$  est indépendante de  $\nu$ .

La température de brillance est surtout utilisée en radio-astronomie, car son expression en fonction de l'intensité observée est particulièrement simple lorsque l'approximation de Rayleigh-Jeans s'applique. On a alors une relation de proportionnalité directe entre les deux quantités,

$$T_b(\nu) = \frac{c^2 I_\nu}{2k\nu^2}, \quad (4.23)$$

ce qui explique pourquoi les spectres radio sont souvent représentés en termes de température de brillance.

**Exercice 44 : Déterminer l'expression générale de la température de brillance.**

**Température radiative**

On définit de même la **température radiative**  $T_r$  par la relation suivante, qui exprime que  $T_r$  est la température du corps noir émettant la même intensité moyenne que la source considérée à la fréquence  $\nu$ ,

$$J_\nu = B_\nu(T_r), \tag{4.24}$$

Celle-ci est identique à la température de brillance  $T_b$  dans le cas d'un rayonnement isotrope.

**Température de couleur**

Lorsqu'une source émet un spectre dont la forme est (au moins dans un certain intervalle de fréquence) proche de celle d'un corps noir, mais sans échelle verticale absolue parce que la taille et la distance de la source sont inconnues, on peut définir une **température de couleur**  $T_c$  via un ajustement du spectre par une fonction de Planck.

En pratique, cet ajustement peut se limiter à mesurer la pente du spectre entre deux fréquences, ou entre deux bandes de fréquences, et à déterminer la température du corps noir présentant la même pente entre ces deux mêmes fréquences.

Bien entendu, si la source a un spectre de corps noir à la température  $T$ , alors  $T_c = T_b = T$ .

**Température effective**

Enfin, la **température effective**  $T_{\text{eff}}$  est celle du corps noir qui émet un flux identique à celui de la source observée sur l'ensemble du spectre. Ce paramètre est donc défini par  $F = \sigma_S T_{\text{eff}}^4$ , soit

$$T_{\text{eff}} = \left( \frac{F}{\sigma_S} \right)^{1/4} \tag{4.25}$$

Bien entendu, si la source est un corps noir à la température  $T$ , on a également  $T_{\text{eff}} = T$ .

## 4.2 Exemples de corps noir et d'émissions thermiques

### 4.2.1 Rayonnement du fond diffus cosmologique

**Origine du rayonnement**

Le **rayonnement du fond diffus cosmologique (CMB)**, prédit<sup>6</sup> par les travaux de Alpher, Herman et Gamow en 1948 [1, 2, 14] et découvert par Penzias et Wilson en 1965 [35], ne présente aucune déviation spectrale mesurable par rapport à la loi de Planck, comme le montre la Fig. 4.7. Les barres d'erreur sur ce spectre mesuré par COBE/FIRAS en 1990 [25] représentent  $400\sigma$ , ce qui signifie que l'incertitude-type  $\sigma$  sur chaque point de mesure est extrêmement faible! Le pic d'émission de  $I_\nu$  se trouve aux alentours de 1.87 mm de longueur d'onde, soit une fréquence de 160 GHz, ce qui correspond à une température du CMB à l'époque actuelle de  $T_{\text{CMB}} = 2.725$  K. Le modèle cosmologique standard

6. On trouvera une intéressante description historique de cette découverte dans [34].

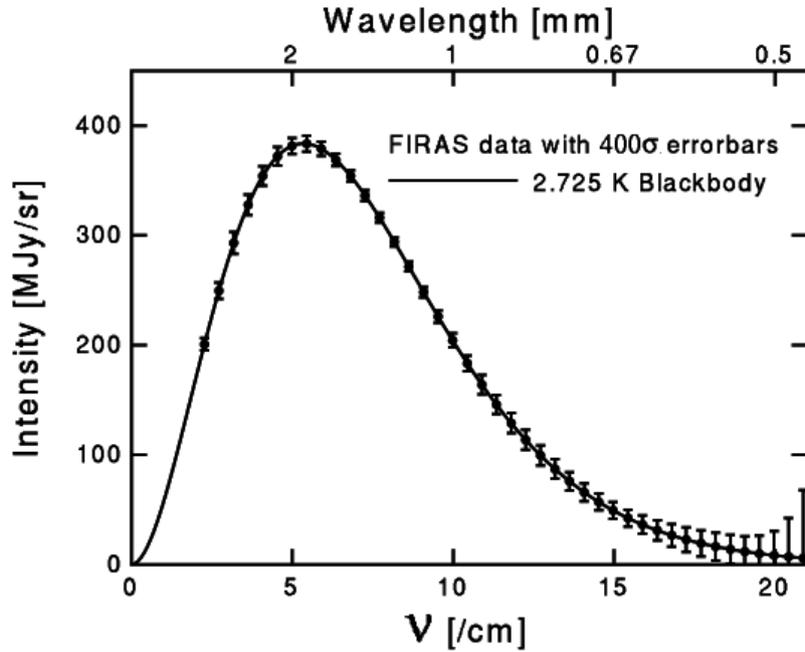


FIGURE 4.7 – Spectre de l'émission du corps noir cosmologique (CMB) mesuré par l'instrument FIRAS à bord de la mission COBE [25].

prédit que cette température varie avec le redshift comme  $T_{\text{CMB}}(z) = 2.725(1+z)$ , résultat bien vérifié par la spectroscopie de quasars lointains en utilisant des transitions d'espèces chimiques comme "thermomètres"<sup>7</sup>. L'origine de ce rayonnement se situe environ 380 000 ans après le Big Bang, lorsque la température de l'Univers est descendue au dessous de  $\sim 3000$  K. Les protons et les électrons du plasma ont alors pu se recombiner, faisant chuter l'épaisseur optique jusqu'alors dominée par la diffusion Thomson. L'Univers est devenu essentiellement transparent, et ce sont les photons ainsi découplés de la matière qui nous parviennent sous la forme du rayonnement cosmologique.

### Dipôle du CMB

Le spectre d'émission du CMB n'est isotrope que pour un observateur fixe dans le référentiel lié à la source du CMB. Pour un observateur se déplaçant à la vitesse  $v$  dans ce référentiel, on montre que le spectre observé dans une direction d'observation  $\mathbf{n}$  faisant un angle  $\vartheta$  avec  $\mathbf{v}$  est également un spectre de corps noir, mais à la température

$$T(\vartheta) = T_{\text{CMB}} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta} \quad (4.26)$$

**Exercice 45 :** Démontrer ce résultat en partant du fait que le rapport  $I_\nu/\nu^3$  est un invariant relativiste (voir la section 2.1.4), conservé dans le changement de référentiel à considérer.

7. On verra plus tard un exemple d'une telle mesure.

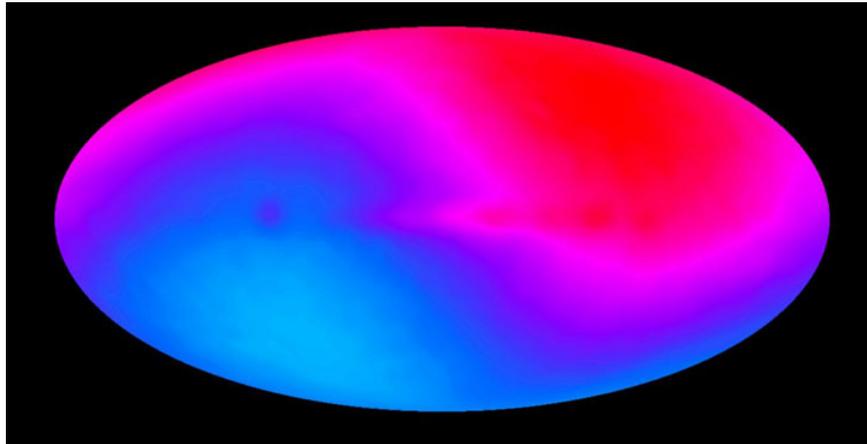


FIGURE 4.8 – **Emission du corps noir cosmologique (CMB) montrant l'effet de dipôle.** L'échelle des couleurs va de -2.5 mK (bleu) à +3.5 mK (rouge) autour de la valeur moyenne de l'émission du CMB. Crédit : DMR/COBE/NASA.

Comme  $v \ll c$ , on peut faire un développement limité de  $T(\vartheta)$  au premier ordre en  $v/c$

$$T(\vartheta) \simeq T_{\text{CMB}} \left( 1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta \right) \quad (4.27)$$

ce qui montre que, suivant que l'observateur regarde dans la direction de son mouvement par rapport au CMB ou dans la direction opposée, il observera un corps noir cosmologique plus chaud ou plus froid. C'est ce qui est représenté sur la Fig. 4.8, issue des mesures de COBE.

**Exercice 46 :** Sachant que le satellite WMAP a mesuré l'amplitude crête-à-crête du dipôle et a trouvé  $\Delta T_{\text{dipole}} = 6.692 \text{ mK}$ , en déduire la vitesse  $v$  du système solaire par rapport au référentiel du CMB. Quels mouvements composent cette vitesse ?

Après correction de cet effet systématique, le rayonnement du fond diffus cosmologique n'est cependant pas parfaitement isotrope : il présente des fluctuations relatives de l'ordre de  $\delta T_{\text{CMB}}/T_{\text{CMB}} \sim 10^{-5}$ . Ces **fluctuations primordiales** sont interprétées comme étant les graines à partir desquelles se sont formées les grandes structures de l'Univers. Leur répartition angulaire fournit des contraintes fortes aux modèles cosmologiques.

## 4.2.2 Émission thermique et température des grains interstellaires

### Origine et équation d'équilibre radiatif

Le champ de rayonnement stellaire dans l'ultraviolet, le visible, voire le proche infrarouge, chauffe les grains de poussière interstellaire tandis que, compte tenu de la température atteinte (tout au plus quelques dizaines de K), ces derniers vont produire une émission thermique dans l'infrarouge plus lointain. À l'équilibre, les grains suffisamment gros acquièrent une température  $T_d$  telle que l'absorption et l'émission se compensent. Cette situation d'**équilibre radiatif** est précisément le sens de la loi de Kirchhoff, de sorte que l'on peut écrire que l'émissivité des poussières est  $\varepsilon_\nu = \kappa_\nu B_\nu(T_d)$  et que l'équation d'équilibre définissant implicitement la température  $T_d$  s'écrit

$$\int \kappa_\nu J_\nu d\nu = \int \kappa_\nu B_\nu(T_d) d\nu, \quad (4.28)$$

où le membre de gauche représente l'énergie absorbée par le grain, et celui de droite l'énergie émise.

### Effacité d'absorption, indice spectral

Pour des grains sphériques de rayon  $a$ , il est par ailleurs usuel de remplacer le coefficient d'absorption par l'efficacité d'absorption  $Q_\nu$  définie par

$$Q_\nu = \frac{s_{\nu,a}}{\pi a^2} = \frac{\kappa_\nu}{n_d \pi a^2} \quad (4.29)$$

où  $n_d$  est la densité des poussières (nombre de grains par unité de volume). L'efficacité d'absorption est donc le rapport de la section efficace d'absorption des grains à leur section géométrique.

Elle est fonction de la fréquence  $\nu$  mais aussi de la taille  $a$  des grains, et un modèle couramment utilisé pour l'émission dans le domaine infrarouge est celui d'une loi de puissance  $Q_\nu(a) = Q_0 a \nu^\beta$ , où  $\beta$  est appelé **indice spectral** et prend des valeurs aux alentours de 2, dépendant de la composition (carbonée ou silicatée) des poussières [20]. On utilise ce modèle dans la suite.

### Température d'équilibre des grains

Pour calculer la température  $T_d$  il est nécessaire de calculer le chauffage auquel sont soumis les grains (c'est-à-dire le membre de gauche de l'équation ci-dessus). On considère ici l'exemple simple d'une étoile unique, de rayon  $R_*$  et de température  $T_*$ , située à la distance  $d$  d'un grain de poussière de rayon  $a$ . On suppose cette étoile suffisamment chaude pour que le rayonnement émis (représenté par  $J_\nu$ ) se situe essentiellement dans les domaines visible et ultraviolet, entre  $\lambda = 10$  nm et  $\lambda = 800$  nm. À ces longueurs d'onde, l'efficacité d'absorption des grains est sensiblement  $Q_\nu \simeq 1$ . On peut alors montrer que la température d'équilibre des grains est donnée par

$$T_d = C_\beta \left[ \frac{T_*^4}{a} \left( \frac{R_*}{d} \right)^2 \right]^{1/(4+\beta)} \quad (4.30)$$

où  $C_\beta$  est une constante dépendant de  $Q_0$  et  $\beta$ .

**Exercice 47 :** Déterminer la fréquence  $\nu_{\max,\beta}$  à laquelle l'émission des grains est maximale. On pourra s'inspirer des raisonnements utilisés pour établir la loi de déplacement de Wien.

**Exercice 48 :** Établir l'expression (4.30) donnant la température d'équilibre des grains.

*Exemple :* Numériquement, on peut prendre un grain silicaté ( $\beta = 2$ ) avec  $Q_0 = 10^{-21} \text{ Hz}^2 \text{ m}^{-1}$ , de rayon  $a = 0.1 \mu\text{m}$ , situé à une distance  $d = 10 \text{ AU} \simeq 1.5 \times 10^{12} \text{ m}$  d'une étoile de type A0V ( $T_* = 9700 \text{ K}$  et  $R_* = 1.9 R_\odot \simeq 1.32 \times 10^9 \text{ m}$ ). L'application numérique donne  $T_d \simeq 360 \text{ K}$ . On note que cette température est nettement plus grande que les valeurs typiques données plus haut, car on a pris un grain très proche d'une étoile chaude. Très grossièrement, on peut dire que la distance moyenne entre étoiles dans le voisinage solaire étant de l'ordre de  $10^{17} \text{ m} \sim 10^5 \times 10 \text{ AU}$ , comme  $T_d \propto d^{-1/3}$  pour  $\beta = 2$ , on trouve  $T_d \sim 360 \times 10^{-5/3} \simeq 8 \text{ K}$ .

### Cas des très petits grains

Le raisonnement ci-dessus fondé sur l'équilibre radiatif ne fonctionne plus pour les très petits grains ( $a \approx 10$  à  $100 \text{ \AA}$ ). En effet, avec quelques atomes, la capacité calorifique  $C$  est très faible, donc l'augmentation de température provoquée par l'absorption d'un photon unique (énergie  $h\nu$ ) peut être très grande ( $\delta T \sim h\nu/C$ ). On ne peut plus considérer le rayonnement comme un flux continu d'énergie, et les très petits grains n'atteignent pas une température d'équilibre bien définie : celle-ci fluctue sans arrêt sous l'effet de l'absorption des photons individuels, comme le montre la Fig. 4.9, issue de [9].

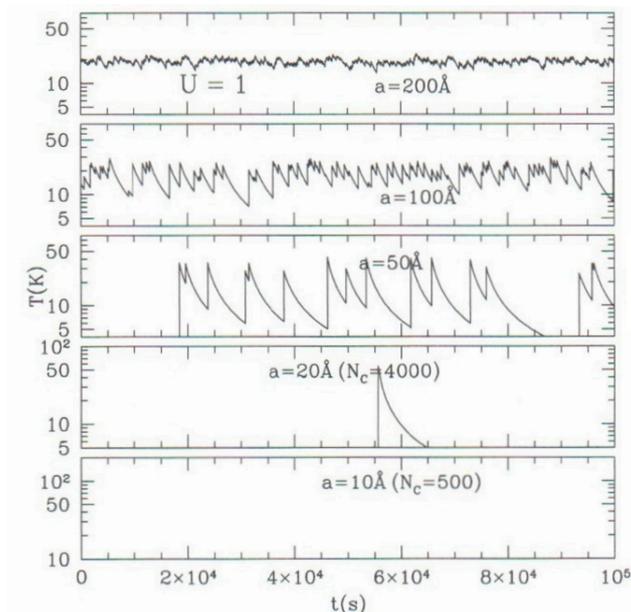


FIGURE 4.9 – **Chauffage stochastique des grains de poussière interstellaires.** Pour les gros grains (en haut), la température ne fluctue que peu au cours du temps. Ce n'est pas du tout le cas des très petits grains (en bas) [9].

### 4.2.3 Planètes ou objets interplanétaires. Effet de serre

#### Équilibre radiatif pour un corps planétaire

L'équation d'équilibre radiatif écrite plus haut dans le cas des grains interstellaires peut également être appliquée au calcul de la température des planètes, dans un modèle extrêmement simplifié.

On considère une planète sphérique, de rayon  $r$ , en rotation, située à une distance  $D$  de son étoile, elle aussi sphérique, de luminosité bolométrique  $L_*$ . En supposant que la température atteinte par la planète est uniforme<sup>8</sup>, qu'à l'équilibre thermique, la planète peut être assimilée à un corps noir, et que l'efficacité d'absorption dans le visible est  $Q_v = 1 - A$ , avec  $A$  l'albédo, on montre alors que

$$T_{\text{eff}} = \left[ \frac{(1 - A)L_*}{16\pi\sigma_S D^2} \right]^{1/4} \quad (4.31)$$

#### **Exercice 49 : Démontrer la relation (4.31).**

Numériquement, cette formule s'écrit, en introduisant les grandeurs caractéristiques de distance (1 UA) et de luminosité (1  $L_\odot$ ) pour notre système Solaire,

$$T_{\text{eff}} = 278 \text{ K} \times \left( \frac{D}{1 \text{ UA}} \right)^{-1/2} (1 - A)^{1/4} \left( \frac{L_*}{L_\odot} \right)^{1/4}. \quad (4.32)$$

8. On néglige donc les effets de dépendance en latitude, par exemple.

### Cas d'un corps en rotation synchrone

Si la planète est en rotation synchrone, elle présente toujours la même face à son étoile. Si l'on néglige la conduction thermique interne, la puissance absorbée est identique que dans le cas précédent (même section efficace), mais seule une face est en équilibre avec ce rayonnement (l'autre face est à température nulle). Dans ce cas, la formule est modifiée en

$$T_{\text{eff}} = \left[ \frac{(1-A)L_{\star}}{8\pi\sigma_S D^2} \right]^{1/4} = 330 \text{ K} \times \left( \frac{D}{1 \text{ UA}} \right)^{-1/2} (1-A)^{1/4} \left( \frac{L_{\star}}{L_{\odot}} \right)^{1/4}. \quad (4.33)$$

### Exercice 50 : Démontrer la relation (4.33).

*Exemple :* Prenant pour simplifier un albédo  $A = 0,5$  et  $L_{\star} = L_{\odot}$  on a alors, dans cette approximation, pour les planètes du système solaire, les températures effectives  $T_{\text{eff}}$  suivantes, à comparer avec les valeurs moyennes mesurées de leurs températures de surface  $\langle T_{\text{surf}} \rangle$  :

Planète	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
Rotation	lente	lente	rapide	rapide	rapide	rapide	rapide	rapide
$D$ (UA)	0.387	0.723	1	1.52	5.20	9.55	19.2	30.1
$T_{\text{eff}}$ (K)	447	327	234	190	103	76	53	43
$\langle T_{\text{surf}} \rangle$ (K)	452	726	281	230	120	88	59	48

### Effet de serre

Pour la Terre (et encore plus pour Vénus), la température ainsi obtenue est trop faible. C'est qu'on a négligé un aspect important, à savoir que l'atmosphère produit un **effet de serre** car certains gaz comme le dioxyde de carbone  $\text{CO}_2$  jouent un rôle analogue aux vitres des serres (qui sont transparentes vis à vis du rayonnement solaire incident, dans le visible, mais opaques au rayonnement infrarouge thermique émis par le sol).

La figure 4.10 présente un modèle simpliste de cet effet, pour lequel on considère une atmosphère fine au dessus de la surface de la planète. La température de surface de la planète est  $T_0$ , celle de l'atmosphère est  $T_1$ , les deux systèmes étant considérés comme des corps noirs. La puissance par unité de surface de la planète arrivant depuis l'étoile est située dans le visible essentiellement, pour lequel l'atmosphère est transparente. En revanche, le rayonnement infrarouge de la surface planétaire, dont le flux est  $\sigma_S T_0^4$ , est absorbé en partie (fraction  $f$ ) par l'atmosphère. Celle-ci, portée à la température  $T_1$ , réémet vers le haut et vers le bas un flux  $\sigma_S T_1^4$ .

On montre alors que la température effective de la surface planétaire est donnée par

$$T_{\text{eff}} = T_0 = \left[ \frac{(1-A)L_{\star}}{16\pi\sigma_S D^2 \left(1 - \frac{f}{2}\right)} \right]^{1/4} \quad (4.34)$$

Avec une valeur typique de  $f = 0.8$ , on a pour la Terre  $T_{\text{eff}} \simeq 266 \text{ K}$ , ce qui est encore trop froid, mais donne une idée du principe, qui peut être raffiné.

### Exercice 51 : Démontrer la relation (4.34).

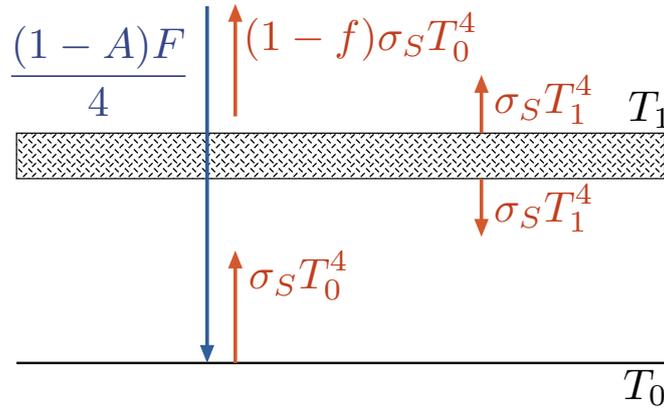


FIGURE 4.10 – Modèle simpliste de l'effet de serre.

## 4.3 Lois relatives à la matière

### 4.3.1 Distribution de Maxwell

La **distribution de Maxwell** donne la distribution en probabilité des vitesses des particules libres dans un gaz globalement au repos, à l'équilibre thermique à la température  $T$ . La probabilité qu'une particule ait une vitesse  $\mathbf{v}$  à  $d^3\mathbf{v}$  près est  $dP(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v})d^3\mathbf{v}$ , avec la distribution en probabilité

$$f(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right). \quad (4.35)$$

où  $v = \|\mathbf{v}\|$  est la norme du vecteur vitesse. Cette distribution est donc une Gaussienne à trois dimensions  $(v_x, v_y, v_z)$ , de moyenne nulle et d'écart-type

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{kT}{m}} \quad (4.36)$$

La distribution en probabilité de chacune des composantes de la vitesse est également une Gaussienne, de même écart-type. En toute rigueur, cette distribution est également une fonction de la position  $\mathbf{x}$  et du temps  $t$ , via la dépendance potentielle de la température en ces variables (l'équilibre thermodynamique étant local). On définit plus généralement une fonction de distribution  $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  telle que la probabilité  $dP(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  de trouver, à l'instant  $t$ , une particule de vitesse  $\mathbf{v}$  à  $d^3\mathbf{v}$  près dans un volume  $d^3\mathbf{x}$  autour du point  $\mathbf{x}$  s'écrit  $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}$ .

Enfin, la densité de probabilité du module  $v$  de la vitesse est donnée par

$$f_v(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) 4\pi v^2. \quad (4.37)$$

ce qu'on obtient en explicitant l'élément de volume dans l'espace des vitesses,  $d^3\mathbf{v} = 4\pi v^2 dv$ .

**Exercice 52 :** Démontrer la relation (4.35) à partir de considérations très générales sur les

symétries (stationnarité, homogénéité et isotropie), sans hypothèse autre que la présence d'un nombre "suffisamment grand" de particules dans tout élément de volume mésoscopique.

### Vitesses caractéristiques

La distribution de Maxwell permet de calculer un certain nombre de vitesses caractéristiques, que sont la **vitesse quadratique moyenne**  $v_q$  (dite aussi **vitesse RMS** pour *Root Mean Square*), la **vitesse la plus probable**  $v_p$ , et la **vitesse moyenne**  $\langle v \rangle$ . On montre que pour cette distribution, ces vitesses ont pour expressions, respectivement,

$$v_q = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad (4.38)$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (4.39)$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad (4.40)$$

#### **Exercice 53 : Démontrer les relations, (4.38), (4.39) et (4.40).**

Numériquement, on a, en posant  $\mu = m/m_p$  avec  $m_p = 1.673 \times 10^{-27}$  kg la masse du proton, et en exprimant la température cinétique  $T$  en Kelvin,

$$v_q = 0.157 \sqrt{\frac{T}{\mu}} \text{ km s}^{-1} \quad v_p = 0.128 \sqrt{\frac{T}{\mu}} \text{ km s}^{-1} \quad \langle v \rangle = 0.145 \sqrt{\frac{T}{\mu}} \text{ km s}^{-1} \quad (4.41)$$

Exemple : Un ordre de grandeur utile à avoir en tête est que la vitesse typique des atomes d'hydrogène dans le milieu interstellaire neutre et froid (100 K) est d'environ  $1 \text{ km s}^{-1}$ .

### 4.3.2 Distribution de Boltzmann

La **distribution de Boltzmann** précise, pour un système d'atomes ou de molécules par exemple, le peuplement de niveaux discrets  $i$  et  $j$ , d'énergies respectives  $E_i$  et  $E_j$  et de multiplicités<sup>9</sup> respectives  $g_i$  et  $g_j$ , lorsque le système est à l'équilibre thermodynamique :

$$\frac{n_{j,\text{ET}}}{n_{i,\text{ET}}} = \frac{g_j}{g_i} \exp\left(-\frac{E_j - E_i}{kT}\right). \quad (4.42)$$

**Exercice 54 : Démontrer la relation (4.42) en considérant un système à deux niveaux, à l'équilibre thermodynamique à la température  $T$ . On notera que la probabilité de trouver le système sur un niveau ne peut dépendre que de l'énergie du niveau et de la température.**

### Température d'excitation, coefficients de déviation

Dans les systèmes qui ne sont pas à l'équilibre thermodynamique, le rapport des populations des niveaux n'a pas de raison de suivre la distribution de Boltzmann, mais on peut néanmoins toujours

9. La **multiplicité** ou **poids statistique** d'un niveau est le nombre d'états quantiques différents ayant cette énergie. Lorsque  $g > 1$  on parle de **niveau dégénéré**. Des processus divers permettent de lever cette dégénérescence.

définir une **température d'excitation**  $T_x$  par la relation

$$\frac{n_j}{n_i} = \frac{g_j}{g_i} \exp\left(-\frac{E_j - E_i}{kT_x}\right), \quad (4.43)$$

qui exprime que la température d'excitation est la valeur que devrait prendre la température cinétique pour que les populations effectivement observées obéissent à la loi de Boltzmann. Si le milieu n'est pas à l'équilibre thermodynamique, on aura  $T_x \neq T$  et la valeur de  $T_x$  obtenue pourra dépendre du couple de niveaux choisis. On verra des exemples dans la suite.

Par ailleurs, on définit les **coefficients de déviation** par rapport à l'équilibre thermodynamique

$$b_i = \frac{n_i}{n_{i,ET}}. \quad (4.44)$$

Ces coefficients sont bien entendu égaux à un à l'équilibre thermodynamique.

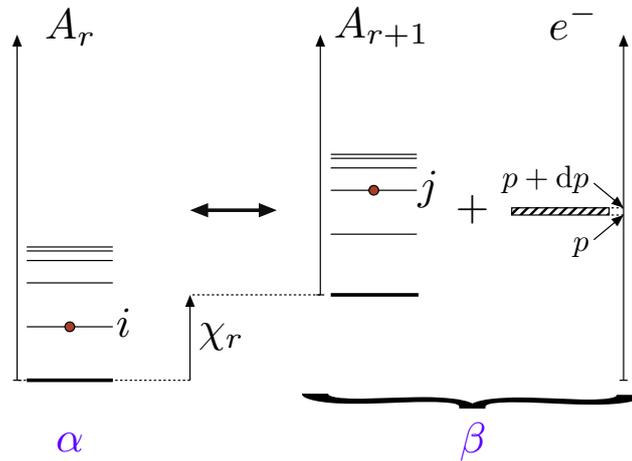


FIGURE 4.11 – **Equilibre d'ionisation entre les états  $r$  et  $r + 1$  fois ionisé.**

### 4.3.3 Loi de Saha

La **loi de Saha** régit la distribution des particules d'une même espèce dans différents états d'ionisation lorsque le système est à l'équilibre thermodynamique à la température  $T$ . Elle s'écrit sous la forme

$$\frac{n_{r+1}n_e}{n_r} = \frac{2Z_{r+1}}{Z_r} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} \exp\left(-\frac{\chi_r}{kT}\right), \quad (4.45)$$

où  $n_e$  est la densité des électrons libres,  $n_r$  est la densité de l'ion  $r$  fois ionisé, qu'on note  $A_r$ , avec  $\chi_r$  son potentiel d'ionisation (c'est-à-dire l'énergie à fournir pour passer de l'ion  $r$  fois ionisé à l'ion  $r + 1$  fois ionisé, tous les deux étant pris dans leurs niveaux fondamentaux respectifs), et  $Z_r$  sa fonction de

partition, soit

$$Z_r(T) = \sum_{j \geq 0} g_{r,j} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_{r,j}}{kT}\right), \quad (4.46)$$

avec  $g_{r,j}$  et  $\mathcal{E}_{r,j}$  le poids statistique et l'énergie du niveau  $j \geq 0$  de l'ion  $r$  fois ionisé, comptée depuis son état fondamental  $j = 0$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{E}_{r,0} = 0$  pour tous les états  $r$  d'ionisation.

On peut également obtenir une relation donnant le rapport des populations niveau par niveau

$$\frac{n_{r+1,j}}{n_{r,i}} = \frac{g_{r+1,j}}{g_{r,i}} \frac{2(2\pi m_e kT)^{3/2}}{n_e h^3} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_{r+1,j} + \chi_r - \mathcal{E}_{r,i}}{kT}\right) \quad (4.47)$$

**Exercice 55 :** Établir la relation (4.47), en considérant l'équilibre d'ionisation décrit par la Fig. 4.11, à savoir  $A_{r,i} \rightleftharpoons A_{r+1,j} + e^-$ . On appliquera la loi de Boltzmann aux deux états  $\alpha = \{A_{r,i}\}$  et  $\beta = \{A_{r+1,j} + e^-(p)\}$  en tenant compte de l'impulsion  $p$  de l'électron.

**Exercice 56 :** Établir alors la loi de Saha (4.45).

#### 4.3.4 Application de la loi de Saha à un plasma d'hydrogène

À titre d'exemple, considérons le cas simple d'un gaz d'hydrogène de densité  $n$  fixée, à la température  $T$ . Les notations  $n_0$  et  $n_1$  désignent alors respectivement les densités des atomes d'hydrogène neutre H (notés habituellement HI) et des protons libres  $H^+$  (notés habituellement HII).

##### Fonctions de partition

La fonction de partition des protons libres est simplement  $Z_1(T) = 1$  car l'ion  $H^+$  n'a pas d'électron lié, par définition. En ce qui concerne l'atome d'hydrogène neutre, on a la fonction de partition

$$Z_0(T) = \sum_{j \geq 1} Z_{0,j}(T) \quad (4.48)$$

où chaque terme est donné par

$$Z_{0,j}(T) = g_j \exp\left(-\frac{E_j}{kT}\right) = 2j^2 \exp\left[-\frac{\chi_0}{kT} \left(1 - \frac{1}{j^2}\right)\right] \quad (4.49)$$

avec  $\chi_0 = 13.6 \text{ eV} = 2.179 \times 10^{-18} \text{ J}$  l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène, et en prenant comme référence d'énergie le niveau fondamental  $j = 1$ .

**Exercice 57 :** Calculer les deux premiers termes  $Z_{0,1}(T)$  et  $Z_{0,2}(T)$  dans le cas de la photosphère Solaire ( $T_\odot = 6400 \text{ K}$ ). Quelle difficulté rencontre-t-on lorsqu'on veut calculer la fonction de partition complète  $Z_0(T)$ ? Comment résoudre ce paradoxe?

##### Expression de la loi de Saha

On peut alors se limiter au premier terme, soit  $Z_0(T_\odot) \simeq 2$ , et montrer que la loi de Saha dans ce cas particulier s'écrit, en introduisant le degré d'ionisation  $y = n_1/n$ , comme

$$\frac{y^2}{1-y} = \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{nh^3} \exp\left(-\frac{\chi_0}{kT}\right) \quad (4.50)$$

soit encore, numériquement,

$$\frac{y^2}{1-y} = 2.41 \left( \frac{T}{1 \text{ K}} \right)^{3/2} \left( \frac{n}{10^{21} \text{ m}^{-3}} \right)^{-1} \exp \left( -\frac{1.58 \times 10^5 \text{ K}}{T} \right). \quad (4.51)$$

### Exercice 58 : Établir l'équation de Saha (4.50).

Il convient de remarquer que l'expression (4.50) fait apparaître la **longueur d'onde thermique de de Broglie des électrons**

$$\Lambda_e = \frac{h}{\sqrt{2\pi m_e kT}} \quad (4.52)$$

et qu'elle se met alors sous la forme simple

$$\frac{y^2}{1-y} = \frac{1}{n\Lambda_e^3} \exp \left( -\frac{\chi_0}{kT} \right) \quad (4.53)$$

### Exemple de la photosphère Solaire

Pour la photosphère Solaire, on a  $n = 2 \times 10^{23} \text{ m}^{-3}$  et  $T = 6400 \text{ K}$ , et on trouve

$$y = \frac{n_1}{n} \simeq \frac{n_1}{n_0} \simeq 3.7 \times 10^{-4}. \quad (4.54)$$

On constate que l'hydrogène y est presque entièrement neutre. Il faudrait augmenter la température vers 23000 K pour obtenir un taux d'ionisation  $y \simeq 1$ , comme l'indique la Fig. 4.12.

Notons que cette température est nettement inférieure à  $\chi_0/k$  (de l'ordre de  $1.58 \times 10^5 \text{ K}$ ), à laquelle on aurait pu intuitivement penser. La raison en est que dans les gaz diffus considérés, un atome, une fois qu'il a été ionisé, a peu de chances de rencontrer un électron pour se recombiner. C'est aussi pour cette raison qu'à une température donnée, le degré d'ionisation augmente lorsque la densité totale  $n$  diminue<sup>10</sup>. On peut voir sur la Fig. 4.13 la représentation du rapport  $n_1/n_0$  en fonction de la température, pour un certain nombre de valeurs de la densité totale  $n$ , allant de la densité moyenne de la matière visible dans l'univers aux densités maximales au-delà desquelles la séparation entre atomes approche la taille caractéristique d'un atome.

### Exemple du découplage matière-rayonnement

Une seconde application de la formule de Saha au cas d'un plasma d'hydrogène pur est le cas du découplage de la matière et de la radiation qui a donné naissance au CMB. La densité totale d'hydrogène varie avec le redshift du fait de l'expansion comme  $n \propto (1+z)^{-3}$ . D'autre part, la constance de l'entropie du gaz de photons permet de relier la température du CMB au redshift par  $T_{\text{CMB}} \propto (1+z)$ .

Le découplage correspond au moment où le milieu passe d'entièrement ionisé ( $y \simeq 1$ ) à entièrement neutre ( $y \simeq 0$ ), et on cherche une estimation du redshift  $z_d$  auquel a lieu cette transition. En posant

10. Remarquons qu'en appliquant cette formule au centre du Soleil, pour lequel on prend  $n = 6 \times 10^{31} \text{ m}^{-3}$  et  $T = 1.5 \times 10^7 \text{ K}$ , on trouverait  $y \simeq 0.75$ . Bien entendu, ce résultat est erroné! En réalité, à ces densités, la distance moyenne entre deux atomes s'approche de la taille d'un atome isolé, de sorte que les électrons ne sont plus liés à un seul atome en particulier, mais forment un continuum entre les protons. Le centre du Soleil est entièrement ionisé ( $y = 1$ ) par la pression énorme qui y règne.

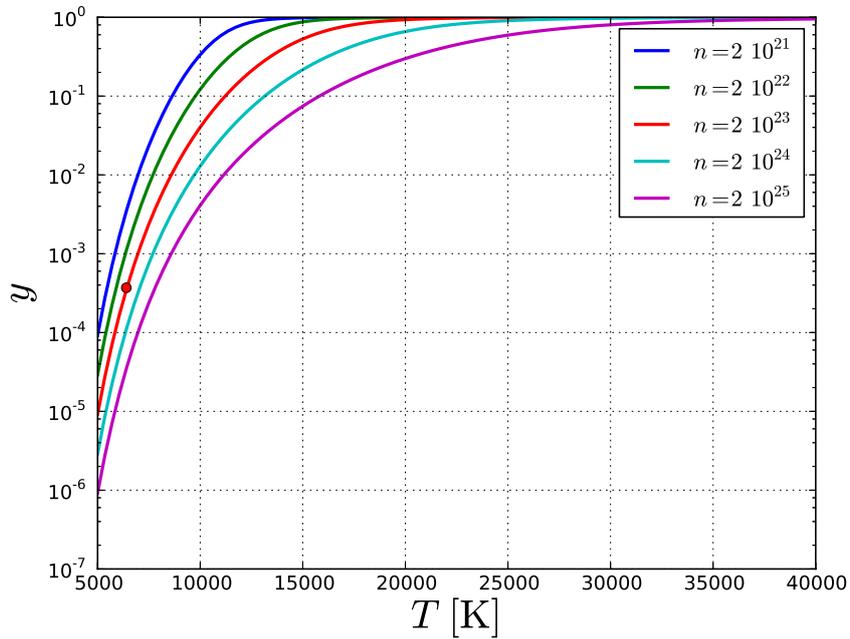


FIGURE 4.12 – Fraction d'ionisation d'un plasma d'hydrogène en fonction de la température, pour diverses densités totales  $n$ . Le cas de la photosphère Solaire ( $T = 6400$  K,  $n = 2 \times 10^{23} \text{ m}^{-3}$ ) est représenté par le point rouge.

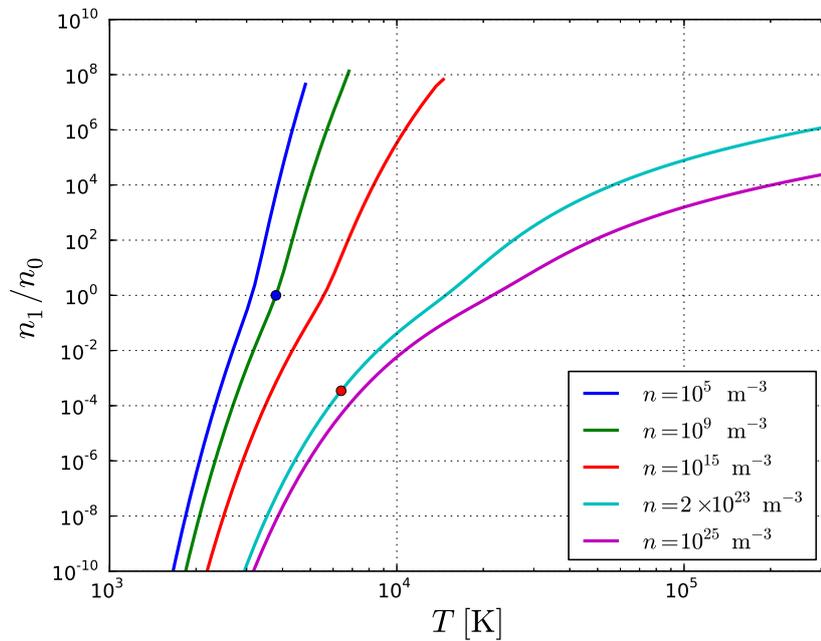


FIGURE 4.13 – Rapport  $n_1/n_0$  d'un plasma d'hydrogène en fonction de la température, pour plusieurs densités totales  $n$ . Le cas de la photosphère Solaire ( $T = 6400$  K) est représenté par le point rouge, celui du découplage ayant donné naissance au CMB par le point bleu.

$T_0 = 2.725$  K la température du CMB à l'époque actuelle et  $n_b \simeq 0.25 \text{ m}^{-3}$  la densité de matière baryonique dans l'Univers actuel, on montre alors que  $z_d$  est solution de

$$\frac{1}{2} = \frac{(2\pi m_e k T_0)^{3/2}}{n_b (1+z_d)^{3/2} h^3} \exp\left(-\frac{\chi_0}{k T_0 (1+z_d)}\right) \quad (4.55)$$

En insérant les valeurs numériques, on a

$$1 = \frac{5.43 \times 10^{21}}{(1+z_d)^{3/2}} \exp\left(-\frac{5.8 \times 10^4}{(1+z_d)}\right) \quad (4.56)$$

La résolution numérique de cette équation donne  $z_d \simeq 1480$ , ce qui est une estimation raisonnable<sup>11</sup> et correspond à une température  $T_d \simeq 4000$  K et  $n_d \simeq 8 \times 10^8 \text{ m}^{-3}$ .

**Exercice 59 :** Établir l'équation implicite sur  $z_d$  (Eq. 4.55).

## 4.4 Thermodynamique d'un mélange gaz-rayonnement

Dans les sections 4.1 à 4.3, nous n'avons pour l'essentiel considéré que les propriétés d'un gaz parfait seul en équilibre thermodynamique à la température  $T$ , ou d'un champ de rayonnement seul dans les mêmes conditions. Or il convient de considérer ces deux composantes ensemble, au sein d'un mélange qu'on peut supposer parfait. Il est alors possible de déterminer les expressions des grandeurs thermodynamiques (pression, énergie interne, etc...) associées à ce système dans son ensemble. Ces formules, dont on trouvera la dérivation dans [27], §70 et §71, s'appliquent notamment aux couches internes des atmosphères stellaires. On les donne ici sans plus de démonstrations.

### 4.4.1 Cas d'un gaz parfait neutre

On considère un mélange d'un gaz parfait constitué de particules ponctuelles identiques, de masse  $m$ , et d'un rayonnement en équilibre thermique avec le gaz, à la température  $T$ . On note  $N$  le nombre de particules et  $V$  le volume de l'enceinte contenant le mélange. Le mélange est caractérisé par le rapport  $\alpha = P_r/P_g$  entre la pression du rayonnement  $P_r$ , et celle du gaz,  $P_g$ . On a, pour celles-ci,

$$P_g = \frac{NkT}{V} \quad P_r = \frac{4\sigma_S}{3c} T^4 = \frac{a}{3} T^4. \quad (4.57)$$

en posant  $a = 4\sigma_S/c$ , constante apparaissant dans l'expression de la densité d'énergie du rayonnement,  $u(T) = aT^4$  (Eq. 4.16).

#### Pression

La pression totale est alors la somme des pressions de chaque composante, qu'on peut écrire en faisant apparaître l'une ou l'autre de ces pressions partielles comme pression de référence,

$$P = P_r + P_g = (1 + \alpha)P_g = (1 + \alpha)\frac{NkT}{V} = \frac{1}{3}aT^4 \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \quad (4.58)$$

#### Énergie interne, enthalpie, entropie

On en déduit l'énergie interne totale du système, son enthalpie totale, et son entropie, somme des contributions des deux composantes.

$$U = \frac{3}{2}NkT(1 + 2\alpha) \quad (4.59)$$

11. En réalité, on a plutôt  $z_d \simeq 1100$ .

$$H = \frac{5}{2}NkT \left(1 + \frac{8}{5}\alpha\right) \quad (4.60)$$

$$S = Nk \left[ \ln \left( T^{3/2} V \right) + 4\alpha \right] + S_0 \quad (4.61)$$

En ce qui concerne la constante  $S_0$ , on note qu'elle est déterminée par la **formule de Sackur-Tetrode**, qui donne l'entropie du seul gaz parfait ( $\alpha = 0$ ) comme

$$S_g = Nk \left[ \ln \left( \frac{V}{N\Lambda^3} \right) + \frac{5}{2} \right] \quad (4.62)$$

où l'on a fait apparaître la longueur d'onde thermique de de Broglie des particules du gaz parfait

$$\Lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}} \quad (4.63)$$

**Exercice 60 :** Établir les expressions de  $U$ ,  $H$  et  $S$  en prenant comme référence les grandeurs associées au rayonnement, et non plus celles associées au gaz.

### Capacités calorifiques

Les capacités calorifiques à volume constant et à pression constante, dont on rappelle qu'elles sont définies respectivement par la dérivée de  $U$  et de  $H$  par rapport à la température, le volume et la pression étant respectivement maintenus constants, sont données par

$$C_v = \frac{3}{2}Nk(1 + 8\alpha) \quad (4.64)$$

$$C_p = \frac{5}{2}Nk \left(1 + 8\alpha + \frac{32}{5}\alpha^2\right) \quad (4.65)$$

**Exercice 61 :** Établir les expressions de  $C_p$  et  $C_v$  en prenant comme référence les grandeurs associées au rayonnement, et non plus celles associées au gaz.

### Coefficients adiabatiques

Les coefficients adiabatiques  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  caractérisent l'évolution des différentes variables d'état à entropie constante. Ils sont définis par

$$\Gamma_1 = - \left( \frac{\partial \ln P}{\partial \ln V} \right)_S \quad \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} = \left( \frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_S \quad \Gamma_3 - 1 = - \left( \frac{\partial \ln T}{\partial \ln V} \right)_S \quad (4.66)$$

Dans le système considéré, on montre alors que

$$\Gamma_1 = \frac{\frac{5}{2} + 20\alpha + 16\alpha^2}{\left(\frac{3}{2} + 12\alpha\right)(1 + \alpha)} \quad \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} = \frac{1 + 5\alpha + 4\alpha^2}{\frac{5}{2} + 20\alpha + 16\alpha^2} \quad \Gamma_3 - 1 = \frac{1 + 4\alpha}{\frac{3}{2} + 12\alpha} \quad (4.67)$$

Dans la limite d'un gaz parfait seul ( $\alpha \rightarrow 0$ ) et dans celle d'un gaz de photons seul ( $\alpha \rightarrow \infty$ ), on retrouve les coefficients adiabatiques attendus, à savoir, respectivement

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \frac{5}{3} \quad (\alpha \rightarrow 0) \quad (4.68)$$

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \frac{4}{3} \quad (\alpha \rightarrow \infty) \quad (4.69)$$

#### 4.4.2 Cas d'un gaz d'hydrogène ionisé

Dans le cas d'un gaz d'hydrogène partiellement ionisé, le système est constitué de protons, d'électrons, d'atomes d'hydrogène neutre et de photons, tous en équilibre thermodynamique à la température  $T$ . Il est caractérisé par la fraction d'ionisation  $y$  qui est déterminée à partir de l'équation de Saha. Le nombre total de particules matérielles est alors  $(1 + y)N$  avec  $N = (n_0 + n_1)V$  le nombre de particules massives, hors électrons. Les différentes grandeurs thermodynamiques considérées dans la section précédente deviennent alors

$$P = (1 + y) \frac{NkT}{V} + \frac{1}{3}aT^4 \quad (4.70)$$

$$U = \frac{3}{2}(1 + y)NkT + Ny\chi_0 + aT^4V \quad (4.71)$$

$$H = \frac{5}{2}(1 + y)NkT + Ny\chi_0 + \frac{4}{3}aT^4V \quad (4.72)$$

$$C_v = Nk \left[ \frac{3}{2}(1 + 8\alpha)(1 + y) + \frac{y(1 - y)}{2 - y} \left( \frac{3}{2} + \frac{\chi_0}{kT} \right)^2 \right] \quad (4.73)$$

$$C_p = Nk \left[ \frac{5}{2} \left( 1 + 8\alpha + \frac{32}{5}\alpha^2 \right) (1 + y) + \frac{y(1 - y^2)}{2} \left( \frac{5}{2} + \frac{\chi_0}{kT} + 4\alpha \right)^2 \right] \quad (4.74)$$

On remarque que l'énergie interne et l'enthalpie contiennent un terme  $Ny\chi_0$  correspondant à l'énergie d'ionisation des électrons présents dans le système<sup>12</sup>. Comme il se doit, ces expressions redonnent celles du cas d'un gaz neutre lorsque  $y = 0$ .

### 4.5 Développements au voisinage de l'équilibre

On a établi qu'à l'équilibre thermodynamique, le rayonnement et la matière obéissent à des lois spécifiques, à savoir essentiellement la loi de Planck pour le rayonnement, et la distribution de Maxwell-Boltzmann pour la matière. On va voir ici ce qu'on peut déduire d'un cas où l'on est proche de cette situation idéalisée, pour ces deux types de systèmes physiques.

#### 4.5.1 Approximation de diffusion pour le rayonnement

##### Intensité spécifique

L'intérieur des étoiles est caractérisé par une grande profondeur optique  $\tau_\nu$ , et du coup la fonction source  $y$  tend vers la fonction de Planck à la température locale,  $S_\nu \rightarrow B_\nu(T)$ . Dans ces régions, le libre parcours moyen des photons  $l_p$  est faible, et ceux-ci diffusent suivant une marche aléatoire. D'autre part, le libre parcours moyen étant faible, la courbure peut être ignorée et on se place donc en géométrie plane.

On peut montrer que l'intensité spécifique du rayonnement dirigé vers l'extérieur ( $\mu > 0$ ) au niveau de la profondeur optique  $\tau_\nu$  a pour expression

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = \sum_{n \geq 0} \mu^n \frac{\partial^n B_\nu}{\partial \tau_\nu^n}(\tau_\nu) \quad (4.75)$$

12. Il faudrait en toute rigueur tenir compte de l'énergie d'excitation électronique, mais on peut la négliger car quand on a une population appréciable hors du fondamental, on a déjà une fraction d'ionisation forte.

**Exercice 62 : Démontrer la relation (4.75), en effectuant un développement de Taylor de la fonction source au voisinage de  $\tau_\nu$ .**

Le résultat pour  $\mu < 0$  ne diffère que par des termes en  $\mathcal{O}(e^{-\tau_\nu/|\mu|})$ , donc on peut utiliser la formule ci-dessus pour toutes les valeurs de  $\mu$  à suffisamment grande profondeur optique.

### Moments de l'intensité

On peut alors calculer les moments de l'intensité spécifique, à savoir l'intensité moyenne  $J_\nu$ , la densité spectrale de flux  $F_\nu$ , et la densité spectrale de pression de radiation  $p_\nu$ . On montre qu'on a

$$J_\nu(\tau_\nu) = B_\nu(\tau_\nu) + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 B_\nu}{\partial \tau_\nu^2}(\tau_\nu) + \dots \quad (4.76)$$

$$F_\nu(\tau_\nu) = \frac{4\pi}{3} \frac{\partial B_\nu}{\partial \tau_\nu}(\tau_\nu) + \frac{4\pi}{5} \frac{\partial^3 B_\nu}{\partial \tau_\nu^3}(\tau_\nu) + \dots \quad (4.77)$$

$$p_\nu = \frac{4\pi}{3c} B_\nu(\tau_\nu) + \frac{4\pi}{5c} \frac{\partial^2 B_\nu}{\partial \tau_\nu^2}(\tau_\nu) + \dots \quad (4.78)$$

**Exercice 63 : Démontrer les relations (4.76) à (4.78).**

La convergence de ces séries est extrêmement rapide. En effet, en ordre de grandeur, on a

$$B_\nu^{(n)} = \frac{\partial^n B_\nu}{\partial \tau_\nu^n} \sim \frac{B_\nu}{\tau_\nu^n} \quad \text{donc} \quad \frac{B_\nu^{(n+2)}}{B_\nu^{(n)}} \sim \frac{1}{\tau_\nu^2} \sim \left(\frac{l_p}{l}\right)^2 \quad (4.79)$$

où  $l$  est la longueur caractéristique sur laquelle changent significativement les propriétés du système étudié. Dans les atmosphères stellaires, on prendra l'échelle de hauteur de pression, typiquement  $10^2$  à  $10^3$  km pour le Soleil, de la surface vers l'intérieur. Comme le libre parcours moyen est de l'ordre du cm ou moins, on a au plus  $l_p/l$  de l'ordre de  $10^{-7}$ , et donc chaque terme est d'ordre  $\mathcal{O}(10^{-14})$  par rapport au terme précédent. On peut donc ne garder que les premiers termes.

$$\left\| \begin{aligned} J_\nu &\simeq B_\nu & F_\nu &\simeq \frac{4\pi}{3} \frac{\partial B_\nu}{\partial \tau_\nu} & p_\nu &\simeq \frac{4\pi}{3c} B_\nu \end{aligned} \right. \quad (4.80)$$

On note que le flux à l'ordre zéro est nul, et que c'est l'asymétrie créée par le gradient de  $B_\nu$  et donc le gradient de  $T$  qui le rend non nul. **L'anisotropie, même très faible, est essentielle pour qu'il y ait un flux lumineux sortant de l'étoile !**

### Moyenne de Rosseland, moyenne de Planck

La densité spectrale de flux écrite en (4.80) permet de déterminer une équation fondamentale de la physique stellaire, donnant la luminosité bolométrique  $L(r)$  au rayon  $r$ , en fonction du gradient de température. On montre en effet que

$$\left\| \begin{aligned} L &= -\frac{64\pi\sigma_S}{3} \frac{1}{\kappa_R} r^2 T^3 \frac{dT}{dr} \end{aligned} \right. \quad (4.81)$$

Dans cette équation, la quantité  $\kappa_R$  est l'**opacité moyenne de Rosseland** définie par

$$\frac{1}{\kappa_R} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu} \quad (4.82)$$

Sans surprise, les plages spectrales qui déterminent la valeur de  $\kappa_R$ , et donc la luminosité sortante, sont celles qui présentent une faible opacité au rayonnement. On fait également remarquer que le coefficient d'absorption  $\kappa_R$  est de l'ordre de l'inverse du libre parcours moyen  $l_p$  des photons. On peut donc écrire, en introduisant la densité numérique  $n$  des centres absorbeurs et la section efficace  $s_e$ , puis la masse volumique  $\rho$  et la masse des particules  $m$ ,

$$\kappa_R \sim \frac{1}{l_p} \simeq n s_e = \frac{\rho}{m} s_e = \chi \rho \quad (4.83)$$

avec  $\chi = s_e/m$  un coefficient indépendant de la densité. C'est d'ailleurs souvent celui-ci qui est donné dans la littérature, ce qui explique qu'on trouvera souvent les opacités exprimées en  $\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$ .

#### **Exercice 64 : Démontrer la relation (4.81).**

La relation (4.81) a la forme d'une équation de diffusion, puisque le flux sortant de l'étoile de rayon  $R_*$  apparaît comme la projection sur le vecteur unitaire radial d'une équation de type **loi de Fourier**,

$$\mathbf{F}_* = -K_R \nabla T \quad (4.84)$$

avec une **conductivité radiative** qui dépend de la température,

$$K_R = \frac{4ac}{3\kappa_R} T^3. \quad (4.85)$$

Notons qu'on définit aussi une **opacité moyenne de Planck**, qu'on utilise par exemple dans le cadre de l'équilibre radiatif des gros grains (voir Eq. 4.28), et qui, contrairement à l'opacité moyenne de Rosseland, donne un poids plus important aux fréquences présentant un fort coefficient d'absorption,

$$\kappa_P = \frac{\int_0^\infty \kappa_\nu B_\nu d\nu}{\int_0^\infty B_\nu d\nu} \quad (4.86)$$

#### **Application : relation masse-luminosité des étoiles**

L'expression (4.81) reliant la luminosité au gradient de température peut être utilisée en ordre de grandeur pour obtenir une relation entre la masse et la luminosité d'une étoile, à savoir  $L_* \propto M_*^3$ .

**Exercice 65 : Obtenir cette relation masse-luminosité. On considérera l'étoile comme une sphère de gaz parfait d'hydrogène atomique, en équilibre hydrostatique. En déduire que le temps de vie sur la séquence principale est  $t_* \propto M_*^{-2}$ .**

*Exemple :* Puisque le Soleil a une durée de vie de  $10^{10}$  ans, une étoile de  $10 M_\odot$  vit environ  $10^8$  ans, et une étoile de  $0.2 M_\odot$  environ  $2.5 \times 10^{11}$  ans (supérieur à l'âge de l'Univers). En fait, l'opacité  $\chi_*$  dépend aussi légèrement de la masse de l'étoile,  $\chi_* \propto M_*^{-0.3}$ , donc  $L_* \propto M_*^{3.3}$  et  $t_* \propto M_*^{-2.3}$ , ce qui change les durées de vie en  $t_* \simeq 5 \cdot 10^7$  ans pour  $M = 10 M_\odot$  et  $t_* \simeq 4 \cdot 10^{11}$  ans pour  $M = 0.2 M_\odot$ .

## 4.5.2 Méthode de Chapman-Enskog pour la matière

*Note : Cette section, à l'interface avec la mécanique des fluides, se situe quelque peu en dehors du cadre strict du cours et peut donc être ignorée en première lecture. Elle présente néanmoins un intérêt certain pour qui souhaite aborder l'hydrodynamique radiative.*

### Principe

Pour la matière, les petites déviations à la distribution de Maxwell correspondent également à un système (de particules matérielles, cette fois) dans lequel une légère anisotropie est présente. On pense par exemple à un petit gradient de température d'un point à l'autre du système. La théorie cinétique des gaz permet alors un développement perturbatif, appelé **méthode de Chapman-Enskog**, où le petit paramètre du développement est le **nombre de Knudsen**

$$\xi = \frac{l_m}{l} \quad (4.87)$$

qui est le rapport entre le libre parcours moyen  $l_m$  des particules matérielles et l'échelle caractéristique de l'écoulement  $l$ . On notera que ce nombre joue, pour le gaz, le même rôle que l'inverse de l'épaisseur optique pour le rayonnement (voir l'équation 4.79). La méthode de Chapman-Enskog appliquée à l'ordre un fournit notamment des expressions des **coefficients de transport** (conductivité thermique, viscosité), qui caractérisent la réponse linéaire du système à une anisotropie.

### Retour sur l'équation de Boltzmann, intégrale de collision

Le principe de la méthode repose sur l'équation de Boltzmann, qui donne l'évolution de la distribution en probabilité  $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ . On rappelle que cette équation s'écrit<sup>13 14</sup>

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{F} + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{F} = \left( \frac{D\mathcal{F}}{Dt} \right)_{\text{coll}} \right. \quad (4.88)$$

et on peut montrer [27] que l'intégrale collisionnelle prend la forme suivante

$$\left( \frac{D\mathcal{F}}{Dt} \right)_{\text{coll}} = \iint [\mathcal{F}(\mathbf{v}') \mathcal{F}(\mathbf{v}'_1) - \mathcal{F}(\mathbf{v}) \mathcal{F}(\mathbf{v}_1)] |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}| \tilde{\sigma}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}', \mathbf{v}'_1) d\Omega d^3 \mathbf{v}_1 \quad (4.89)$$

où pour simplifier, on a omis la dépendance en  $\mathbf{x}$  et en  $t$ , et où  $\tilde{\sigma}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}', \mathbf{v}'_1)$  est la **section efficace différentielle de collision** (voir l'équation 3.50) caractérisant l'efficacité d'une collision pendant laquelle les deux partenaires voient leurs vitesses respectives modifiées de  $(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1)$  en  $(\mathbf{v}', \mathbf{v}'_1)$ .

### Distribution d'équilibre

Une condition suffisante de l'équilibre consiste à écrire la nullité du facteur sous l'intégrale de collision. On peut montrer qu'il s'agit également d'une condition nécessaire [27]. Dans ce cas, la distribution de probabilité prend une valeur  $\mathcal{F}_0$  telle que

$$\ln \mathcal{F}_0(\mathbf{v}'_1) + \ln \mathcal{F}_0(\mathbf{v}'_2) = \ln \mathcal{F}_0(\mathbf{v}_1) + \ln \mathcal{F}_0(\mathbf{v}_2) \quad (4.90)$$

13. La différence avec l'équation (2.10) vient de ce qu'on utilise la variable vitesse au lieu de l'impulsion.

14. Cette approche fait l'hypothèse implicite que les propriétés statistiques d'un grand nombre  $N$  de particules peuvent effectivement être traitées à partir de la seule distribution en probabilité d'une particule unique. Cela suppose que cette distribution ne dépend pas des positions et vitesses des autres particules, ce qu'on peut supposer lorsque le système est suffisamment dilué. Dans le cas contraire, il faut considérer la distribution en probabilité jointe pour les  $N$  particules, notée  $\mathcal{F}_N(\{\mathbf{x}_i\}, \{\mathbf{v}_i\}, t)$ . Cette distribution obéit à l'**équation de Liouville**, qu'on réduit généralement à un système d'équations appelé **hiérarchie BBGKY** [27]

ce qui montre que  $\ln \mathcal{F}_0$  est un **invariant de la collision**. Il peut donc s'exprimer comme combinaison linéaire des seuls invariants que sont la masse, l'impulsion et l'énergie cinétique, et on en déduit la forme Maxwellienne de la distribution d'équilibre  $\mathcal{F}_0$ .

### Temps d'établissement de l'équilibre

Dans un fluide non homogène en mouvement, une particule fluide peut se retrouver au sein d'un milieu dont les propriétés (vitesse moyenne, température) sont différentes. Il se pose alors la question de savoir avec quel temps caractéristique la distribution locale  $\mathcal{F}$  tend vers la distribution de Maxwell du milieu ambiant. Ce **temps de relaxation** dépend de la nature des collisions entre particules, par lesquelles l'équilibre s'établit. On peut montrer [27] que dans un gaz d'hydrogène, constitué de protons, d'électrons et d'atomes neutres, ce temps est dominé par les interactions (Coulombiennes) entre un électron et un proton, qui est de l'ordre de

$$t_c \approx \frac{m_e^2 v_q^3}{8\pi e^4 n_e} \ln \left( \frac{b_{\max}}{b_{\min}} \right) \propto \frac{T^{3/2}}{n_e} \quad (4.91)$$

Dans cette équation,  $v_q$  est la vitesse quadratique moyenne des électrons,  $n_e$  leur densité, et les valeurs  $b_{\min}$  et  $b_{\max}$  du paramètre d'impact  $b$  correspondent respectivement à l'application de la limite des petits angles de déflexion et à l'écrantage de l'ion cible par les électrons environnants. On en déduit que  $b_{\max}$  peut être assimilé à la **longueur de Debye**, dont l'expression générale est

$$L_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k T}{e^2 \left( n_e + \sum_i Z_i^2 n_i \right)}} \quad (4.92)$$

dans un plasma constitué d'électrons (densité  $n_e$ ) et de différents ions (densités  $n_i$ , charges  $Z_i e$ ).

*Exemple :* Dans une atmosphère stellaire, avec  $T = 10^4$  K et  $n_e = 10^{14}$  cm<sup>-3</sup>, on a  $t_c \approx 1$  μs. Comme les temps caractéristiques d'évolution du fluide sont plutôt de l'ordre de  $\sim 10$  s, on voit qu'on peut considérer que la distribution s'ajuste instantanément à la distribution d'équilibre ambiante.

### Moments de l'équation de Boltzmann

Les équations de la dynamique des fluides peuvent être obtenues à partir de l'équation de Boltzmann, en en formant des moments avec des quantités  $Q(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ , selon

$$\int Q(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \left[ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{F} + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{F} \right] d^3 \mathbf{v} = \int Q(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \left( \frac{D\mathcal{F}}{Dt} \right)_{\text{coll}} d^3 \mathbf{v} \quad (4.93)$$

On peut montrer [27] que si  $Q$  est un invariant collisionnel, le membre de droite de cette équation est nul. Si de plus on suppose que  $Q$  n'est pas fonction explicite de la position et que les forces exercées sur les particules sont indépendantes de leurs vitesses, alors on a un théorème de conservation

$$\frac{\partial}{\partial t} (n \langle Q \rangle) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (n \langle Q v_i \rangle) - n \sum_i a_i \left\langle \frac{\partial Q}{\partial v_i} \right\rangle = 0 \quad (4.94)$$

En prenant successivement  $Q = m$ ,  $Q = m v_i$  et  $Q = m v^2/2$ , on montre que ce théorème de conservation aboutit aux équations de la dynamique des fluides [27]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (4.95)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (4.96)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{1}{2} u^2 \right) \right] + \nabla \cdot \left[ \rho \left( h + \frac{1}{2} u^2 \right) - \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{q} \right] = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (4.97)$$

Dans ces équations,  $\rho = mn$  est la masse volumique,  $\mathbf{u}$  est la vitesse moyenne locale,  $\mathbf{f}$  est la force extérieure par unité de volume,  $e$  est l'énergie interne spécifique (c'est-à-dire par unité de masse),  $h$  est l'enthalpie spécifique,  $\boldsymbol{\sigma}$  est le tenseur des contraintes visqueuses, et  $\mathbf{q}$  est le vecteur flux de chaleur. Ces deux dernières quantités font appel à la distribution en probabilité  $\mathcal{F}$ , car elles sont définies par

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2} \rho \langle (\delta \mathbf{u})^2 \delta \mathbf{u} \rangle \quad \sigma_{ij} = -\rho \left[ \langle \delta u_i \delta u_j \rangle - \frac{1}{3} \langle (\delta u)^2 \delta_{ij} \rangle \right] \quad (4.98)$$

où  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$  est la vitesse des particules, soustraite de la vitesse locale du fluide. Des considérations de symétrie montrent qu'à l'équilibre thermodynamique local, c'est-à-dire lorsque  $\mathcal{F}$  prend une forme Maxwellienne,  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$  et  $\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{0}$ . C'est hors équilibre que ces quantités peuvent être non nulles.

### Développement de Chapman-Enskog et coefficients de transport

La méthode de Chapman-Enskog consiste à trouver des approximations successives de la solution  $\mathcal{F}$  de l'équation de Boltzmann (4.88), en partant de  $\mathcal{F}_0$ . On commence par adimensionner cette équation, et on l'écrit formellement comme  $\xi \mathcal{D} \mathcal{F} = J(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ , où  $\mathcal{D}$  est l'opérateur différentiel du membre de gauche, et  $J$  est une fonctionnelle représentant l'intégrale de collision. Les deux arguments de cette fonctionnelle permettent de considérer des intégrales faisant apparaître  $g'h' - gh$ . Lorsque  $\xi \ll 1$ , les collisions dominent, et on peut faire l'hypothèse d'un développement de la forme

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \xi \mathcal{F}_1 + \xi^2 \mathcal{F}_2 + \dots \quad (4.99)$$

qu'on insère dans l'équation de Boltzmann, ce qui donne, aux ordres successifs

$$J(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_0) = 0 \quad (4.100)$$

$$\mathcal{D} \mathcal{F}_0 = J(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_0) + J(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1) \quad (4.101)$$

La première de ces équations donne la forme Maxwellienne, et la seconde donne implicitement le premier terme du développement. Le traitement de celui-ci dépasse largement le cadre de ce cours. Le lecteur intéressé trouvera un traitement détaillé dans [27], §32 et §33, et les références qui y sont données. Un résultat utile à mentionner, cependant, est qu'on tire de cette approximation au premier ordre des expressions pour les grandeurs définies en (4.98), à savoir

$$\mathbf{q} = -K \nabla T \quad \sigma_{ij} = \mu \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{ij} \right] \quad (4.102)$$

où  $K$  et  $\mu$  apparaissent donc respectivement comme étant **la conductivité thermique** et **le coefficient de viscosité dynamique**. La méthode permet notamment de montrer que ces deux coefficients varient avec la température comme  $T^s$ , avec un exposant

$$s = \frac{1}{2} + \frac{2}{\alpha} \quad (4.103)$$

où  $\alpha$  est l'exposant du potentiel d'interaction  $\Phi(r) \propto r^{-\alpha}$ . Dans le cas d'une interaction Coulombienne, on a donc  $s = 5/2$ , ce qui est bien vérifié par l'expérience.

## Réponses aux exercices du chapitre 4

### Exercice 32

Pour démontrer la loi de Kirchhoff, considérons deux enceintes de formes arbitraires à la même température  $T$  percées chacune d'un petit trou en regard, comme indiqué sur la figure 4.1, et accolons ces deux trous l'un à l'autre au travers d'un filtre laissant librement passer le rayonnement dans un petit intervalle de fréquence  $\delta\nu$  autour de  $\nu$ , et complètement opaque dans tout le reste du spectre. Dans cette expérience de pensée, la bande passante  $\delta\nu$  du filtre peut être arbitrairement étroite.

Si à cette fréquence  $\nu$  l'intensité du rayonnement dans l'enceinte (1) était supérieure à celle du rayonnement dans l'enceinte (2), soit  $I_\nu(1) > I_\nu(2)$ , de l'énergie radiative passerait spontanément de (1) vers (2) - i.e.  $F_\nu \neq 0$  - et il serait possible de l'utiliser pour faire tourner un moteur. Ceci serait en contradiction avec le second principe de la thermodynamique, puisqu'alors on pourrait tirer du travail d'un système monotherme. Par conséquent, les intensités spécifiques dans les deux enceintes sont nécessairement égales, quelles que soient leurs formes.

On en déduit la loi de Kirchhoff, qu'on écrit sous la forme  $\lim_{\tau_\nu \rightarrow \infty} I_\nu = B_\nu(T)$  ou plus simplement  $I_\nu = B_\nu(T)$ .

### Exercice 33

Sachant que l'intensité du rayonnement incident sur le corps est  $B_\nu(T)$ , d'après ce qui précède, l'équation du transfert appliquée à un rayon traversant le corps matériel et aboutissant à l'ouverture de l'enceinte,

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu$$

indique que :

$$\text{si } S_\nu > B_\nu(T) \implies \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} > 0 \implies I_\nu > B_\nu(T)$$

$$\text{si } S_\nu < B_\nu(T) \implies \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} < 0 \implies I_\nu < B_\nu(T)$$

mais physiquement la présence d'un corps matériel à la même température  $T$  que l'enceinte ne saurait altérer le rayonnement émergent (les parois de l'enceinte sont elles-même un corps matériel à  $T$ !), de sorte qu'on en déduit que la fonction source est

$$S_\nu = \frac{\epsilon_\nu}{\kappa_\nu} = B_\nu(T)$$

### Exercice 34

Pour simplifier, considérons une enceinte opaque à tout rayonnement de forme parallélépipédique rectangle, de volume  $V = L_x L_y L_z$ , et un photon de fréquence  $\nu$  se propageant selon la direction  $\mathbf{n}$ . L'impulsion du photon et son vecteur d'onde sont respectivement

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c} \mathbf{n} = \frac{h\nu}{c} \mathbf{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}}{\hbar} = \frac{2\pi\nu}{c} \mathbf{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n}$$

et comme on suppose qu'il n'y a pas d'interaction entre les photons, chacun d'eux est représenté par une fonction d'onde plane

$$\psi(\mathbf{r}) \propto e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

avec des conditions aux limites périodiques, qui impliquent à leur tour que

$$k_x L_x = 2\pi n_x \quad k_y L_y = 2\pi n_y \quad k_z L_z = 2\pi n_z$$

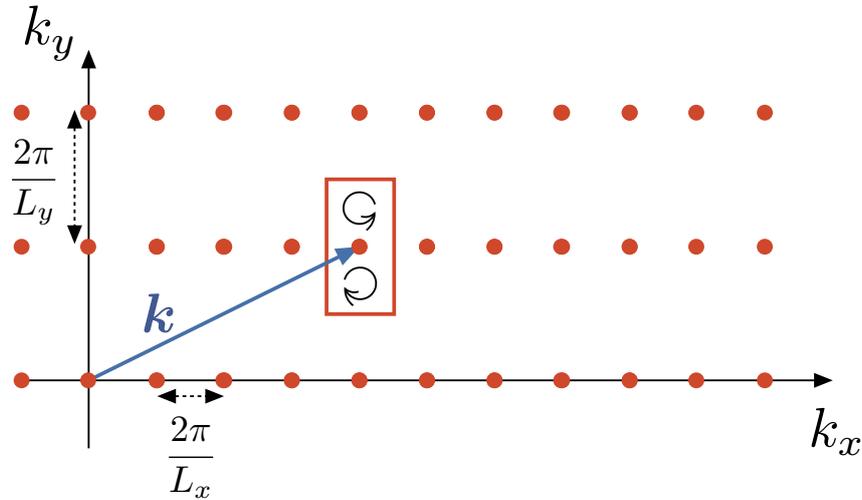


FIGURE 4.14 – **Quantification du vecteur d'onde (ici en deux dimensions).** Les deux spins possibles d'un photon dans un état d'impulsion donné sont représentés par les cercles fléchés.

avec  $n_x, n_y, n_z$  trois entiers relatifs. Le vecteur d'onde prend alors des valeurs discrètes, sur un réseau cubique (la fig. 4.14 représente un tel réseau restreint à deux dimensions pour plus de clarté),

$$\mathbf{k} = 2\pi \left( \frac{n_x}{L_x} \mathbf{u}_x + \frac{n_y}{L_y} \mathbf{u}_y + \frac{n_z}{L_z} \mathbf{u}_z \right).$$

Chaque état occupe donc dans l'espace des vecteurs d'onde un volume

$$\delta^3 \mathbf{k} = \frac{2\pi}{L_x} \times \frac{2\pi}{L_y} \times \frac{2\pi}{L_z} = \frac{8\pi^3}{V}$$

et à chacun de ces états d'impulsion correspondent deux états de spin, donc un volume élémentaire  $d^3 \mathbf{k}$  contient au total  $dN$  états possibles, avec

$$dN = 2 \frac{d^3 \mathbf{k}}{\delta^3 \mathbf{k}} = 2 \times \frac{V}{8\pi^3} \times k^2 dk d\Omega = \frac{V}{4\pi^3} \left( \frac{2\pi}{c} \right)^3 \nu^2 d\nu d\Omega = 2 \frac{V \nu^2}{c^3} d\nu d\Omega$$

où l'on a exprimé l'élément de volume dans l'espace des vecteurs d'onde en coordonnées sphériques, utilisé la propriété d'isotropie, puis converti cet élément de l'espace des phases en se fondant sur la relation entre nombre d'onde et fréquence. La densité d'états par unité de volume, par intervalle de fréquence et par unité d'angle solide est donc

$$\rho(\nu) = \frac{1}{V} \frac{dN}{d\nu d\Omega} = \frac{2\nu^2}{c^3}$$

### Exercice 35

Calculons l'énergie moyenne d'un état de photon d'énergie  $h\nu$ . Chaque état ayant cette énergie peut contenir un nombre  $n$  de photons, sans restriction puisque les photons sont librement créés et détruits. L'énergie de l'état est alors  $E_n = nh\nu$  et, à l'équilibre thermique à la température  $T$ , la probabilité  $P_n$  d'avoir  $n$  photons dans cet état est donné par la probabilité microcanonique

$$P_n = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n}$$

avec  $\beta = 1/kT$  et où

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}$$

est la fonction de partition. L'énergie moyenne est donc

$$\langle E_\nu \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} E_n P_n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n h \nu e^{-n \beta h \nu}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n \beta h \nu}} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n \beta h \nu} \right)$$

La fonction à dériver est, via la formule des séries géométriques de raison inférieure à 1,

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n \beta h \nu} = \frac{1}{1 - e^{-\beta h \nu}}$$

et donc l'énergie moyenne est

$$\langle E_\nu \rangle = \frac{h \nu e^{-\beta h \nu}}{1 - e^{-\beta h \nu}} = \frac{h \nu}{e^{\beta h \nu} - 1}$$

Comme tous les photons ont la même énergie par hypothèse, on en déduit que le nombre d'occupation moyen  $\langle N_\nu \rangle$  est

$$\langle N_\nu \rangle = \frac{\langle E_\nu \rangle}{h \nu} = \frac{1}{e^{\beta h \nu} - 1}$$

ce qui constitue la statistique de Bose 4.7.

### **Exercice 36**

On pose

$$x = \frac{h \nu}{k T}$$

et on écrit alors la loi de Planck sous la forme

$$B_\nu = \frac{2 h \nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h \nu}{k T}\right) - 1} = \frac{2 h}{c^2} \left(\frac{k T}{h}\right)^3 \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{2 k^3 T^3}{c^2 h^2} \frac{x^3}{e^x - 1}$$

de sorte que la condition de maximisation devient

$$\frac{\partial B_\nu}{\partial \nu} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial B_\nu}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{x^3}{e^x - 1} \right] = 0$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{x^3}{e^x - 1} \right] = \frac{3x^2}{e^x - 1} - \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{x^2}{e^x - 1} \left[ 3 - \frac{x e^x}{e^x - 1} \right] = \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} [(3 - x)e^x - 3]$$

La solution cherchée est donc telle que  $e^x = 3/(3-x)$ . C'est nécessairement un maximum, étant donné que  $B_\nu$  est positive et tend vers zéro en  $\nu \rightarrow 0$  et  $\nu \rightarrow +\infty$ . La solution triviale  $x = 0$  n'étant pas acceptable, on retient  $x = x_{\max} \approx 2.82$ , et on a donc

$$\frac{\nu_{\max}}{T} \approx 2.82 \frac{k}{h} = 5.88 \cdot 10^{10} \text{ Hz.K}^{-1}$$

On trouve cette valeur par résolution numérique de l'équation implicite, mais on peut aussi en trouver

une approximation en remarquant que  $x_{\max}$  doit être proche de 3 et en écrivant  $x_{\max} = 3 - \epsilon$ , ce qui donne pour l'équation implicite  $e^3 e^{-\epsilon} \simeq e^3 = 3/\epsilon$  d'où  $\epsilon \simeq 3e^{-3} \simeq 0.15$  et  $x_{\max} \simeq 2.85$ .

### **Exercice 37**

On pose, de la même façon,

$$y = \frac{hc}{\lambda kT}$$

et on écrit

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{y^5}{e^y - 1} \right] = \frac{5y^4}{e^y - 1} - \frac{y^5 e^y}{(e^y - 1)^2} = \frac{y^4}{e^y - 1} \left[ 5 - \frac{ye^y}{e^y - 1} \right]$$

Il faut donc résoudre l'équation implicite  $e^y = 5/(5 - y)$ , qui donne  $y_{\max} \approx 5(1 - e^{-5}) \simeq 4.96$  et la loi de déplacement de Wien s'écrit, pour la fonction  $B_\lambda(T)$

$$\lambda_{\max} T = 2.89 \cdot 10^{-3} \text{ K.m}$$

### **Exercice 38**

Cette fois, on maximise la même fonction, à savoir

$$\nu B_\nu = \lambda B_\lambda = \frac{2k^4 T^4}{c^2 h^3} \frac{x^4}{e^x - 1}$$

On obtient le maximum cherché via l'équation implicite

$$e^x = \frac{4}{4 - x}$$

qui donne  $\nu'_{\max}$  et  $\lambda'_{\max} = c/\nu'_{\max}$  avec

$$\frac{\nu'_{\max}}{T} \approx 3.92 \frac{k}{h} = 8.17 \cdot 10^{10} \text{ Hz.K}^{-1} \quad \text{et} \quad \lambda'_{\max} T = 3.67 \cdot 10^{-3} \text{ K.m}$$

### **Exercice 39**

Le flux total est le flux sortant dans le demi-espace extérieur à la source, calculé au chapitre 2, intégré sur la fréquence, soit

$$F = \int_0^\infty F_\nu^+ d\nu.$$

Comme le rayonnement du corps noir est isotrope, on a  $F_\nu^+ = \pi I_\nu$ , et donc

$$F = \int_0^\infty F_\nu^+ d\nu = \pi \int_0^\infty I_\nu d\nu = \pi \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \pi \frac{2(kT)^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} T^4 = \sigma_S T^4,$$

où l'on a utilisé l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}.$$

Ce résultat constitue donc la loi de Stefan

$$F = \sigma_S T^4$$

où la constante de Stefan vaut  $\sigma_S = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$ .

### **Exercice 40**

On considère une transformation infinitésimale réversible du système constitué par le gaz de photons. On applique le premier principe de la thermodynamique, en utilisant la relation entre densité d'énergie et pression pour un rayonnement isotrope :

$$dU = \delta Q + \delta W = (C_v dT + l dV) - p dV = C_v dT + (l - p) dV = C_v dT + \left(l - \frac{u}{3}\right) dV$$

D'autre part, on a aussi

$$dU = d(uV) = V du + u dV = V \frac{du}{dT} dT + u dV.$$

Par identification, on a

$$C_v = V \frac{du}{dT} \quad \text{et} \quad l = \frac{4u}{3}$$

Appliquons maintenant le second principe (ne pas confondre l'entropie avec la fonction source !)

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{C_v}{T} dT + \frac{l}{T} dV = \frac{V}{T} \frac{du}{dT} dT + \frac{4u}{3T} dV$$

La relation de Maxwell (égalité des dérivées croisées) appliquée à la différentielle exacte  $dS$  donne

$$\left[ \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{4u}{3T} \right) \right]_V = \left[ \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{V}{T} \frac{du}{dT} \right) \right]_T \Rightarrow \frac{4}{3T^2} \left[ T \frac{du}{dT} - u \right] = \frac{1}{T} \frac{du}{dT} \Rightarrow \frac{1}{T} \frac{du}{dT} = \frac{4u}{T^2}$$

Autrement dit

$$\frac{du}{u} = 4 \frac{dT}{T} \Rightarrow u = aT^4$$

Notons que cette relation ne donne pas la valeur de  $a$ . En fait, comme on l'a vu juste avant,

$$u = \frac{4\sigma_S}{c} T^4 \quad \text{soit} \quad a = \frac{4\sigma_S}{c}$$

On trouvera souvent cette notation  $u = aT^4$  dans les ouvrages.

#### **Exercice 41**

On tire de la dérivation précédente l'expression de l'entropie du gaz de photons

$$dS = \frac{V}{T} \frac{du}{dT} dT + \frac{4u}{3T} dV = 4aVT^2 dT + \frac{4aT^3}{3} dV = \frac{4a}{3} (3VT^2 dT + T^3 dV) = \frac{4a}{3} d(VT^3)$$

soit, avec le troisième principe de la thermodynamique ( $S = 0$  à température nulle)

$$S = \frac{4a}{3} VT^3 = \frac{16\sigma_S}{3c} VT^3$$

#### **Exercice 42**

On peut développer  $B_\nu(T)$  au premier ordre aux basses fréquences, ce qui donne la loi de Rayleigh-Jeans, et aux hautes fréquences, ce qui donne la loi de Wien. Dans le premier cas :

$$x = \frac{h\nu}{kT} \ll 1 \implies \frac{x^3}{e^x - 1} \approx x^2$$

donc pour  $\nu \ll (kT)/h$

$$B_\nu \approx \frac{2k^3 T^3}{c^2 h^2} x^2 = \frac{2k^3 T^3}{c^2 h^2} \left( \frac{h\nu}{kT} \right)^2 = \frac{2kT\nu^2}{c^2}$$

de même, en fonction de la longueur d'onde, pour  $\lambda \gg (hc)/(kT)$

$$B_\lambda \approx \frac{2ckT}{\lambda^4}$$

Dans le second cas, soit pour  $x \gg 1$  :

$$\frac{x^3}{e^x - 1} \approx x^3 e^{-x}$$

donc pour  $\nu \gg (kT)/h$

$$B_\nu \approx \frac{2k^3 T^3}{c^2 h^2} x^3 e^{-x} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$$

et de même, pour  $\lambda \ll (hc)/(kT)$

$$B_\lambda \approx \frac{2hc^2}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{hc}{\lambda kT}\right)$$

### **Exercice 43**

Classiquement, on doit considérer que chaque mode (ou état, comme on les a appelés précédemment) du champ porte en moyenne une énergie  $kT$ , de sorte que la densité spectrale et volumique d'énergie est, dans cette approche,

$$u_\nu = \int_{4\pi} \rho(\nu) \times kT d\Omega = \frac{8\pi kT\nu^2}{c^3} = \frac{4\pi}{c} B_{\nu, \text{RJ}}(T)$$

Ce calcul classique de l'énergie du champ amène donc à l'expression de Rayleigh-Jeans à toutes les fréquences. On a alors, en intégrant sur le spectre,

$$u = \int_0^\infty u_\nu d\nu = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \frac{2kT\nu^2}{c^2} d\nu = \infty$$

ce qui constitue la catastrophe ultraviolette.

### **Exercice 44**

L'expression générale de la température de brillance est obtenue à partir de l'équation  $I_\nu = B_\nu(T_b)$

$$T_b(\nu) = \frac{h\nu}{k} \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{2h\nu^3}{c^2 I_\nu}\right)}$$

### **Exercice 45**

L'invariance relativiste du rapport  $I_\nu/\nu^3$  doit être appliquée au changement de référentiel entre celui du CMB et celui de l'observateur, sachant que la fréquence  $\nu_o$  du rayonnement observé est liée à celle  $\nu_e$  du rayonnement émis par la relation de Doppler-Fizeau

$$\frac{\nu_o}{\nu_e} = \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c - v \cos \vartheta}$$

où  $\vartheta$  est l'angle entre le vecteur  $\mathbf{v}$  et la direction  $\mathbf{n}$  d'observation, et  $v = \|\mathbf{v}\|$ . On a donc

$$I_o = B_{\nu_e}(T_{\text{CMB}}) \left(\frac{\nu_o}{\nu_e}\right)^3 = \frac{2h\nu_o^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu_o}{k} \times \frac{\nu_e}{\nu_o T_{\text{CMB}}}\right) - 1}$$

ce qui démontre que l'intensité spécifique  $I_o(\vartheta)$  du CMB observé dans la direction  $\vartheta$  est celle d'un corps noir à une température

$$T(\vartheta) = T_{\text{CMB}} \frac{\nu_o}{\nu_e} = T_{\text{CMB}} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta}$$

#### **Exercice 46**

Comme le satellite WMAP a mesuré l'amplitude crête-à-crête du dipôle et a trouvé  $\Delta T_{\text{dipole}} = 6.692 \text{ mK}$ , ceci permet de déduire la vitesse  $v$  du système solaire par rapport au référentiel du CMB, soit

$$v = \frac{c}{2} \frac{\Delta T}{T_{\text{CMB}}} \simeq 370 \text{ km s}^{-1}$$

Cette vitesse correspond à la superposition des mouvements de la Terre autour du Soleil

$$v_{\text{Terre/Soleil}} \simeq 30 \text{ km s}^{-1},$$

du système solaire autour du centre Galactique

$$v_{\text{Soleil/Galaxie}} \simeq 225 \text{ km s}^{-1},$$

et du mouvement propre de la Galaxie par rapport au groupe local de galaxies.

#### **Exercice 47**

Avec le modèle donné pour l'efficacité d'absorption, l'équation d'équilibre devient

$$\int Q_\nu J_\nu d\nu = \int Q_\nu B_\nu(T_d) d\nu = Q_0 a \int \nu^\beta B_\nu(T_d) d\nu$$

ce qui invite à étudier le comportement de la fonction  $\nu^\beta B_\nu(T_d)$ , à la manière des calculs faits précédemment pour le corps noir. On peut notamment obtenir la fréquence  $\nu_{\text{max},\beta}$  qui la maximise, en posant  $x = h\nu/kT_d$ , et en écrivant que le maximum est atteint lorsque

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^{3+\beta}}{e^x - 1} \right) = 0$$

soit pour  $x$  vérifiant l'équation implicite

$$e^x = f_\beta(x) = \frac{\beta + 3}{\beta + 3 - x}.$$

En posant  $x_{\text{max},\beta} = 3 + \beta - \epsilon$  et en assimilant  $e^{-\epsilon}$  à 1, on obtient  $\epsilon = (3 + \beta) e^{-(3+\beta)}$ , ce qui donne

$$\nu_{\text{max},\beta} = \frac{kT_d}{h} (3 + \beta) \left[ 1 - e^{-(3+\beta)} \right].$$

Qualitativement,  $\nu_{\text{max},\beta}$  augmente lorsque  $\beta$  augmente.

#### **Exercice 48**

L'équation d'équilibre radiatif des grains s'écrit alors

$$\int Q_\nu J_\nu d\nu = 2 \frac{Q_0 a}{c^2} \frac{k^{4+\beta}}{h^{3+\beta}} T_d^{4+\beta} \int_0^\infty \frac{x^{3+\beta}}{e^x - 1} dx$$

Pour calculer le membre de gauche correspondant au chauffage, on note que l'efficacité d'absorption des grains est sensiblement  $Q_\nu \simeq 1$  dans les domaines visible et ultraviolet qui constituent l'essentiel du rayonnement émis. On a donc

$$\int Q_\nu J_\nu d\nu \simeq \int J_\nu d\nu = \frac{1}{4\pi} \iint I_\nu d\Omega d\nu \simeq \frac{\sigma_S T_\star^4}{4\pi^2} \Omega_\star$$

en faisant l'hypothèse que l'étoile émet comme un corps noir à la température  $T_*$ , et en notant  $\Omega_*$  l'angle solide sous lequel elle est vue depuis le grain de poussière, soit  $\Omega_* = \pi(R_*/d)^2$ , et donc<sup>15</sup>

$$\frac{1}{4\pi}\sigma_S T_*^4 \left(\frac{R_*}{d}\right)^2 = 2\frac{Q_0 a}{c^2} \frac{k^{4+\beta}}{h^{3+\beta}} T_d^{4+\beta} \mathcal{H}(\beta) \quad \text{avec} \quad \mathcal{H}(\beta) = \int_0^\infty \frac{x^{3+\beta}}{e^x - 1} dx.$$

En remarquant que

$$\sigma_S = \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} \mathcal{H}(0)$$

on en tire

$$\frac{1}{4} \mathcal{H}(0) T_*^4 \left(\frac{R_*}{d}\right)^2 = Q_0 a \frac{k^\beta}{h^\beta} T_d^{4+\beta} \mathcal{H}(\beta)$$

ce qui donne la température d'équilibre des grains

$$T_d = C_\beta \left[ \frac{T_*^4}{a} \left(\frac{R_*}{d}\right)^2 \right]^{1/(4+\beta)} \quad \text{avec} \quad C_\beta = \left[ \left(\frac{h}{k}\right)^\beta \frac{1}{4Q_0} \frac{\mathcal{H}(0)}{\mathcal{H}(\beta)} \right]^{1/(4+\beta)}$$

### Exercice 49

La luminosité spectrale  $L_\nu$  de l'étoile est la puissance totale émise par intervalle de fréquence  $L_\nu = F_\nu^+ \times 4\pi R_*^2$  et la luminosité bolométrique est l'intégrale de  $L_\nu$  sur la fréquence, soit

$$L_* = \int_0^\infty L_\nu d\nu = 4\pi R_*^2 \int_0^\infty F_\nu^+ d\nu = 4\pi R_*^2 F_* = 4\pi \sigma_S R_*^2 T_*^4$$

où  $F_* = \sigma_S T_*^4$  est le flux à la surface de l'étoile. Le flux  $F$  mesuré à la distance  $D$  est alors

$$F = \frac{L_*}{4\pi D^2} = \sigma_S T_*^4 \left(\frac{R_*}{D}\right)^2$$

La puissance reçue par la planète de rayon  $r$  s'écrit donc, en introduisant l'efficacité d'absorption dans le visible  $Q_v$

$$P_r = Q_v \times F \times \pi r^2 = \frac{Q_v L_* r^2}{4D^2}$$

Notons que plus rigoureusement, il faudrait considérer l'efficacité par intervalle de fréquence  $Q_\nu$ , et écrire

$$P_r = \frac{1}{4} \left(\frac{r}{D}\right)^2 \int Q_\nu L_\nu d\nu.$$

Du fait de la rotation rapide, l'ensemble de la surface est éclairée, et on fait l'hypothèse que la température atteinte par la planète est uniforme. À l'équilibre thermique, la planète peut être assimilée à un corps noir sphérique de rayon  $r$  à une température effective  $T_{\text{eff}}$ , dont la puissance émise est donc

$$P_e = 4\pi r^2 \sigma_S T_{\text{eff}}^4$$

En régime permanent, ces deux puissances sont égales, ce qui permet de déterminer la température effective de la planète

$$P_r = P_e \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_v L_* r^2}{4D^2} = 4\pi r^2 \sigma_S T_{\text{eff}}^4 \quad \Rightarrow \quad T_{\text{eff}} = \left( \frac{Q_v L_*}{16\pi \sigma_S D^2} \right)^{1/4}$$

15. Numériquement, on a

$$\mathcal{H}(0) = \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15} \simeq 6.494 \quad \mathcal{H}(1) = \int_0^\infty \frac{x^4}{e^x - 1} dx \simeq 24.89 \quad \mathcal{H}(2) = \int_0^\infty \frac{x^5}{e^x - 1} dx = \frac{8\pi^6}{63} \simeq 122.08$$

En introduisant l'albédo  $A = 1 - Q_V$ , on a donc bien

$$T_{\text{eff}} = \left[ \frac{(1-A)L_\star}{16\pi\sigma_S D^2} \right]^{1/4} = \left[ \frac{(1-A)F}{4\sigma_S} \right]^{1/4}$$

### **Exercice 50**

La puissance émise ne l'est maintenant que sur une demi-sphère, soit  $P_e = \sigma_S T_{\text{eff}}^2 \times 2\pi r^2$ . Tout se passe donc comme si on passait de  $\sigma_S$  à  $\sigma_S/2$ , ce qui donne

$$T_{\text{eff}} = \left[ \frac{(1-A)L_\star}{8\pi\sigma_S D^2} \right]^{1/4} = 330 \text{ K} \times \left( \frac{D}{1 \text{ UA}} \right)^{-1/2} (1-A)^{1/4} \left( \frac{L_\star}{L_\odot} \right)^{1/4}.$$

### **Exercice 51**

Le bilan de puissance surfacique pour le système complet {surface+atmosphère} devient

$$\frac{(1-A)F}{4} = (1-f)\sigma_S T_0^4 + \sigma_S T_1^4$$

au lieu de

$$\frac{(1-A)F}{4} = \sigma_S T_0^4$$

en l'absence d'atmosphère, relation équivalente à celle écrite plus haut. Pour l'atmosphère, on a aussi un bilan de puissance surfacique

$$f\sigma_S T_0^4 = 2\sigma_S T_1^4.$$

On en déduit la nouvelle relation entre  $F$  et  $T_0$ , à savoir

$$\frac{(1-A)F}{4} = (1-f)\sigma_S T_0^4 + \frac{f}{2}\sigma_S T_0^4 = \left(1 - \frac{f}{2}\right)\sigma_S T_0^4$$

et donc la température effective de la surface planétaire est donnée par

$$T_{\text{eff}} = T_0 = \left[ \frac{(1-A)F}{4\sigma_S \left(1 - \frac{f}{2}\right)} \right]^{1/4}$$

### **Exercice 52**

On peut démontrer ce résultat à partir de considérations très générales sur les symétries (stationnarité, homogénéité et isotropie). Sans hypothèse autre que la présence d'un nombre "suffisamment grand" de particules dans tout élément de volume mésoscopique, on peut écrire *a priori* que la probabilité  $dP(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  de trouver, à l'instant  $t$ , une particule de vitesse  $\mathbf{v}$  à  $d^3\mathbf{v}$  près dans un volume  $d^3\mathbf{x}$  autour du point  $\mathbf{x}$  s'écrit au moyen d'une fonction de distribution  $\mathcal{F}$  comme<sup>16</sup>

$$dP(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v}.$$

L'hypothèse de stationnarité permet de s'affranchir de la dépendance en temps. Quant à l'homogénéité, elle implique que la fonction  $\mathcal{F}$  ne dépend pas non plus de  $\mathbf{r}$ ,

$$dP(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \mathcal{F}(\mathbf{v}) d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v}.$$

16. C'est cette fonction qui obéit à l'équation de Boltzmann (2.10). Dans l'hypothèse de stationnarité, le second membre est nul, et on montre que la forme Gaussienne est la seule solution possible.

En intégrant sur la position, on définit une fonction de distribution  $f(\mathbf{v})$  telle que la probabilité qu'une particule quelconque du fluide ait une vitesse  $\mathbf{v}$  à  $d^3\mathbf{v}$  près soit  $f(\mathbf{v})d^3\mathbf{v}$ , avec

$$f(\mathbf{v}) = \int \mathcal{F}(\mathbf{v})d^3\mathbf{x} = V\mathcal{F}(\mathbf{v}),$$

où  $V$  est le volume total considéré. D'autre part, l'isotropie implique que  $f(\mathbf{v})$  ne doit dépendre que de la norme  $v$  de la vitesse, ou encore de son carré, car toutes les directions sont équivalentes, de sorte qu'il existe une fonction  $g$  telle que

$$f(\mathbf{v}) = g(v^2) = g(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = h(v_x^2)h(v_y^2)h(v_z^2).$$

En effet, les trois directions  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  étant équivalentes, les composantes correspondantes de la vitesse, ainsi que leurs carrés, sont des variables aléatoires indépendantes, ce qui permet la factorisation. De plus, les fonctions de distribution de chacun des carrés sont identiques, là encore parce qu'aucune direction n'est privilégiée. En passant au logarithme, on a

$$\ln f(\mathbf{v}) = \ln g(v^2) = \ln h(v_x^2) + \ln h(v_y^2) + \ln h(v_z^2).$$

Dérivons alors  $\ln g$  par rapport à une composante particulière, par exemple  $v_x$ . On obtient

$$\frac{\partial \ln g}{\partial v_x} = \frac{g'(v^2)}{g(v^2)} \frac{\partial v^2}{\partial v_x} = 2v_x \frac{g'(v^2)}{g(v^2)} = \frac{\partial \ln h(v_x^2)}{\partial v_x} = 2v_x \frac{h'(v_x^2)}{h(v_x^2)}.$$

On en déduit, en faisant la même dérivation par rapport à  $v_y$  et  $v_z$ , que

$$\frac{g'(v^2)}{g(v^2)} = \frac{h'(v_x^2)}{h(v_x^2)} = \frac{h'(v_y^2)}{h(v_y^2)} = \frac{h'(v_z^2)}{h(v_z^2)} = -B,$$

où  $B$  est nécessairement une constante<sup>17</sup>. En intégrant, on a

$$h(v_x^2) = A \exp(-Bv_x^2) \quad \text{et} \quad g(v^2) = A^3 \exp(-Bv^2),$$

ce qui montre que la distribution des vitesses  $f(\mathbf{v})$  est une Gaussienne. La probabilité qu'une particule ait une vitesse  $\mathbf{v}$  à  $d^3\mathbf{v}$  près est alors

$$dP(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v})d^3\mathbf{v} = g(v^2)v^2d\Omega dv = A^3 \exp(-Bv^2)v^2d\Omega dv,$$

où  $v^2d\Omega dv$  est l'élément d'intégration dans l'espace des vitesses en coordonnées sphériques. La normalisation de la probabilité permet de relier  $A$  et  $B$ . En effet<sup>18</sup>,

$$\int dP = \int d\Omega \int_0^\infty A^3 \exp(-Bv^2)v^2 dv = 4\pi A^3 \frac{\sqrt{\pi}}{4B^{3/2}} = 1 \quad \text{donc} \quad A = \sqrt{\frac{B}{\pi}}.$$

D'autre part, le calcul de la vitesse quadratique moyenne<sup>19</sup>  $v_q$  (qui définit la température  $T$  en théorie cinétique des gaz) fournit une seconde équation permettant de déterminer complètement  $A$  et  $B$  en fonction des paramètres du problème,

$$v_q^2 = \overline{v^2} = \int v^2 dP = \int d\Omega \int_0^\infty \left(\frac{B}{\pi}\right)^{3/2} \exp(-Bv^2)v^4 dv = 4\pi \left(\frac{B}{\pi}\right)^{3/2} \frac{6\sqrt{\pi}}{16B^{5/2}} = \frac{3}{2B}$$

17. L'équation trouvée exprime directement que  $\forall x, y \quad h(x) = h(y)$ .

18. On donne les intégrales

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-(x/a)^2} dx = \sqrt{\pi} \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n+1} \quad \text{et} \quad \int_0^\infty x^{2n+1} e^{-(x/a)^2} dx = \frac{n!}{2} a^{2n+2}$$

19. dite encore *rms* pour *root mean square*.

Comme on a par définition de la température cinétique  $T$

$$\frac{1}{2}mv_q^2 = \frac{1}{2}m (\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle) = \frac{3kT}{2}$$

alors

$$B = \frac{m}{2kT} \quad \text{et} \quad A = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}$$

et la distribution des vitesses de Maxwell-Boltzmann s'écrit finalement

$$f(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right).$$

### **Exercice 53**

La vitesse quadratique moyenne est directement liée à la constante  $B$  calculée dans l'exercice précédent. On a donc

$$v_q = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Pour calculer la vitesse la plus probable et la vitesse moyenne, il faut considérer non pas la distribution des vitesses en trois dimensions  $f(\mathbf{v})$ , mais la distribution de probabilité du module des vitesses  $f_v(v)$ . La vitesse la plus probable est alors obtenue en résolvant l'équation

$$\frac{\partial f_v}{\partial v} = 0$$

ce qui donne, pour la distribution de Maxwell,

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Enfin, la vitesse moyenne est calculée via

$$\langle v \rangle = \int v f_v(v) dv$$

ce qui donne, pour la distribution de Maxwell,

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

### **Exercice 54**

On peut donc écrire

$$\frac{P_i}{P_j} = \frac{f(E_i)}{f(E_j)} = F_T(E_i, E_j)$$

Comme on peut choisir librement l'origine des énergies, la fonction  $F_T(E_i, E_j)$  doit en fait dépendre de la différence des énergies, soit

$$\frac{f(E_i)}{f(E_j)} = F_T(E_i - E_j)$$

d'où l'on déduit que  $F_T(0) = 1$ . Considérons alors un cas particulier pour lequel les deux énergies sont proches,  $E_i = E_j + \epsilon$  avec  $\epsilon \ll E_j$ . Un développement de Taylor donne alors

$$\frac{f(E_i)}{f(E_j)} = \frac{f(E_j + \epsilon)}{f(E_j)} = 1 + \epsilon \frac{f'(E_j)}{f(E_j)} = F_T(\epsilon) = 1 + \epsilon F'(0)$$

d'où l'on déduit que

$$\frac{f'}{f} = (\ln f)' = F'(0) = -\beta$$

avec  $\beta$  une constante. On en tire alors, par une intégration triviale,

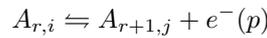
$$f(E) = C \exp(-\beta E)$$

Pour calculer la constante  $\beta$ , on écrit que la distribution de Maxwell des vitesses peut être vue comme un cas particulier de la formule de Boltzmann, appliquée à un continuum en énergie, en l'occurrence l'énergie cinétique  $E = E_e$ . La comparaison avec le calcul de la distribution de Maxwell montre que

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

### Exercice 55

Pour établir cette équation, on considère l'équilibre d'ionisation (voir Fig. 4.11)



où  $A_{r,i}$  désigne l'état  $i$  de l'ion  $A_r$ , et  $A_{r+1,j}$  l'état  $j$  de l'ion  $A_{r+1}$ . On note  $\alpha$  et  $\beta$  les deux états de chaque côté de cette équation d'équilibre, soit  $\alpha = \{A_{r,i}\}$  et  $\beta = \{A_{r+1,j} + e^-(p)\}$ . Dans cette écriture, on fait apparaître que l'énergie  $E_e$  de l'électron libéré est une fonction de son impulsion  $p$ . Dans la limite non relativiste, qu'on suppose ici, on a

$$E_e = \frac{p^2}{2m_e}$$

La loi de Boltzmann donne le rapport des probabilités de trouver le système dans l'un ou l'autre état :

$$\frac{P_\beta}{P_\alpha} = \frac{g_\beta}{g_\alpha} \exp\left(-\frac{E_\beta - E_\alpha}{kT}\right)$$

Or les énergies de ces deux états sont respectivement

$$E_\alpha = \mathcal{E}_{r,i} \quad \text{et} \quad E_\beta = \mathcal{E}_{r+1,j} + \chi_r + \frac{p^2}{2m_e}$$

D'autre part, les multiplicités des deux états sont

$$g_\alpha = g_{r,i} \quad \text{et} \quad g_\beta = g_{r+1,j} g_e(p)$$

Dans cette équation,  $g_e(p)$  représente le poids statistique des états de l'électron libéré. Pour le calculer, on rappelle que cela revient à calculer le nombre d'états accessibles à un électron d'impulsion  $p$  à  $dp$  près. Le calcul classique de la densité d'états d'un gaz constitué de  $N_e$  électrons libres sans interaction dans une boîte de volume  $V$  montre que le nombre d'électrons d'énergie  $E$  à  $dE$  près est<sup>20</sup>

$$N(E)dE = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{E} dE$$

Cette équation peut être modifiée pour faire apparaître  $g_e(p)$ , soit

$$N(E)dE = N_e g_e(p) dp = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{p^2}{2m_e}} \frac{p dp}{m_e}$$

20. On se référera aux ouvrages classiques de physique statistique pour l'établissement de ce résultat.

d'où l'on tire que

$$g_e(p) = \frac{V}{N_e} \frac{p^2}{\pi^2 \hbar^3} = \frac{8\pi p^2 dp}{n_e h^3}$$

avec  $n_e = N_e/V$  la densité des électrons libres. Par conséquent, le rapport des populations des ions est donné par intégration sur les impulsions possibles de l'électron éjecté

$$\frac{n_{r+1,j}}{n_{r,i}} = \int \frac{g_{r+1,j}}{g_{r,i}} \frac{8\pi p^2}{n_e h^3} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_{r+1,j} + \chi_r + \frac{p^2}{2m_e} - \mathcal{E}_{r,i}}{kT}\right) dp$$

ce qui donne

$$\frac{n_{r+1,j}}{n_{r,i}} = \frac{g_{r+1,j}}{g_{r,i}} \frac{2(2\pi m_e kT)^{3/2}}{n_e h^3} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_{r+1,j} + \chi_r - \mathcal{E}_{r,i}}{kT}\right).$$

### Exercice 56

La distribution de Boltzmann donne les populations des différents niveaux de chacun des ions<sup>21</sup>

$$\frac{n_{r,i}}{n_r} = \frac{g_{r,i}}{Z_r(T)} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_{r,i}}{kT}\right) \Rightarrow \frac{n_{r,i}}{g_{r,i}} \exp\left(\frac{\mathcal{E}_{r,i}}{kT}\right) = \frac{n_r}{Z_r(T)}$$

ce qui permet de remplacer les facteurs dépendant du niveau considéré par des facteurs globaux

$$\frac{n_{r+1}}{Z_{r+1}(T)} \times \frac{Z_r(T)}{n_r} = 2 \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{n_e h^3} \exp\left(-\frac{\chi_r}{kT}\right)$$

et d'obtenir le rapport des populations des différents états d'ionisation, c'est-à-dire la loi de Saha,

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} = \frac{2Z_{r+1}(T)}{Z_r(T)} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{n_e h^3} \exp\left(-\frac{\chi_r}{kT}\right)$$

On rappelle que cette équation n'est bien entendu valable qu'à l'équilibre thermodynamique (local).

### Exercice 57

Le premier terme de la somme est  $Z_{0,1}(T) = 2$ , et à la température  $T_\odot = 6400$  K de la photosphère Solaire, le deuxième terme est  $Z_{0,2}(T_\odot) \simeq 10^{-7}$ , complètement négligeable devant le premier.

Pourtant, la somme infinie  $Z_0$  est en toute rigueur divergente, et ce parce que le terme générique  $Z_{0,j}(T)$  ne tend pas vers zéro pour  $j \rightarrow \infty$ , puisque le facteur exponentiel tend vers une limite finie  $\exp(-\chi_0/kT)$  non nulle (bien que très faible) et que le facteur  $2j^2$  tend vers l'infini.

La résolution de ce paradoxe consiste à remarquer qu'aux niveaux les plus élevés correspondent des rayons d'orbitales très grands (en  $j^2$ ) de sorte que l'électron n'est plus associé au proton considéré, mais peut être tout aussi bien associé aux protons voisins. Ceci est lié à l'effet d'écrantage et à la longueur de Debye [45]. Autrement dit, les niveaux supérieurs de l'atome d'hydrogène neutre sont dépeuplés par ionisation. Cet effet est d'autant plus marqué qu'on est à haute température et que l'énergie d'agitation thermique  $kT$  est donc grande devant l'écart entre le niveau excité considéré et le niveau d'ionisation.

21. Notons que le fait que les références en énergie des états d'ionisation soient différentes n'intervient pas. On pourrait tout aussi bien changer  $\mathcal{E}_{r,i} \mapsto \mathcal{E}_{r,i} + a$  sans changer le rapport  $n_{r,i}/n_r$ .

Pour rendre cette idée quantitative, on peut majorer la fraction d'hydrogène neutre sur le niveau  $j = 2$  en fonction de la température, par rapport à la population totale (hydrogène neutre et ionisé).

$$\frac{n_{H,2}}{n_{\text{tot}}} = \frac{n_{H,2}}{n_H} \times \frac{n_H}{n_{\text{tot}}} \leq \frac{n_{H,2}}{n_{H,1} + n_{H,2}} \times \frac{n_H}{n_H + n_{H^+}} = \frac{\frac{n_{H,2}}{n_{H,1}}}{1 + \frac{n_{H,2}}{n_{H,1}}} \times \frac{1}{1 + \frac{n_{H^+}}{n_H}}$$

Le premier facteur tend vers  $4/5$  quand  $T \rightarrow \infty$  du fait de la répartition de Boltzmann, mais le second tend vers 0 car  $n_H \ll n_{H^+}$  lorsque l'énergie d'agitation thermique  $kT$  devient beaucoup plus grande que l'énergie d'ionisation. Numériquement, on trouve que la fraction d'hydrogène sur le niveau  $j = 2$  atteint son maximum pour  $T \sim 10000$  K et retombe ensuite exponentiellement.

### Exercice 58

Avec  $Z_0 = 2$  et  $Z_1 = 1$ , l'équation de Saha donne

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{n_e h^3} \exp\left(-\frac{\chi_0}{kT}\right)$$

qu'on modifie en utilisant d'une part la conservation de la matière  $n = n_0 + n_1$  et la neutralité électrique  $n_e = n_1$ , et en introduisant le degré d'ionisation  $y = n_1/n$

$$\frac{n_1}{n - n_1} = \frac{y}{1 - y} = \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{y n h^3} \exp\left(-\frac{\chi_0}{kT}\right)$$

et donc la formule (4.50) attendue.

$$\frac{y^2}{1 - y} = \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{n h^3} \exp\left(-\frac{\chi_0}{kT}\right)$$

### Exercice 59

La densité du plasma  $n_d$  au moment du découplage (redshift  $z_d$ ) est donc  $n_d = n_b(1 + z_d)^3$ . D'autre part, au moment du découplage, la température du plasma est égale à celle du CMB puisque les photons et la matière sont en équilibre thermique, soit  $T_d = T_0(1 + z_d)$ . On a donc

$$\frac{y_d^2}{1 - y_d} = \frac{(2\pi m_e kT_d)^{3/2}}{n_d h^3} \exp\left(-\frac{\chi_0}{kT_d}\right) = \frac{(2\pi m_e kT_0)^{3/2}}{n_b(1 + z_d)^3 h^3} \exp\left(-\frac{\chi_0}{kT_0(1 + z_d)}\right)$$

Le découplage correspond au moment où le milieu passe d'entièrement ionisé ( $y \simeq 1$ ) à entièrement neutre ( $y \simeq 0$ ). On cherche donc une estimation du redshift auquel a lieu cette transition en posant  $y_d = 1/2$ , ce qui donne, pour l'équation ci-dessus, et comme annoncé,

$$\frac{1}{2} = \frac{(2\pi m_e kT_0)^{3/2}}{n_b(1 + z_d)^3 h^3} \exp\left(-\frac{\chi_0}{kT_0(1 + z_d)}\right)$$

### Exercice 60

L'énergie interne totale du système, son enthalpie totale, et son entropie, écrites en fonction de celles du rayonnement, s'écrivent

$$U = aT^4V \left(1 + \frac{1}{2\alpha}\right)$$

$$H = \frac{4}{3}aT^4V \left(1 + \frac{5}{8\alpha}\right)$$

$$S = \frac{4}{3}aT^3V \left[ 1 + \frac{1}{4\alpha} \ln(T^{3/2}V) \right] + S_0$$

### Exercice 61

En fonction des capacités calorifiques du rayonnement, on a

$$C_v = 4aT^3V \left( 1 + \frac{1}{8\alpha} \right)$$

$$C_p = \frac{20}{3}aT^3V \left( 1 + \frac{1}{8\alpha} + \frac{4}{5}\alpha \right)$$

### Exercice 62

Le développement de Taylor de la fonction source au voisinage de  $\tau_\nu$  donne

$$S_\nu(\tau_\nu + \delta\tau_\nu) = \sum_{n \geq 0} \frac{\delta\tau_\nu^n}{n!} \frac{\partial^n B_\nu}{\partial \tau_\nu^n}(\tau_\nu)$$

qu'on peut insérer dans la solution formelle en géométrie plane de l'équation du transfert, qu'on rappelle ici pour  $\mu = \cos \theta \geq 0$ ,

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(\tau'_\nu) \exp\left(-\frac{\tau'_\nu - \tau_\nu}{\mu}\right) \frac{d\tau'_\nu}{\mu}$$

L'insertion du développement de Taylor donne (avec  $\tau'_\nu = \tau_\nu + \delta\tau_\nu$ )

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = \int_{\tau_\nu}^{\infty} \sum_{n \geq 0} \frac{(\tau'_\nu - \tau_\nu)^n}{n!} \frac{\partial^n B_\nu}{\partial \tau_\nu^n}(\tau_\nu) \exp\left(-\frac{\tau'_\nu - \tau_\nu}{\mu}\right) \frac{d\tau'_\nu}{\mu} = \sum_{n \geq 0} \mu^n \frac{\partial^n B_\nu}{\partial \tau_\nu^n}(\tau_\nu) \int_0^{\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-x} dx$$

en posant

$$x = \frac{\tau'_\nu - \tau_\nu}{\mu}$$

Chaque intégrale restante vaut 1, donc

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = \sum_{n \geq 0} \mu^n \frac{\partial^n B_\nu}{\partial \tau_\nu^n}(\tau_\nu)$$

### Exercice 63

Pour calculer les moments de l'intensité spécifique, on a besoin des intégrales

$$\int_{-1}^1 \mu^{2p} d\mu = \left[ \frac{\mu^{2p+1}}{2p+1} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{2p+1} \quad \int_{-1}^1 \mu^{2p+1} d\mu = \left[ \frac{\mu^{2p+2}}{2p+2} \right]_{-1}^1 = 0$$

On a alors, successivement

$$J_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu d\mu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sum_{n \geq 0} \mu^n \frac{\partial^n B_\nu}{\partial \tau_\nu^n}(\tau_\nu) d\mu = B_\nu(\tau_\nu) + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 B_\nu}{\partial \tau_\nu^2}(\tau_\nu) + \dots$$

puis pour la densité spectrale de flux

$$F_\nu(\tau_\nu) = 2\pi \int_{-1}^1 \mu I_\nu d\mu = 2\pi \int_{-1}^1 \sum_{n \geq 0} \mu^{n+1} \frac{\partial^n B_\nu}{\partial \tau_\nu^n}(\tau_\nu) d\mu = \frac{4\pi}{3} \frac{\partial B_\nu}{\partial \tau_\nu}(\tau_\nu) + \frac{4\pi}{5} \frac{\partial^3 B_\nu}{\partial \tau_\nu^3}(\tau_\nu) + \dots$$

et enfin pour la densité spectrale de pression de radiation

$$p_\nu(\tau_\nu) = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 \mu^2 I_\nu d\mu = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 \sum_{n \geq 0} \mu^{n+2} \frac{\partial^n B_\nu}{\partial \tau_\nu^n}(\tau_\nu) d\mu = \frac{4\pi}{3c} B_\nu(\tau_\nu) + \frac{4\pi}{5c} \frac{\partial^2 B_\nu}{\partial \tau_\nu^2}(\tau_\nu) + \dots$$

#### Exercice 64

On réécrit l'équation sur la densité spectrale de flux en introduisant la variation de la température avec le rayon  $r$  au sein de l'étoile, soit

$$F_\nu \simeq -\frac{4\pi}{3\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} \frac{dT}{dr}$$

où l'on a utilisé  $d\tau_\nu = -\kappa_\nu dr$ . La luminosité bolométrique  $L(r)$  au rayon  $r$  est alors

$$L(r) = 4\pi r^2 \int_0^\infty F_\nu d\nu = -\frac{16\pi^2}{3} r^2 \frac{dT}{dr} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu$$

On introduit alors l'opacité moyenne de Rosseland, ce qui permet d'écrire  $L(r)$  sous la forme

$$L = -\frac{16\pi^2}{3} \frac{1}{\kappa_R} r^2 \frac{dT}{dr} \int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu = -\frac{16\pi^2}{3} \frac{1}{\kappa_R} r^2 \frac{dT}{dr} \frac{d}{dT} \left( \int_0^\infty B_\nu d\nu \right)$$

or l'intégrale de  $B_\nu$  sur la fréquence est déjà connue puisque

$$\int_0^\infty \pi B_\nu d\nu = \sigma_S T^4$$

on a donc

$$\frac{d}{dT} \left( \int_0^\infty B_\nu d\nu \right) = \frac{d}{dT} \left( \frac{\sigma_S T^4}{\pi} \right) = \frac{4\sigma_S T^3}{\pi}$$

d'où la formule annoncée (4.81).

#### Exercice 65

Considérant l'étoile comme une sphère de gaz parfait constitué uniquement d'hydrogène atomique, on écrit l'équation d'équilibre hydrostatique en ordre de grandeur

$$\frac{P_\star}{R_\star} \sim G \frac{M_\star \rho_\star}{R_\star^2} \sim G \frac{M_\star^2}{R_\star^5} \Rightarrow P_\star \sim G \frac{M_\star^2}{R_\star^4}$$

Avec  $P_\star$  la pression au centre de l'étoile,  $M_\star$  sa masse,  $R_\star$  son rayon, et  $\rho_\star$  sa masse volumique. D'autre part, comme on suppose que c'est un gaz parfait d'hydrogène atomique, l'équation d'état donne

$$P_\star R_\star^3 \sim N_\star k T_\star \sim (M_\star / m_H) k T_\star$$

Par suite

$$T_\star \sim \frac{m_H}{k} \frac{P_\star R_\star^3}{M_\star} \sim \frac{G m_H}{k} \frac{M_\star}{R_\star}$$

Cela revient à écrire, pour une particule, l'équipartition entre l'énergie thermique  $kT_\star$  et l'énergie gravitationnelle  $GM_\star m_H / R_\star$ . Également en ordre de grandeur, on a, d'après la relation (4.81),

$$L_\star \sim \frac{\sigma_S}{\kappa_\star} R_\star T_\star^4$$

Or on a vu que le coefficient d'absorption pouvait s'écrire  $\kappa_* = \chi_* \rho_*$ , et donc ceci permet d'écrire un ordre de grandeur de la luminosité de l'étoile

$$L_* \sim \frac{\sigma_S}{\kappa_*} R_* \left( \frac{Gm_H}{k} \frac{M_*}{R_*} \right)^4 \sim \frac{\sigma_S}{\chi_*} \left( \frac{Gm_H}{k} \right)^4 \frac{M_*^4}{\rho_* R_*^3} \sim \frac{\sigma_S}{\chi_*} \left( \frac{Gm_H}{k} \right)^4 M_*^3$$

où l'on a posé  $\kappa_* = \chi_* \rho_*$ . On a donc  $L_* \propto M_*^3$ . Le temps de vie sur la séquence principale est alors donné par le rapport de l'énergie nucléaire disponible à cette luminosité, soit

$$t_* \propto \frac{E_{N_*}}{L_*} \propto \frac{M_*}{L_*} \propto M_*^{-2}$$

## Les raies spectrales

Le rayonnement de corps noir vu au chapitre 4 présente un spectre continu, c'est-à-dire que les variations de  $I_\nu$  avec la fréquence  $\nu$  sont lentes. Il en va de même pour d'autres processus d'émission, qu'on verra dans des chapitres ultérieurs. Il est cependant connu depuis le milieu du XVIII<sup>e</sup> siècle que de fortes variations de  $I_\nu$  sur une très petite plage de fréquences peuvent exister. Ces **raies spectrales**, en émission ou en absorption, liées au caractère discret des niveaux d'énergie dans les systèmes quantiques (atomes, ions et molécules), sont observées dans le visible et en UV dans les spectres des étoiles et des nébuleuses ionisées, mais également dans le domaine radio en direction des nuages interstellaires, ou encore dans le domaine X en direction de régions très chaudes comme le gaz des amas de galaxies.

### 5.1 Coefficients d'Einstein

On va voir ici que les probabilités de transition d'un niveau d'énergie discret à un autre sont gouvernées par des coefficients, appelés **coefficients d'Einstein**, qu'on peut relier les uns aux autres par des relations simples.

#### 5.1.1 Absorption, émission spontanée, émission stimulée

Considérons, pour simplifier, un système à deux niveaux infiniment fins  $u$  (pour *upper*) et  $l$  (pour *lower*) d'énergies respectives  $E_u$  et  $E_l$ , avec donc  $E_u > E_l$ . On note  $g_u$  et  $g_l$  les poids statistiques de ces niveaux,  $n_u$  et  $n_l$  leurs populations, c'est-à-dire le nombre de particules par unité de volume dans chacun des deux niveaux possibles. La transition d'un niveau à l'autre<sup>1</sup> se fait via **l'émission** (dans le cas  $u \rightarrow l$ ) ou **l'absorption** (dans le cas  $l \rightarrow u$ ) d'un photon de fréquence

$$\nu_{ul} = \frac{E_u - E_l}{h}. \quad (5.1)$$

La loi de Kirchhoff  $\epsilon_\nu = \kappa_\nu B_\nu(T)$  suggère que les processus d'émission ( $\epsilon_\nu$ ) et d'absorption ( $\kappa_\nu$ ) sont reliés à l'échelle microscopique. Einstein a découvert cette relation en identifiant trois processus par lesquels un système atomique et un champ de rayonnement peuvent être couplés : **l'absorption, l'émission spontanée, et l'émission stimulée (ou induite).**

#### Émission spontanée

Ce processus a lieu lorsqu'un atome sur le niveau  $u$  descend spontanément sur le niveau  $l$ , en émettant un photon de fréquence  $\nu_{ul}$ . Ce processus a lieu indépendamment de la présence ou non d'un

1. On ignore ici les **transitions collisionnelles** discutées dans un chapitre ultérieur.

champ de rayonnement, et est caractérisé par le coefficient  $A_{ul}$ , dit **coefficient d'Einstein d'émission spontanée**, défini comme étant la **probabilité par unité de temps qu'un atome sur le niveau  $u$  subisse une transition d'émission spontanée**. Le coefficient  $A_{ul}$  est donc exprimé en  $s^{-1}$ .

### Absorption

Ce processus a lieu lorsqu'un atome sur le niveau  $l$  absorbe un photon de fréquence  $\nu_{ul}$ , de sorte que l'énergie  $h\nu_{ul}$  lui permette de passer sur le niveau supérieur  $u$ . Ce processus nécessite évidemment la présence d'un champ de rayonnement à  $\nu_{ul}$ , et est caractérisé par un coefficient  $B_{lu}$ , dit **coefficient d'Einstein d'absorption**. La définition de ce coefficient en termes de probabilité de transition par unité de temps fait intervenir le champ de rayonnement via son intensité moyenne<sup>2</sup>

$$J_{\nu_{ul}} = \frac{1}{4\pi} \int I_{\nu_{ul}} d\Omega. \quad (5.2)$$

La manière la plus simple de procéder à cette définition est d'écrire que **la probabilité par unité de temps qu'un atome sur le niveau  $l$  absorbe un photon est  $B_{lu}J_{\nu_{ul}}$** , donc proportionnelle au nombre de photons de fréquence  $\nu_{ul}$ .

### Émission stimulée

Comme nous allons le voir, Einstein a été amené à supposer qu'il existait un troisième processus en jeu, l'émission stimulée (appelée aussi émission induite), par le biais duquel un atome sur le niveau  $u$  descend sur le niveau  $l$  en émettant un photon de fréquence  $\nu_{ul}$ , comme pour l'émission spontanée, mais dont la probabilité est cette fois proportionnelle au champ de rayonnement. Ce processus est donc caractérisé par un coefficient  $B_{ul}$ , dit **coefficient d'Einstein d'émission stimulée**, tel que **la probabilité par unité de temps qu'un atome sur le niveau  $u$  subisse un processus d'émission stimulée est  $B_{ul}J_{\nu_{ul}}$** . Notons que le photon émis est en tous points identique à celui qui a stimulé la transition.

## 5.1.2 Relations d'Einstein

Les coefficients d'Einstein ainsi définis décrivent des processus élémentaires au niveau quantique. Ils ne préjugent en rien de l'état statistique macroscopique d'un système contenant un grand nombre de particules. Il est donc possible de faire une hypothèse sur cet état macroscopique et d'en tirer des relations entre les coefficients qui seront valables en toutes circonstances. On se place donc dans le cas particulier de l'équilibre thermodynamique d'un grand nombre de systèmes quantiques identiques à celui utilisé plus haut pour définir les coefficients d'Einstein, et on montre alors que les coefficients d'Einstein sont reliés entre eux par les **relations d'Einstein**

$$g_l B_{lu} = g_u B_{ul} \quad \frac{A_{ul}}{B_{ul}} = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} \quad (5.3)$$

Ces relations lient les coefficients d'Einstein entre eux et ne font aucune référence à la température  $T$ , contrairement à la loi de Kirchhoff. Ce sont des relations valables même en dehors de l'équilibre thermodynamique qui nous a servi à les établir. On peut les voir comme des extensions de la loi de Kirchhoff aux cas où l'équilibre thermodynamique n'est pas réalisé. Elles traduisent des **relations d'équilibre détaillé entre processus microscopiques**. Remarquons aussi qu'il suffit de connaître un seul des coefficients d'Einstein pour déterminer les deux autres. Des tables spectroscopiques<sup>3</sup> donnent les valeurs de  $A_{ul}$ ,

2. La transition atomique ne dépend bien entendu pas de la direction d'où vient le photon...

3. Par exemple LAMDA : <http://home.strw.leidenuniv.nl/~moldata/>. À titre d'exemple, quelques lignes du fichier correspondant aux transitions rotationnelles de l'espèce  $^{12}\text{C}^{16}\text{O}$  sont reproduites sur la Fig. 5.1.

```

!MOLECULE!
CO!
!MOLECULAR WEIGHT!
28.0!
!NUMBER OF ENERGY LEVELS!
41!
!LEVEL + ENERGIES (cm^-1) + WEIGHT + J!
  1      0.000000000!   1.0!   0!
  2      3.845033413!   3.0!   1!
  3     11.534919938!   5.0!   2!
  4     23.069512649!   7.0!   3!
  5     38.448164669!   9.0!   4!
  6     57.670329083!  11.0!   5!
[.....]!
!NUMBER OF RADIATIVE TRANSITIONS!
40!
!TRANS + UP + LOW + EINSTEINA (s^-1) + FREQ (GHz) + E_u (K) !
  1      2      1      7.203e-08      115.2712018      5.53!
  2      3      2      6.910e-07      230.5380000      16.60!
  3      4      3      2.497e-06      345.7959899      33.19!
  4      5      4      6.126e-06      461.0407682      55.32!
  5      6      5      1.221e-05      576.2679305      82.97!
  6      7      6      2.137e-05      691.4730763     116.16!
  7      8      7      3.422e-05      806.6518060     154.87

```

FIGURE 5.1 – **Extrait d'un fichier de LAMDA.** Ce fichier (ici pour les transitions rotationnelles de  $^{12}\text{C}^{16}\text{O}$ ) donne notamment les niveaux d'énergie et les coefficients d'Einstein  $A_{ul}$ .

des poids statistiques et des énergies des niveaux impliqués dans de nombreuses transitions.

**Exercice 66 :** Établir les relations d'Einstein (5.3).

*Exemple :* Pour donner un ordre de grandeur, on a  $A_{ul} \sim 10^8 \text{ s}^{-1}$  pour des raies dites **permises**. Pour les transitions dites **interdites**, ces valeurs sont beaucoup plus faibles (on verra l'exemple de la raie HI à 21 cm, pour laquelle  $A_{ul} = 2.85 \cdot 10^{-15} \text{ s}^{-1}$ ).

### 5.1.3 Remarques

**Nécessité de l'émission stimulée**

Si l'on néglige l'émission stimulée tout en se plaçant dans l'hypothèse d'équilibre thermodynamique, on retrouve la loi de Wien pour l'intensité moyenne à la fréquence de transition, au lieu de la loi de Planck, ce qu'Einstein savait incorrect.

**Exercice 67 :** Démontrer cette affirmation. Interpréter ce résultat en comparant les taux d'émission stimulée et d'absorption dans cette limite.

### Prise en compte du profil de la raie

Si les niveaux d'énergie sont discrets, il n'en sont pas pour autant infiniment étroits, de sorte que le rayonnement associé aux transitions  $u \rightarrow l$  et  $l \rightarrow u$  a une certaine distribution en fréquence, qu'on caractérise par un **profil de raie**  $\phi(\nu)$  normalisé, soit

$$\int_0^\infty \phi(\nu) d\nu = 1. \quad (5.4)$$

Le profil  $\phi$  a donc la dimension de l'inverse d'une fréquence, et sa valeur n'est sensiblement différente de zéro que sur une petite plage de fréquences  $\Delta\nu$  autour de  $\nu_{ul}$ . Les définitions des coefficients d'Einstein doivent en toute rigueur faire apparaître ce profil, puisqu'il représente l'efficacité relative de chaque fréquence (à l'intérieur de la raie) à participer aux processus d'absorption et d'émission stimulée. On définit alors  $B_{lu}$  et  $B_{ul}$  en écrivant les probabilités de transitions par unité de temps comme

$$B_{lu}\bar{J} = B_{lu} \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu) d\nu \quad \text{et} \quad B_{ul}\bar{J} = B_{ul} \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu) d\nu \quad (5.5)$$

**Exercice 68 :** Montrer que cette nouvelle définition ne modifie pas les relations d'Einstein tant que  $B_\nu(T)$  ne varie pas appréciablement sur la plage  $\Delta\nu$ .

### Définition en termes de la densité d'énergie du rayonnement

Il est également possible<sup>4</sup> de définir  $B_{lu}$  et  $B_{ul}$  non pas en termes de l'intensité moyenne, mais de la densité d'énergie du rayonnement. On écrit alors les probabilités d'absorption et d'émission stimulée par unité de temps sous la forme

$$B_{lu}\bar{u} = B_{lu} \int_0^\infty u_\nu \phi(\nu) d\nu \quad \text{et} \quad B_{ul}\bar{u} = B_{ul} \int_0^\infty u_\nu \phi(\nu) d\nu \quad (5.6)$$

**Exercice 69 :** Déterminer les relations d'Einstein avec les coefficients ainsi définis.

## 5.2 Emissivité, coefficient d'absorption, fonction source

### 5.2.1 Lien avec les coefficients d'Einstein

La variation de la population du niveau inférieur est donnée par la combinaison des processus d'absorption, d'émission induite et d'émission spontanée

$$\frac{dn_l}{dt} = A_{ul}n_u + B_{ul}n_u\bar{J} - B_{lu}n_l\bar{J} \quad (5.7)$$

On a obtenu les relations d'Einstein en commençant par écrire que le membre de droite était nul à l'équilibre, mais on peut maintenant les utiliser dans le cas général exprimé par cette équation bilan pour la matière, pour établir un lien entre les coefficients d'Einstein, l'émissivité  $\epsilon_\nu$  et le coefficient d'absorption  $\kappa_\nu$ . On montre en effet que

$$\epsilon_\nu = A_{ul}n_u \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu) \quad (5.8)$$

$$\kappa_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu) (B_{lu}n_l - B_{ul}n_u) \quad (5.9)$$

4. C'est ce que font de nombreux ouvrages, il faut donc être conscient de cette différence.

**Exercice 70 :** Démontrer les relations (5.8) et (5.9). On se placera dans une hypothèse d'isotropie locale du rayonnement, et on reliera les variations de la population  $n_l$  aux variations de la population des photons, associées à chacun des trois processus élémentaires.

*Note :* Il convient de remarquer qu'on a fait une hypothèse implicite dans le calcul, à savoir que le profil d'émission (apparaissant avec  $A_{ul}$ ) est le même que le profil d'absorption (apparaissant avec  $B_{ul}$  et  $B_{lu}$ ), ce qui n'est pas toujours le cas, notamment s'il y a un changement de fréquence entre les processus d'absorption et d'émission (exemple de la **fluorescence**). Dans le cas le plus général, on aura un profil  $\psi$  pour l'émission spontanée,  $\phi$  pour l'absorption, et  $\chi$  pour l'émission stimulée, auquel cas

$$\epsilon_\nu = A_{ul}n_u \frac{h\nu}{4\pi} \psi(\nu) \quad \text{et} \quad \kappa_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} [B_{lu}n_l \phi(\nu) - B_{ul}n_u \chi(\nu)]. \quad (5.10)$$

### 5.2.2 Fonction source

À partir des expressions (5.8) et (5.9), on montre alors que la fonction source dans la raie s'écrit

$$S_\nu = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu_{ul}}{kT_x}\right) - 1} = B_{\nu_{ul}}(T_x). \quad (5.11)$$

**Exercice 71 :** Démontrer la relation (5.11).

En supposant donc que les profils en émission et en absorption sont identiques, la fonction source est constante sur le profil de la raie<sup>5</sup>. Elle ne dépend pas de la fréquence exacte  $\nu$ , mais uniquement des coefficients d'Einstein de la transition et de la **température d'excitation**  $T_x$ , dont on rappelle qu'elle est la température pour laquelle les populations  $n_u$  et  $n_l$  vérifient la statistique de Boltzmann. On rappelle également que, dans des milieux non thermalisés,  $T_x$  n'a pas de raison d'être identique à la température cinétique  $T$ , qu'il peut y avoir des températures d'excitations différentes pour différentes raies, et qu'elles peuvent varier d'un point à l'autre. Néanmoins, pour une raie unique à une position donnée, il est toujours possible de définir  $T_x$  via

$$\frac{n_u}{n_l} = \frac{g_u}{g_l} \exp\left(-\frac{h\nu_{ul}}{kT_x}\right). \quad (5.13)$$

### 5.2.3 Coefficient d'absorption dans la raie

En revanche, l'émissivité monochromatique  $\epsilon_\nu$  et le coefficient d'absorption monochromatique  $\kappa_\nu$  dépendent eux de la fréquence exacte  $\nu$ . On montre en effet qu'on a, pour ce dernier

$$\kappa_\nu = \frac{c^2\nu}{8\pi\nu_{ul}^3} A_{ul}n_l \frac{g_u}{g_l} \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu_{ul}}{kT_x}\right)\right] \phi(\nu). \quad (5.14)$$

5. Dans le cas général de profils différents pour les différents processus, on a

$$S_\nu = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} \frac{\frac{\psi}{\phi}}{\exp\left(\frac{h\nu_{ul}}{kT_x}\right) - \frac{\chi}{\phi}} \quad (5.12)$$

qui peut dépendre fortement de la fréquence via les profils  $\phi$ ,  $\psi$  et  $\chi$ .

## Exercice 72 : Démontrer la relation (5.14).

### 5.2.4 Remarques

#### Approximation de $\kappa_\nu$

Remarquons que dans le cas de raies assez fines,  $\phi$  n'est sensiblement différent de zéro qu'au voisinage de  $\nu_{ul}$ , de sorte qu'on a

$$\kappa_\nu \simeq \frac{c^2}{8\pi\nu^2} A_{ul} n_l \frac{g_u}{g_l} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT_x}\right) \right] \phi(\nu) \simeq \frac{c^2}{8\pi\nu_{ul}^2} A_{ul} n_l \frac{g_u}{g_l} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h\nu_{ul}}{kT_x}\right) \right] \phi(\nu) \quad (5.15)$$

Cette hypothèse est faite implicitement dans de nombreux ouvrages.

#### Effet MASER

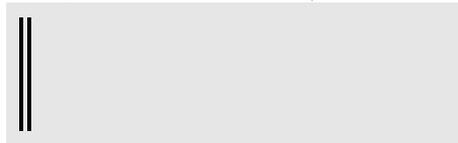
Le coefficient d'absorption contient un terme négatif issu de l'émission stimulée. Ce terme est généralement petit dans l'UV et le visible (dans les atmosphères stellaires, par exemple, on a  $T_x \sim 10^4$  K), mais il peut devenir important à basse fréquence. En particulier, la température d'excitation peut devenir négative dans certaines conditions pour lesquelles on observe une **inversion de population**, soit  $n_u > n_l$ <sup>6</sup>. Cela peut arriver s'il existe un troisième niveau, d'énergie plus élevée que les deux autres, facilement peuplé (on parle d'un **phénomène de pompage**) par différents mécanismes (collisions, rayonnement) et qui se désexcite plus vite sur le niveau  $u$  que sur le niveau  $l$ . Cet effet est observable dans de nombreuses sources radio, et est connu sous le nom d'**effet maser** (pour *Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation*). L'effet net est que le coefficient d'absorption  $\kappa_\nu$  devient négatif car le terme lié à l'émission induite devient plus grand que celui lié à l'absorption. Ceci traduit une amplification, parfois très forte, du signal. On observe cet effet notamment dans des raies de OH (découverte des masers astrophysiques en 1965, [50]), H<sub>2</sub>O et SiO. Les températures de brillance observées sont souvent autour de  $10^9$  K et peuvent atteindre  $10^{12}$  K voire  $10^{14}$  K.

## 5.3 Profil des raies

Nous allons voir dans cette section les processus microscopiques et macroscopiques responsables de l'**élargissement des raies spectrales**, et comment l'étude de ces profils permet d'obtenir des informations sur les conditions physiques dans les milieux concernés.

#### Effet Doppler-Fizeau

L'**effet Doppler-Fizeau** est le changement de fréquence apparente d'un photon émis par une particule en mouvement par rapport à l'observateur. Si l'on note  $\nu_e$  la fréquence émise, mesurée dans un référentiel au repos par rapport à la particule,  $\nu$  la fréquence observée et  $v_z$  la projection de la vitesse de la particule émettrice par rapport à l'observateur sur la ligne de visée ( $v_z > 0$  pour une particule s'éloignant de l'observateur), on a


$$\frac{\nu}{\nu_e} = \sqrt{\frac{c - v_z}{c + v_z}}. \quad (5.16)$$

6. Dans l'hypothèse simplificatrice  $g_u = g_l$ .

Cette formule relativiste peut être simplifiée lorsque  $v_z \ll c$ . On a alors approximativement

$$\frac{\nu}{\nu_e} \simeq 1 - \frac{v_z}{c}. \quad (5.17)$$

### 5.3.1 Élargissement Doppler thermique

Dans un milieu à l'équilibre à la température cinétique  $T$ , une raie intrinsèquement infiniment fine présente un **profil Doppler thermique**, dû à l'agitation des particules émettrices, de forme Gaussienne

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} \exp \left[ - \left( \frac{\nu - \nu_{ul}}{\Delta\nu_D} \right)^2 \right] \quad (5.18)$$

en définissant la **largeur Doppler thermique**

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_{ul}}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (5.19)$$

Le coefficient d'absorption au centre de la raie est alors donné par

$$\kappa_0 = \frac{c^2}{8\pi^{3/2}\nu_{ul}^2\Delta\nu_D} A_{ul}n_l \frac{g_u}{g_l} \left[ 1 - \exp \left( - \frac{h\nu_{ul}}{kT_x} \right) \right] \quad (5.20)$$

Il varie en  $\Delta\nu_D^{-1}$ . Toutes choses étant égales par ailleurs, une raie est donc d'autant plus intense en émission, ou profonde en absorption, que la distribution est étroite (ce qui correspond à un milieu froid). On montre sur la Fig. 5.2 quelques profils Doppler thermiques correspondant à différents élargissements.

#### **Exercice 73 : Démontrer la relation (5.18).**

*Note :* Ces formules ne sont valables que pour une vitesse du fluide nulle par rapport à l'observateur,  $\langle v_z \rangle = 0$ . Dans le cas contraire  $\langle v_z \rangle = v_0$ , le profil est toujours Gaussien, mais il est centré sur la fréquence  $\nu_0$  et présente une largeur  $\Delta\nu'_D$ , avec

$$\nu_0 = \nu_{ul} \sqrt{\frac{c - v_0}{c + v_0}} \quad \Delta\nu'_D = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (5.21)$$

### 5.3.2 Élargissement Doppler turbulent

L'agitation thermique est loin d'être la seule cause d'élargissement Doppler des raies spectrales. En effet, le milieu responsable de la raie peut généralement être décrit par une approximation fluide, et il est maintenant établi que de nombreux objets astrophysiques (le milieu interstellaire en est un exemple parfait) sont le siège de **mouvements turbulents mésoscopiques**. Cela signifie que sur une ligne de visée donnée, chaque élément de longueur  $ds$  possède sa propre vitesse moyenne projetée  $\langle v_z(s) \rangle = v_0(s)$ , et le profil thermique de la raie associé à cet élément est une Gaussienne centrée sur

$$\nu_0(s) = \nu_{ul} \left[ 1 - \frac{v_0(s)}{c} \right] \quad (5.22)$$

Si l'on suppose que la température cinétique du milieu est uniforme, et que la distribution des vitesses turbulentes est Maxwellienne, avec une moyenne nulle,

$$g(v_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}b_t} \exp \left( - \frac{v_0^2}{b_t^2} \right), \quad (5.23)$$

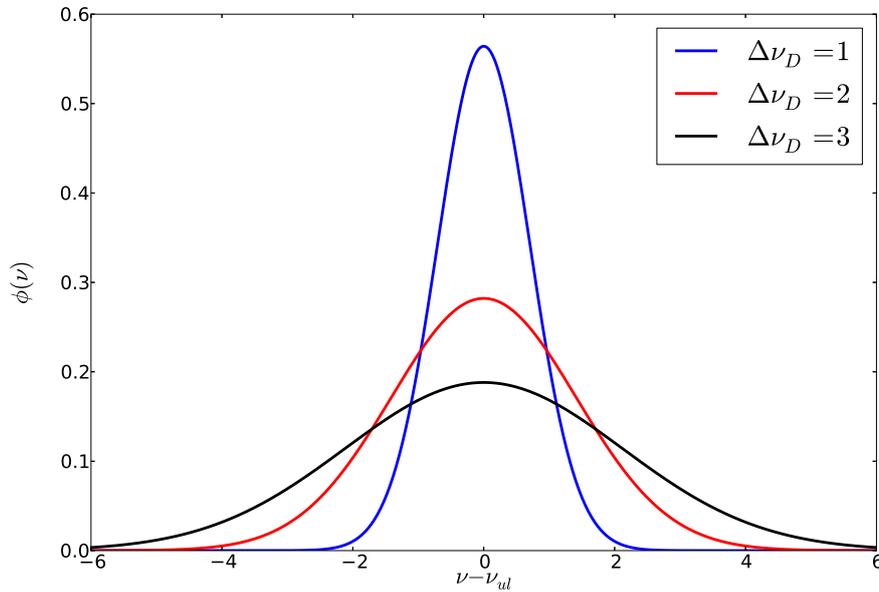


FIGURE 5.2 – Profils de Gauss (Eq. 5.18) pour  $\Delta\nu_D = 1$  (bleu),  $\Delta\nu_D = 2$  (rouge) et  $\Delta\nu_D = 3$  (noir). Les unités de  $\Delta\nu_D$  sont les mêmes que celles de l'axe  $\nu - \nu_{ul}$ .

on peut alors montrer que le profil résultant  $\phi$  est également une Gaussienne, de largeur

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_{ul}}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m} + b_t^2} \quad (5.24)$$

**Exercice 74 :** Montrer que si  $T$  est uniforme, le profil  $\phi$  est la convolution du profil thermique  $\phi_T$  et d'une distribution en fréquence  $f$  associée à la distribution des vitesses turbulentes.

Cette formule permet, via la comparaison des largeurs de raies correspondant à différentes espèces sur une même ligne de visée, de déterminer si l'élargissement est dominé par l'agitation thermique ou par les mouvements turbulents. En effet, dans le premier cas, on a

$$\frac{\Delta\nu_D}{\nu_{ul}} \propto \frac{1}{\sqrt{m}} \quad (5.25)$$

alors que dans le second cas  $\Delta\nu_D/\nu_{ul}$  est indépendant de la raie. En pratique, on constate qu'on est la plupart du temps dans ce second cas de figure, ce qui montre que l'élargissement turbulent est prépondérant. Notons aussi que les mouvements d'ensemble du gaz provoquent eux aussi un élargissement des raies, comme on le verra plus tard. Notons enfin qu'on parle souvent de la **largeur à mi-hauteur, ou FWHM** pour *Full-Width at Half-Maximum*), et on note que pour la forme Gaussienne, on a la relation

$$\text{FWHM} = 2\sqrt{\ln 2}\Delta\nu_D \simeq 1.66\Delta\nu_D = \frac{\nu_{ul}}{c} \sqrt{8 \ln 2} \sigma_{v_z} \quad (5.26)$$

où  $\sigma_{v_z}$  est la dispersion des vitesses à une dimension.

**Exercice 75 : Démontrer la relation entre FWHM et la largeur Doppler  $\Delta\nu_D$ .**

### 5.3.3 Élargissement naturel

#### Temps de vie des niveaux

Le **principe d'incertitude d'Heisenberg** indique que la largeur finie d'un niveau excité  $u$  est liée à la durée finie qu'une particule peut passer dans cet état. En notant  $\delta E_u$  la largeur du niveau  $u$  et  $\tau_u$  son **temps de vie**, on a  $\delta E_u \tau_u \simeq \hbar$ . Or le temps de vie est relié aux coefficients d'Einstein, par

$$\tau_u = \frac{1}{\sum_{l < u} A_{ul}}, \quad (5.27)$$

et la décroissance de la population du niveau supérieur est exponentielle

$$n_u(t) = n_u(0)e^{-t/\tau_u}. \quad (5.28)$$

**Exercice 76 : Démontrer la relation (5.27).**

Lorsqu'un champ de rayonnement est présent, ce temps caractéristique diminue<sup>7</sup>

$$\tau_u = \frac{1}{\sum_{l < u} (A_{ul} + B_{ul}J)} < \frac{1}{\sum_{l < u} A_{ul}} \quad (5.29)$$

Notons que ces écritures négligent le fait qu'en réalité, il peut y avoir des particules dans des états d'énergie  $E_{u'}$  supérieure à  $E_u$ , ce qui complique l'analyse car la variation de  $n_u$  dépend des populations de ces niveaux (via l'émission spontanée et l'émission stimulée  $u' \rightarrow u$ ).

Pour les transitions permises,  $A_{ul}$  est très grand (de l'ordre de  $10^8 \text{ s}^{-1}$ ), de sorte que les temps de vie des niveaux supérieurs impliqués dans ces transitions sont très courts, et leur élargissement très important, de l'ordre de 10 MHz. Inversement, pour les transitions interdites, l'élargissement des niveaux supérieurs est très faible. On parle à leur propos de **niveaux métastables**.

#### Profil Lorentzien

Dans une approche classique<sup>8</sup> de l'interaction entre matière et rayonnement, on traite l'électron lié dans l'atome comme un oscillateur harmonique amorti soumis à une force excitatrice associée au champ électrique variable du rayonnement (**modèle de Thomson**). On montre alors que la **section efficace d'interaction** prend la forme

$$\sigma_\omega = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e c} \frac{\gamma \omega^2}{(\omega^2 - \omega_{ul}^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \quad (5.30)$$

où  $\gamma$  est le **coefficient d'amortissement**

$$\gamma = \frac{e^2 \omega^2}{6\pi \epsilon_0 m_e c^3} \quad (5.31)$$

7. L'absorption n'est pas à prendre en compte - au moins aux temps courts - puisqu'elle ne concerne pas les atomes sur le niveau excité.

8. En particulier, on ignore les transitions stimulées.

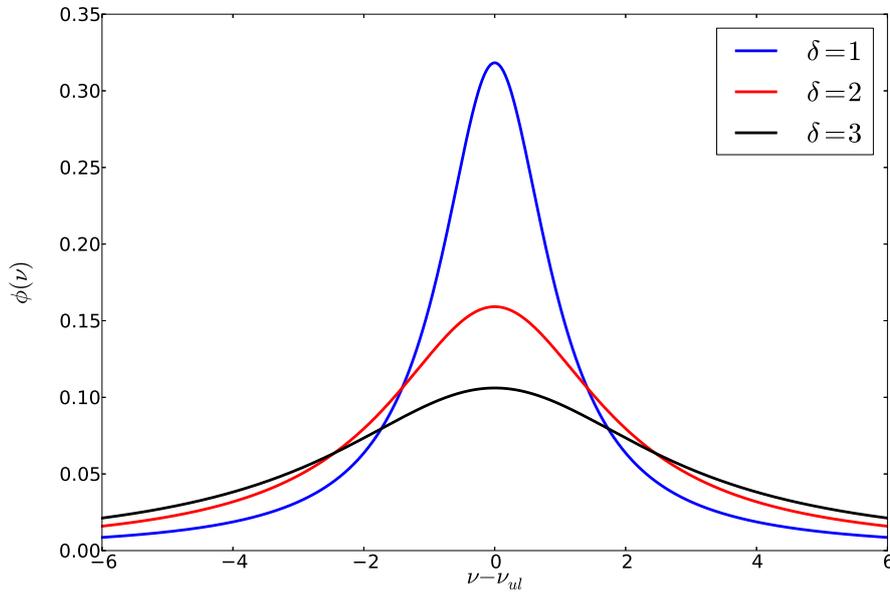


FIGURE 5.3 – Profils de Lorentz pour  $\delta = 1$  (bleu),  $\delta = 2$  (rouge) et  $\delta = 3$  (noir). Les unités de  $\delta$  sont les mêmes que celles de l'axe  $\nu - \nu_{ul}$ .

Dans ces expressions,  $m_e$  est la masse de l'électron et  $\omega_{ul}$  est la pulsation de la transition considérée, autrement dit  $\omega_{ul} = 2\pi\nu_{ul}$ . Lorsqu'on se place au voisinage de la résonance, et en passant en variable fréquence, on montre que le coefficient d'absorption prend la forme suivante (où  $\delta = \gamma/4\pi$ )

$$\kappa_\nu = n_l \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c} \frac{\delta}{\delta^2 + (\nu - \nu_{ul})^2} = n_l \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} \phi(\nu) \quad (5.32)$$

en introduisant le **profil Lorentzien** normalisé (représenté pour différentes valeurs de  $\delta$  sur la Fig. 5.3)

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\pi} \frac{\delta}{\delta^2 + (\nu - \nu_{ul})^2}. \quad (5.33)$$

**Exercice 77 : Démontrer la relation (5.32).**

### Forces d'oscillateur

À partir du coefficient d'absorption, et toujours dans une approche classique négligeant l'émission stimulée, on en déduit une expression classique du coefficient d'Einstein d'absorption

$$B_{lu} = \frac{\pi}{h\nu_{ul}} \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e c} \quad (5.34)$$

Un calcul quantique donne un résultat identique, à un facteur correctif près appelé **force d'oscillateur**  $f_{ul}$ . On a alors

$$B_{lu} = \frac{\pi}{h\nu_{ul}} \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e c} f_{ul} \quad (5.35)$$

Les forces d'oscillateurs sont  $f_{ul} < 1$  et représentent le nombre d'oscillateurs classiques auquel on peut associer la transition considérée [45].

### **Exercice 78 : Démontrer la relation (5.34).**

#### **Profil naturel**

Le profil Lorentzien mis en évidence ici s'écrit

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\pi} \frac{\delta}{\delta^2 + (\nu - \nu_{ul})^2} \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{1}{4\pi\tau_u} = \frac{\gamma_u}{4\pi} \quad (5.36)$$

où  $\gamma_u = 1/\tau_u$  est la constante d'amortissement du niveau supérieur. Ce profil est donc lié au temps de vie fini du niveau supérieur de la transition, et très différent du profil Gaussien lié à l'effet Doppler : il décroît rapidement au centre de la raie, mais a des ailes beaucoup plus importantes, en  $(\nu - \nu_{ul})^{-2}$ . Sa largeur à mi-hauteur est  $2\delta$ , et il tend vers une distribution de Dirac lorsque  $\delta \rightarrow 0$ .

Note : Remarquons que le profil Lorentzien en fonction de la pulsation s'écrit

$$\phi(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{\gamma_u}{2}}{\left(\frac{\gamma_u}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_{ul})^2} \quad (5.37)$$

et que cette écriture est la transformée de Fourier d'une fonction temporelle de la forme  $e^{-\gamma_u t/2}$ . Cela correspond à la décroissance du champ électrique rayonné. La décroissance de l'énergie rayonnée est alors en  $e^{-\gamma_u t}$ , ce qui correspond, sans surprise, à l'évolution de la population du niveau supérieur  $n_u$  décrite au début de cette section.

## **5.3.4 Élargissement par collisions**

### **Origine**

Les interactions et collisions entre particules ont pour effet de provoquer des désexcitations supplémentaires, donc de **réduire la durée de vie du niveau supérieur**  $u$ . Cela implique un **élargissement Lorentzien accru** des raies faisant intervenir ce niveau.

### **Ordre de grandeur**

Pour obtenir un ordre de grandeur de la constante d'amortissement  $\gamma_{\text{coll}}$  liée aux collisions, on la relie à la durée moyenne  $\tau_{\text{coll}}$  entre deux collisions

$$\gamma_{\text{coll}} \sim \frac{1}{\tau_{\text{coll}}} \sim n_p \pi r_p^2 v \quad (5.38)$$

en notant  $n_p$  la densité des particules perturbatrices,  $v$  leur vitesse relative par rapport à l'atome rayonnant, et  $r_p$  le rayon de l'interaction mise en jeu. La vitesse relative fait intervenir la température

$$v \sim \sqrt{kT \left( \frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_a} \right)} \quad (5.39)$$

avec  $m_p$  et  $m_a$  les masses respectives des particules perturbatrices et de l'atome rayonnant. Le potentiel d'interaction mis en jeu dépend de la nature des particules perturbatrices : on aura un **potentiel de Van der Waals** s'il s'agit par exemple d'atomes d'hydrogène neutre créant un potentiel dipolaire, et on aura un **potentiel Coulombien**<sup>9</sup> dans le cas d'électrons ou d'ions.

Il est essentiel de noter que, contrairement à l'élargissement naturel, l'élargissement par collisions dépend donc de la densité des particules, de la température et du taux d'ionisation du milieu. On pourra donc utiliser la largeur des raies pour contraindre ces paramètres.

*Exemple* : L'élargissement par collisions intervient notamment dans les atmosphères planétaires, mais également dans les atmosphères stellaires. Par exemple, on observe des raies très intenses du calcium ionisé, à 393,3 nm dans le spectre des étoiles de type F, G, et K. Ces raies se forment en présence d'hydrogène neutre, donc dans un potentiel de Van der Waals, pour lequel le rayon d'interaction est de l'ordre de la taille de l'atome de calcium  $r_p \sim 5 \cdot 10^{-8}$  cm. En prenant  $T = 5700$  K comme à la surface du Soleil, on trouve  $v \sim 10^6$  cm.s<sup>-1</sup>. Sachant que la densité des atomes d'hydrogène dans la région où se forment ces raies est  $n_p \sim 10^{17}$  cm<sup>-3</sup>, on en déduit  $\gamma_{\text{coll}} \sim 10^9$  s<sup>-1</sup>.

### Transitions permises et interdites

On peut maintenant expliquer pourquoi certaines transitions sont dites **permises** et d'autres **interdites**, en remarquant que dans les conditions terrestres, on a un taux de collisions  $\gamma_{\text{coll}}$  de l'ordre de  $10^9$  s<sup>-1</sup>. En effet, la vitesse caractéristique des molécules de diazote à 300 K est

$$v \sim 0.1 \sqrt{\frac{300}{14}} \simeq 0.46 \text{ km s}^{-1} = 460 \text{ m s}^{-1} \quad (5.40)$$

leur rayon est typiquement  $r_p \sim 10^{-10}$  m et leur densité  $n_p \sim 3 \times 10^{25}$  m<sup>-3</sup>. Comme le taux de désexcitations radiatives est donné par  $A_{ul}$ , il y en aura une fraction non négligeable uniquement si  $A_{ul}$  est au moins de l'ordre de  $\gamma_{\text{coll}}$ . On pourra alors observer ces raies dans ces conditions. Inversement, on n'observera pas de transitions interdites, car elles sont beaucoup moins probables qu'une désexcitation collisionnelle dans les conditions terrestres<sup>10</sup>.

### 5.3.5 Causes multiples d'élargissement

Chacun des processus discutés ci-dessus provoque un élargissement  $\phi_p(\nu)$ , où l'indice  $p$  fait référence au processus considéré. **Lorsque plusieurs causes d'élargissement sont à prendre en compte, le profil résultant est la convolution des profils de chaque processus**<sup>11</sup>.

#### **Exercice 79 : Démontrer cette affirmation.**

On a vu que les fonctions  $\phi_p$  pouvaient prendre la forme d'une Gaussienne ou d'une Lorentzienne. Or la convolution de deux Gaussiennes de largeurs respectives  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  est également une Gaussienne, de largeur  $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ . De même, la convolution de deux Lorentziennes, de paramètres respectifs  $\delta_1$  et  $\delta_2$ , est aussi une Lorentzienne, de paramètre  $\delta = \delta_1 + \delta_2$ , ce qui peut se montrer en passant par la transformée de Fourier (la convolution devenant une multiplication).

9. Corrigé de l'écrantage au delà de la **longueur de Debye**.

10. Plus rigoureusement, ce sont les **règles de sélection** de la mécanique quantique qui déterminent si une transition est permise (de type dipolaire électrique) ou interdite.

11. Il faut supposer pour cela que les processus sont indépendants.

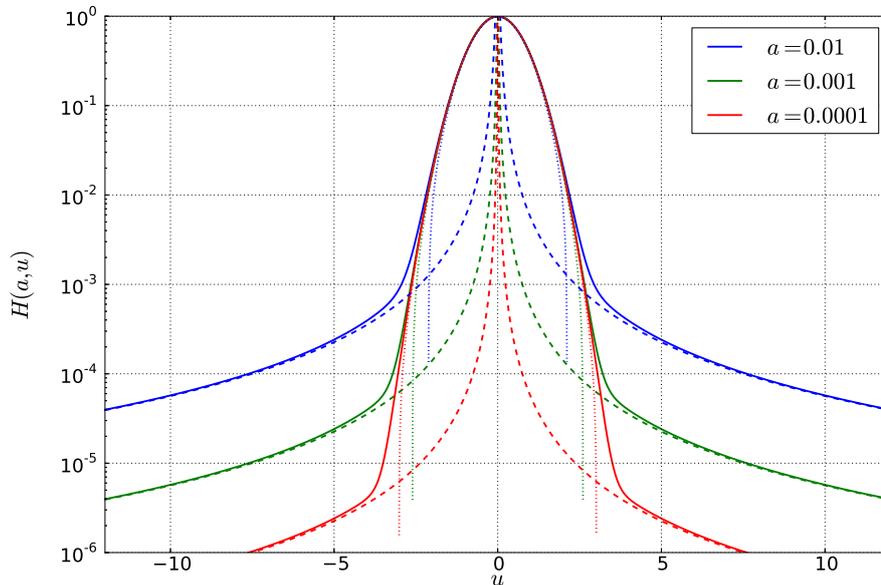


FIGURE 5.4 – Profils de Voigt en traits pleins pour  $a = 10^{-2}$  (bleu),  $a = 10^{-3}$  (vert) et  $a = 10^{-4}$  (rouge). Les courbes en pointillés représentent les approximations Gaussiennes au centre de chaque profil, et les courbes en tirets les approximations Lorentziennes dans les ailes. Noter que l'axe des ordonnées est en échelle logarithmique.

### 5.3.6 Profil de Voigt

#### Expression

On a donc deux types de profils élémentaires : des profils Gaussiens (élargissement Doppler thermique et turbulent) et des profils Lorentziens (élargissement naturel et élargissement par collisions). Si l'on suppose la présence d'une seule composante avec une distribution de vitesse Gaussienne (que celle-ci soit d'origine thermique ou turbulente, ou une combinaison des deux), l'élargissement Gaussien et l'élargissement Lorentzien vont se combiner. Le profil résultant est appelé **profil de Voigt**, et est la convolution d'une Gaussienne et d'une Lorentzienne. Le coefficient d'absorption est alors, en négligeant le facteur lié à l'émission stimulée,

$$\kappa_\nu = n_l \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} f_{ul} \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D} H(a, u) = \kappa_{\nu,0} H(a, u) \quad (5.41)$$

en faisant apparaître la **fonction de Voigt**

$$H(a, u) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{a^2 + (u - y)^2} dy \quad (5.42)$$

où l'on a posé, respectivement,

$$a = \frac{\delta}{\Delta\nu_D} \quad u = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D} \quad y = \frac{\nu'}{\Delta\nu_D} \quad (5.43)$$

**Exercice 80 :** Démontrer la forme (5.42). On pourra commencer par supposer que la fréquence centrale est  $\nu_0 = 0$ .

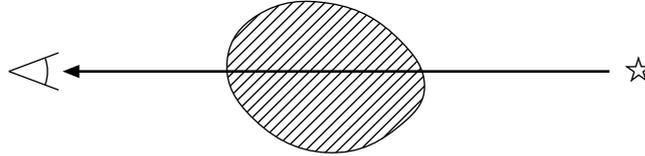


FIGURE 5.5 – **Modèle de la couche absorbante.**

Le profil est donc une fonction de  $u$ , et son allure est dictée par la valeur du paramètre  $a$ , rapport de la largeur naturelle et collisionnelle à la largeur Doppler. Dans la pratique,  $a$  est toujours très petit devant 1 ( $a \approx 10^{-3}$  pour les raies permises, et  $a \ll 1$  pour les raies interdites<sup>12</sup>). La fonction de Voigt est donc la convolution d'une Gaussienne avec une Lorentzienne beaucoup plus piquée.

### Comportements asymptotiques

Le cœur du profil de Voigt est dominé par la partie Gaussienne, et ses ailes par la partie Lorentzienne,

$$H(a, u) \simeq e^{-u^2} \quad \text{pour } u \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad H(a, u) \simeq \frac{a}{\sqrt{\pi}u^2} \quad \text{pour } u \rightarrow \pm\infty \quad (5.44)$$

On représente ces deux limites, respectivement en pointillés et en tirets, sur la Fig. 5.4.

**Exercice 81 :** Démontrer les limites asymptotiques (5.44) du profil de Voigt.

## 5.4 Courbes de croissance

### 5.4.1 Modèle de la couche absorbante

#### Introduction

L'étude des raies d'absorption (profils, intensité) dans les spectres de sources astrophysiques brillantes permet d'obtenir des diagnostics puissants sur les conditions physiques du milieu absorbant (densité de colonne, température, état d'ionisation, degré d'excitation, rapports d'abondances, ...). Nous allons montrer comment l'on s'y prend, dans un cadre extrêmement simplifié, qui est celui d'un milieu homogène purement absorbant dans une raie (c'est-à-dire non émissif et n'absorbant pas le continu), placé en avant-plan d'une source ponctuelle (c'est-à-dire non résolue spatialement) de rayonnement continu (Fig. 5.5). Ce modèle peut s'appliquer notamment aux nuages interstellaires devant les étoiles lointaines, et aux nuages intergalactiques devant les quasars. Il a également été utilisé par le passé pour décrire les atmosphères stellaires, avant le développement de modèles beaucoup plus sophistiqués.

12. Leur largeur naturelle est très faible puisque le temps de vie sur le niveau excité est long, et de plus ces raies se forment dans des milieux très dilués de sorte que l'amortissement par collision est lui aussi très faible.

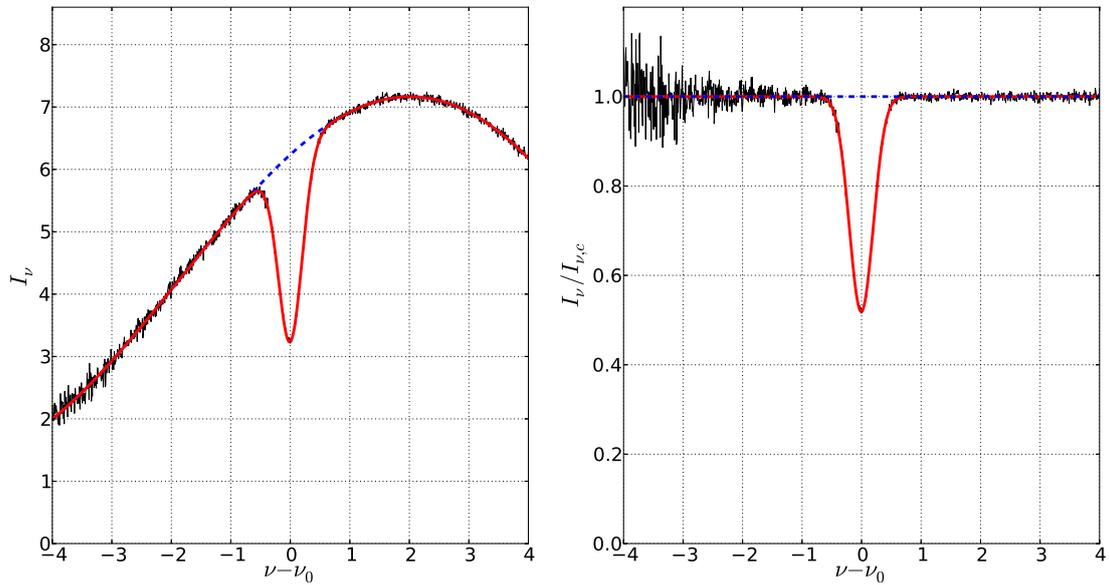


FIGURE 5.6 – Raie d'absorption devant une source de rayonnement continu (à gauche) et spectre normalisé  $I_\nu/I_{\nu,c}$  (à droite). Sur chaque figure, le signal complet (incluant du bruit de mesure) est tracé en traits noirs, le signal débruité en traits rouges, et le continu sous-jacent en tirets bleus. L'axe des fréquences est centré sur la raie, et les unités de  $\nu$  et  $I_\nu$  sont arbitraires.

### Spectre normalisé au continu

Dans le modèle simple considéré ici, la solution de l'équation du transfert est

$$I_\nu = I_{\nu,c} e^{-\tau_\nu} \quad \text{ou} \quad I_\lambda = I_{\lambda,c} e^{-\tau_\lambda} \quad (5.45)$$

suivant qu'on parle en fréquence ou en longueur d'onde, et où  $I_{\nu,c}$  (ou  $I_{\lambda,c}$ ) désigne le continuum, c'est-à-dire l'intensité qu'on observerait en l'absence de nuage absorbant sur la ligne de visée. Au niveau d'une raie,  $\tau_\nu$  (ou  $\tau_\lambda$ ) varie rapidement avec la fréquence : c'est le profil de la raie. Le **spectre normalisé** (indiqué à droite de la Fig. 5.6) est alors

$$\mathcal{I}_\nu = \frac{I_\nu}{I_{\nu,c}} = e^{-\tau_\nu} \quad \text{ou} \quad \mathcal{I}_\lambda = \frac{I_\lambda}{I_{\lambda,c}} = e^{-\tau_\lambda}. \quad (5.46)$$

## 5.4.2 Observation d'une raie

### Pouvoir de résolution

Il est important de réaliser qu'en général, les raies sont trop étroites pour être résolues par les spectroscopes utilisés. La résolution de ceux-ci est caractérisée par le **pouvoir de résolution**



$$\mathcal{R}_\lambda = \frac{\lambda}{\delta\lambda_{\text{inst}}} \quad (5.47)$$

où  $\delta\lambda_{\text{inst}}$  est la largeur à mi-hauteur observée pour une raie qui serait intrinsèquement infiniment

fine. C'est la réponse impulsionnelle de l'instrument (ou "LSF" pour *Line Spread Function*, l'équivalent de ce qu'est la PSF pour des images). On exprime fréquemment cette résolution en termes de vitesse,

$$\delta v = c \frac{\delta \lambda_{\text{inst}}}{\lambda} = \frac{c}{\mathcal{R}_\lambda} \quad (5.48)$$

C'est alors la plus petite séparation entre deux composantes en vitesse qui peuvent être distinguées par le spectroscopie.

*Exemple* : Avec un spectroscopie à réseau, on a  $\mathcal{R}_\lambda = mN$  avec  $m$  l'ordre d'interférence considéré et  $N$  le nombre total de traits (éclairés) du réseau. Pour avoir un ordre de grandeur, prenons un réseau de 2 cm gravé à 500 traits par mm, et blazé dans l'ordre  $m = 2$ . On a alors  $\mathcal{R}_\lambda = 20000$ . En observant une raie jaune  $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ , on a une résolution spectrale  $\delta \lambda_{\text{inst}} = 0.025 \text{ nm}$ , soit environ dix fois meilleure qu'un prisme de même taille. De manière générale, les spectroscopies ont un pouvoir de résolution de l'ordre de  $10^3$  à  $10^6$ .

### Effet de la résolution instrumentale finie

De manière générale, le profil observé des raies est convolué par la réponse instrumentale (supposée Gaussienne pour simplifier). Ainsi, si la raie a un profil Gaussien avec une largeur intrinsèque  $\delta \lambda_0$ , on observera en pratique une raie Gaussienne de largeur

$$\delta \lambda_{\text{obs}} = \sqrt{\delta \lambda_0^2 + \delta \lambda_{\text{inst}}^2} \quad (5.49)$$

Les deux cas de figure (raies résolues et non-résolues) sont présentés sur la Fig. 5.7.

### 5.4.3 Largeur équivalente

#### Définition

La **largeur équivalente** d'une raie d'absorption peut être définie de différentes manières, soit en longueur d'onde, soit en fréquence, à partir de l'intensité spécifique,

$$W_\lambda = \int_0^\infty \frac{I_{\lambda,c} - I_\lambda}{I_{\lambda,c}} d\lambda = \int_0^\infty (1 - \mathcal{I}_\lambda) d\lambda \quad (5.50)$$

$$W_\nu = \int_0^\infty \frac{I_{\nu,c} - I_\nu}{I_{\nu,c}} d\nu = \int_0^\infty (1 - \mathcal{I}_\nu) d\nu, \quad (5.51)$$

mais également à partir de la densité spectrale de flux pour des sources non résolues

$$W_\lambda = \int_0^\infty \frac{F_{\lambda,c} - F_\lambda}{F_{\lambda,c}} d\lambda = \int_0^\infty (1 - \mathcal{F}_\lambda) d\lambda \quad (5.52)$$

$$W_\nu = \int_0^\infty \frac{F_{\nu,c} - F_\nu}{F_{\nu,c}} d\nu = \int_0^\infty (1 - \mathcal{F}_\nu) d\nu. \quad (5.53)$$

Comme on a sous chaque intégrale un rapport d'intensités ou de flux, on a  $\mathcal{F}_\nu = \mathcal{F}_\lambda$  et  $\mathcal{I}_\nu = \mathcal{I}_\lambda$ , de sorte que la relation entre  $W_\nu$  et  $W_\lambda$  est simplement

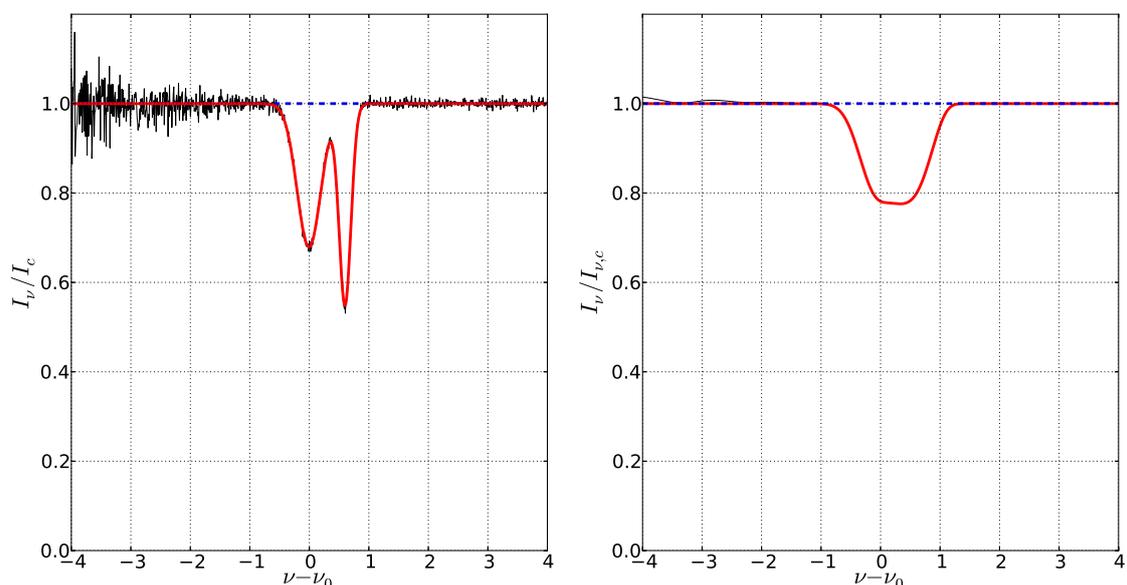


FIGURE 5.7 – **Raies d'absorption résolues (à gauche) et non-résolues (à droite).** Sur chaque figure, le signal complet (incluant du bruit de mesure) est tracé en traits noirs, le signal débruité en traits rouges, et le continu sous-jacent en tirets bleus. Les unités de  $\nu$  sont arbitraires.



$$W_\lambda = \frac{\lambda_0^2}{c} W_\nu. \quad (5.54)$$

D'autre part, l'intégration sur tout l'intervalle  $[0, \infty]$  est évidemment formelle et se limite en pratique à l'étendue de la raie.

### Interprétation

La largeur équivalente  $W_\lambda$ , qui a la dimension d'une longueur d'onde et est typiquement exprimée en  $\text{\AA}$ , correspond à **l'aire de la raie rapportée à l'intensité du continu**. C'est la largeur d'une raie rectangulaire bloquant entièrement le spectre émergent, comme indiqué sur la Fig. 5.8. L'idée sous-jacente est que cette aire est une mesure directe du nombre d'atomes absorbant sur la ligne de visée. Cette idée est correcte dans la limite optiquement mince, mais fautive dès que la raie sature.

### Préservation de la largeur équivalente

Comme la convolution par un profil normalisé préserve l'intégrale<sup>13</sup>, on en déduit que, contrairement au profil, **la largeur équivalente n'est pas modifiée par le spectroscopie, pour autant qu'il n'y ait qu'une raie observée**. C'est donc elle qu'on utilise dans le cas de raies non résolues pour obtenir des informations sur le milieu absorbant.

13. Cela se montre en passant par les transformées de Fourier. Si  $h = g * \phi$  avec  $\phi$  un profil normalisé, on a

$$\int h(x)dx = \hat{h}(0) = \hat{g}(0)\hat{\phi}(0) = \int g(x)dx \times \int \phi(x)dx = \int g(x)dx. \quad (5.55)$$

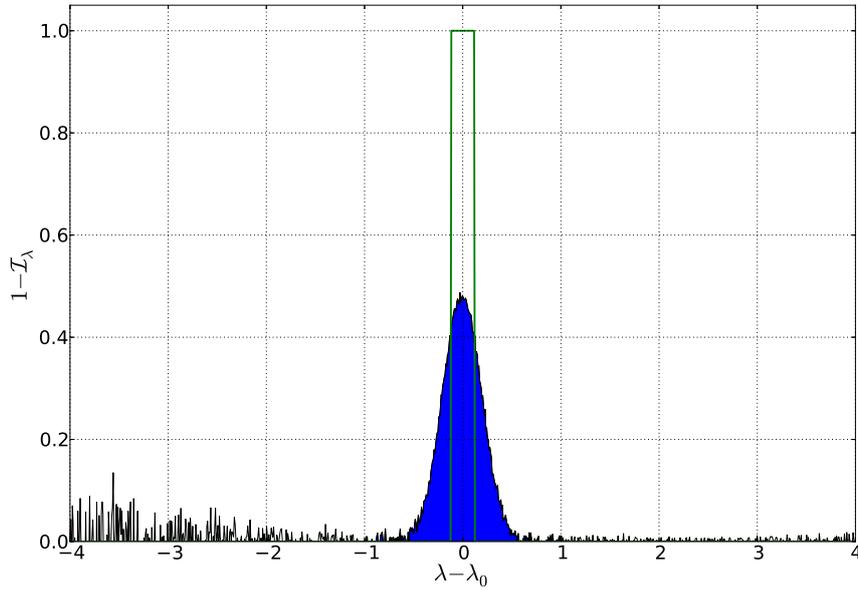


FIGURE 5.8 – **Interprétation de la largeur équivalente.** L'aire sous la raie, indiquée en bleu, est la même que celle du rectangle vert.

#### 5.4.4 Profils d'absorption

Dans le cas d'un profil de Voigt (on suppose qu'il n'y a qu'une seule composante en vitesse dans le spectre observé), l'intensité normalisée au continu est donnée par

$$\mathcal{I}_\nu = e^{-\tau_{\nu,0}H(a,u)} \quad (5.56)$$

où l'épaisseur optique au centre de la raie est

$$\tau_{\nu,0} = \kappa_{\nu,0}L = N_l \frac{e^2}{4\sqrt{\pi}\epsilon_0 m_e c \Delta\nu_D} f_{ul} = 1.5 \cdot 10^{-6} f_{ul} \left( \frac{N_l}{\text{m}^{-2}} \right) \left( \frac{\Delta\nu_D}{1 \text{ Hz}} \right)^{-1} \quad (5.57)$$

en introduisant la densité de colonne  $N_l = n_l L$  de l'espèce responsable de l'absorption (correspondant à la population du niveau inférieur  $l$  de la transition mise en jeu).

La Fig. 5.9 montre les profils de raies d'absorption obtenus pour  $a = 10^{-3}$  et différentes valeurs de l'épaisseur optique au centre de la raie, c'est-à-dire différentes densités de colonne de l'absorbeur, à dispersion de vitesse donnée. Aux faibles épaisseurs optiques, l'élargissement naturel n'est pas perceptible, et le cœur Doppler de la raie domine. Celui-ci sature lorsque  $\tau_{\nu,0}$  augmente, puis, lorsqu'il est très saturé, apparaissent alors de grandes ailes Lorentziennes, qui seront en général résolues. Dans ce cas, leur ajustement fournit alors directement la densité de colonne  $N_l$ .

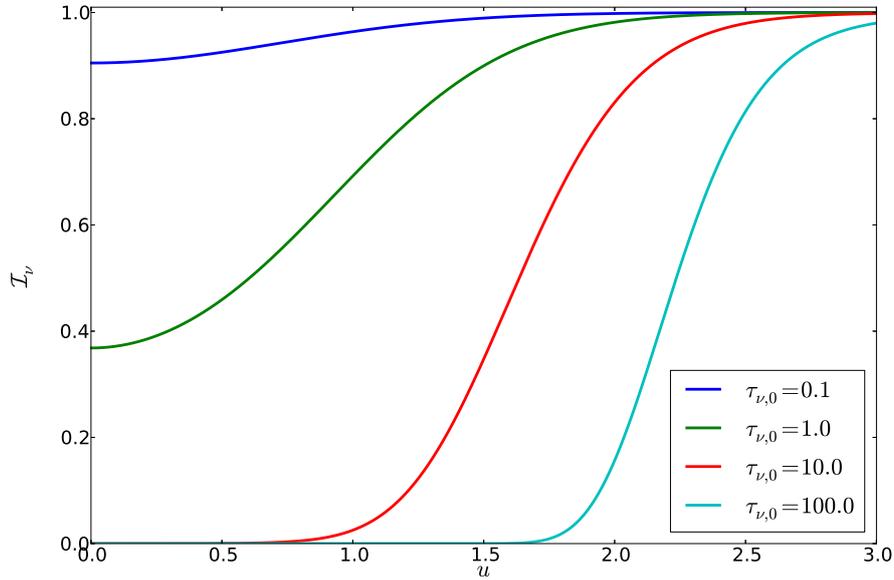


FIGURE 5.9 – Profils de raies en absorption, en fonction de  $u = (\nu - \nu_0)/\Delta\nu_D$ , pour  $a = 10^{-3}$  et différentes valeurs de  $\tau_{\nu,0}$  : 0.1 (bleu), 1 (vert), 10 (rouge) et 100 (cyan). Notons que seule une moitié du profil est représentée, l'autre s'en déduisant par symétrie.

#### Épaisseur optique au centre de la raie

On écrit souvent  $\tau_{\nu,0}$  en faisant intervenir la largeur Doppler en longueur d'onde plutôt qu'en fréquence, ou bien en faisant apparaître la dispersion de vitesse, ce qui donne respectivement

$$\tau_{\nu,0} = N_l \frac{e^2 \lambda_0^2 f_{ul}}{4\sqrt{\pi} \epsilon_0 m_e c^2 \Delta\lambda_D} = 5 \cdot 10^{-15} f_{ul} \left( \frac{N_l}{\text{m}^{-2}} \right) \left( \frac{\lambda_0}{1 \text{ m}} \right)^2 \left( \frac{\Delta\lambda_D}{1 \text{ m}} \right)^{-1} \quad (5.58)$$

$$\tau_{\nu,0} = N_l \frac{e^2 \lambda_0 f_{ul}}{4\sqrt{2\pi} \epsilon_0 m_e c \sigma_v} = 1.1 \cdot 10^{-15} f_{ul} \left( \frac{N_l}{\text{cm}^{-2}} \right) \left( \frac{\lambda_0}{1 \text{ \AA}} \right) \left( \frac{\sigma_v}{1 \text{ km s}^{-1}} \right)^{-1} \quad (5.59)$$

où l'on a défini

$$\Delta\lambda_D = \frac{\lambda_0}{\nu_0} \Delta\nu_D = \frac{\lambda_0^2}{c} \Delta\nu_D \quad \text{et} \quad \sigma_{v_z} = \frac{c}{\sqrt{2}\nu_0} \Delta\nu_D = \frac{\lambda_0}{\sqrt{2}} \Delta\nu_D \quad (5.60)$$

La valeur de l'épaisseur optique  $\tau_{\nu,0}$  au centre de la raie n'est en général pas mesurable directement sur le spectre, sauf si la raie est parfaitement résolue.

#### 5.4.5 Courbes de croissance

Si l'épaisseur optique  $\tau_{\nu,0}$  dépend de la résolution spectrale, la largeur équivalente, elle, est conservée. Pour une transition donnée (donc  $f_{ul}$  et  $\lambda_0$  données), elle dépend à la fois de la densité de colonne  $N_l$  et de la dispersion de vitesse  $\sigma_v$ . Il faudra donc deux valeurs de  $W_\lambda$  pour deux transitions distinctes de la même espèce (par exemple, les deux raies d'un doublet de structure fine) pour obtenir à la fois  $N_l$  et  $\sigma_v$ . Son expression dans le cas d'un profil de Voigt est

$$W_\lambda = \int \left[ 1 - e^{-\tau_{\nu,0} H(a,u)} \right] d\lambda \quad (5.61)$$

Le comportement de  $W_\lambda$  en fonction des différents paramètres, et notamment de la densité de colonne, dépend alors de l'épaisseur optique au centre  $\tau_{\nu,0}$ .

### Cas optiquement mince

On montre que dans le cas **optiquement mince**  $\tau_{\nu,0} \ll 1$ , on a

$$W_\lambda = N_l \frac{e^2 \lambda_0^2 f_{ul}}{4\epsilon_0 m_e c^2} \quad (5.62)$$

Dans ce cas,  $W_\lambda$  ne dépend donc plus que de la densité de colonne, et ce de manière linéaire. C'est une situation très favorable où une seule raie suffit à déterminer la densité de colonne de l'espèce<sup>14</sup>, via

$$N_l = \frac{4\epsilon_0 m_e c^2}{e^2} \frac{W_\lambda}{\lambda_0^2 f_{ul}} = 1.13 \cdot 10^{20} \frac{W_\lambda}{\lambda_0^2 f_{ul}} \quad (5.63)$$

avec  $N_l$  en  $\text{cm}^{-2}$ , et  $W_\lambda$  et  $\lambda_0$  exprimées en  $\text{\AA}$ .

### Cas optiquement épais

On montre que dans le cas **optiquement épais**  $\tau_{\nu,0} \gg 1$ , on a

$$\frac{W_\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{e^2 \delta}{\pi \epsilon_0 m_e c^3} N_l f_{ul} \lambda_0^2}. \quad (5.64)$$

Comme dans le cas optiquement mince,  $W_\lambda$  ne dépend que de la densité de colonne et pas de la largeur Doppler. Elle dépend cependant aussi de l'amortissement  $\delta$ .

**Exercice 82 :** Établir les expressions (5.63) et (5.64).

### Courbe de croissance

La **courbe de croissance** représente l'évolution de la largeur équivalente avec la densité de colonne. Elle a l'allure présentée sur la Fig. 5.10. La position du **palier logarithmique**, qui marque la transition du régime optiquement mince ( $W_\lambda \propto N_l$ ) aux faibles densités de colonne vers le régime optiquement épais ( $W_\lambda \propto \sqrt{N_l}$ ) aux grandes densités de colonne, soit pour  $1 \ll \tau_{\nu,0} \ll 1/a$ , dépend de la largeur Doppler  $\Delta\lambda_D$  via  $a$ . La position de l'asymptote du régime optiquement épais dépend quant à elle de la constante d'amortissement  $\delta$ , qui dépend elle-même de la densité du gaz (si les collisions dominent cet amortissement). Il faut donc connaître à la fois  $\Delta\lambda_D$  et  $\delta$  pour construire cette courbe. On remarque sans surprise qu'en augmentant l'un ou l'autre des paramètres d'élargissement  $\delta$  ou  $\Delta\lambda_D$ , l'autre étant fixé, la largeur équivalente augmente pour une densité de colonne  $N_l$  donnée.

*Note :* Dans le cas de raies fortement saturées, les ailes Lorentziennes sont en général résolues. On cherchera alors plutôt à ajuster le profil directement avec un profil synthétique pour en déduire  $N_l$ . Pour les situations intermédiaires où  $W_\lambda$  dépend à la fois de  $N_l$  et de  $\sigma_\nu$ , on pourra reporter les valeurs mesurées pour différentes raies d'une même espèce dans un diagramme représentant  $\log(W_\lambda/\lambda_0)$  en fonction de  $\log(f_{ul}\lambda_0)$ , et faire un ajustement avec une courbe de croissance théorique comme celle

<sup>14</sup>. On sera souvent dans un cas où les particules de l'espèce considérée se trouvent essentiellement sur le niveau inférieur, donc  $N \simeq N_l$ .

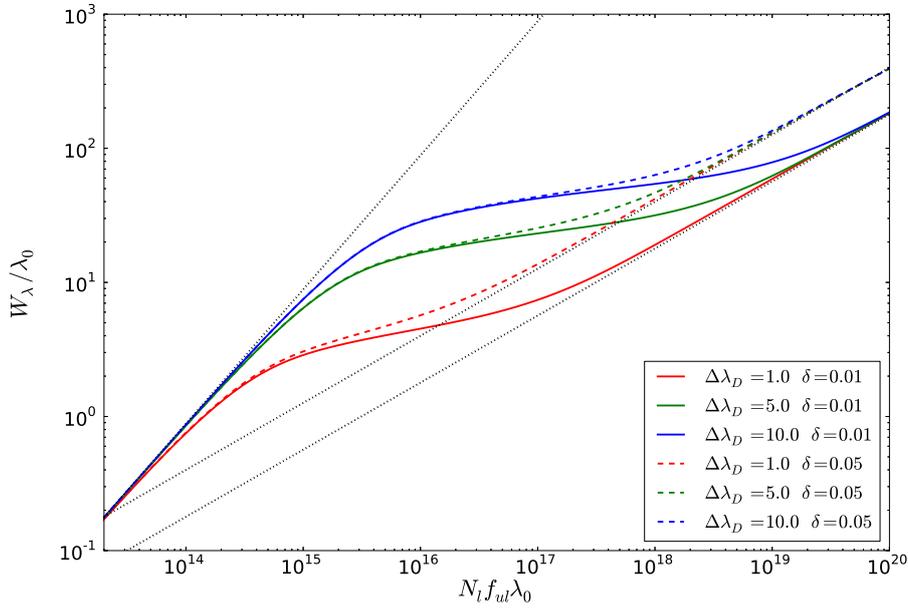


FIGURE 5.10 – Courbe de croissance théorique (largeur équivalente  $W_\lambda/\lambda_0$  en fonction de la densité de colonne  $N_l f_{ul} \lambda_0$ , reliée à l'épaisseur optique au centre de la raie  $\tau_{\nu,0}$ ) pour différentes valeurs de l'élargissement Doppler  $\Delta\lambda_D$  et de la constante d'amortissement  $\delta$ . Les comportements asymptotiques à  $\tau_{\nu,0} \ll 1$  et  $\tau_{\nu,0} \gg 1$  sont indiqués en pointillés.

de la Fig. 5.10. Si la raie est résolue, on pourra aussi directement effectuer un ajustement de profil de Voigt, par exemple avec VPFIT<sup>15</sup>.

## 5.5 Exemples de raies d'origine astrophysique

### 5.5.1 La raie à 21 cm de l'hydrogène atomique neutre en émission

#### Origine de la raie

La raie de transition hyperfine à 21 cm de longueur d'onde ( $\nu_0 = 1420.405751$  MHz) de l'hydrogène atomique neutre (HI) est un traceur puissant de l'espèce la plus abondante dans l'Univers. Elle se forme lorsque les spins du proton et de l'électron passent d'un état parallèle ( $g_u = 3$ ) à un état antiparallèle ( $g_l = 1$ )<sup>16</sup>. C'est une transition fortement interdite ( $A_{ul} = 2.85 \cdot 10^{-15} \text{ s}^{-1}$ ) mais la faible densité du milieu conjuguée aux grandes lignes de visée la rend parfaitement visible. On va voir sur un exemple comment déduire de l'observation de cette raie en émission la quantité de gaz atomique neutre dans une galaxie.

#### Exemple de signal à 21 cm

On représente sur la Fig. 5.11 le signal HI en provenance de la galaxie UGC 11707, observé<sup>17</sup> avec le radiotélescope de 140 pieds (43 m de diamètre) du NRAO à Green Bank (Virginie Occidentale). On rappelle que l'unité de densité spectrale de flux utilisée est le **Jansky**, avec  $1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1}$ .

15. <http://www.ast.cam.ac.uk/~rfc/vpfit.html>

16. Le nombre d'états pour un nombre quantique hyperfin  $F$  est  $2F + 1$ , or  $F(l) = 0$  et  $F(u) = 1$ .

17. Source : <http://www.cv.nrao.edu/course/astr534/ERA.shtml>.

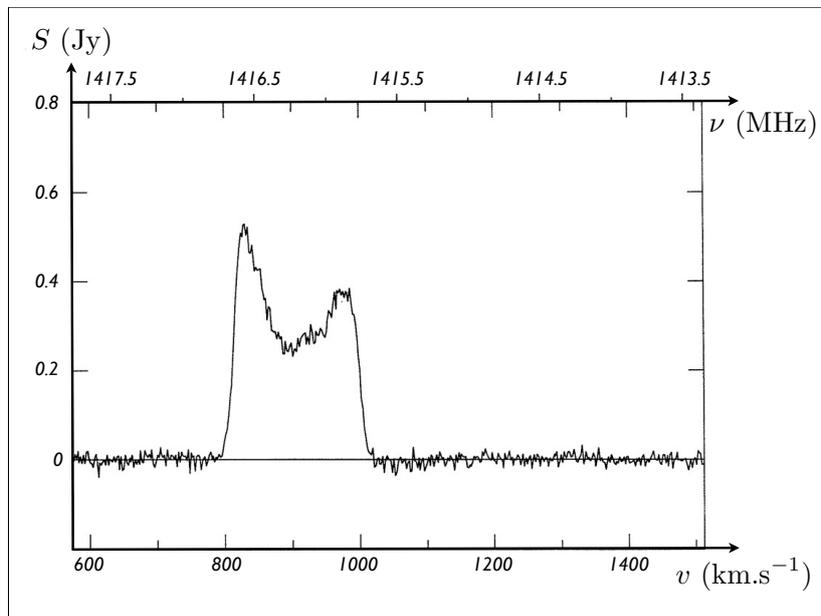


FIGURE 5.11 – Signal HI observé en direction de la galaxie UGC 11707 avec le radiotélescope de 140 pieds (43 m de diamètre) du NRAO à Green Bank (Virginie Occidentale).

La source, de diamètre apparent  $8'$ , n'est pas résolue spatialement par l'instrument, et l'antenne est donc sensible au flux total de la source (exprimé ici en Jy), et non à sa distribution de brillance.

**Exercice 83 : Démontrer cette affirmation.**

### Épaisseur optique dans la raie

Dans le milieu atomique neutre, la température d'excitation  $T_x$  de la transition hyperfine, qu'on nomme dans ce cas précis **température de spin** et qu'on note  $T_s$ , est de l'ordre de 50 à 10000 K. On en déduit qu'on peut appliquer l'approximation de Rayleigh-Jeans, et on en tire la profondeur optique

$$\tau_\nu = \frac{3c^2 h \nu}{32\pi \nu_0^2 k T_s} A_{ul} N_H \phi(\nu) \quad (5.65)$$

en introduisant la densité de colonne d'hydrogène atomique neutre  $N_H$  et la fonction de profil  $\phi(\nu)$ . On a fait ici l'hypothèse d'un milieu homogène, de sorte que  $T_s$  et  $\phi$  ne dépendent pas de la position  $s$  le long de la ligne de visée.

**Exercice 84 : Montrer que l'approximation de Rayleigh-Jeans s'applique effectivement, et démontrer la relation (5.65).**

### Densité de colonne des atomes d'hydrogène neutre

Cette expression de l'épaisseur optique de la raie HI permet, via l'équation du transfert, de relier la densité de colonne d'hydrogène atomique neutre  $N_H$  à l'aire de la raie. On montre en effet que dans la

limite optiquement mince  $\tau_\nu \ll 1$ , on a

$$N_{\text{H}} = \frac{32\pi\nu_0^2 k}{3c^3 h A_{ul}} \int T_b(v_z) dv_z \simeq 1.82 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-2} \times \int \frac{T_b(v_z) dv_z}{\text{K.km.s}^{-1}} \quad (5.66)$$

où l'on a introduit la température de brillance et on est passé en variable vitesse plutôt que fréquence, en utilisant la relation de l'effet Doppler.

**Exercice 85 :** Établir la relation (5.66). On supposera le milieu homogène, l'absence de radiation de fond et l'épaisseur optique faible, et on utilisera le fait que la densité de colonne typique de l'hydrogène atomique neutre dans une telle galaxie est  $N_{\text{H}} \sim 10^{21} \text{ cm}^{-2}$ .

### Masse de gaz d'hydrogène atomique neutre

Pour une galaxie à la distance  $D$ , cette relation permet de calculer la masse de gaz d'hydrogène atomique neutre  $M_{\text{H}}$  à partir de la mesure du flux émis dans la raie, selon

$$\frac{M_{\text{H}}}{M_{\odot}} \simeq 2.36 \cdot 10^5 \left( \frac{D}{\text{Mpc}} \right)^2 \int \frac{F dv}{\text{Jy.km.s}^{-1}}. \quad (5.67)$$

On estime alors que la masse du gaz HI de UGC 11707 est environ  $M_{\text{H}} \simeq 2.9 \cdot 10^9 M_{\odot}$ . C'est une galaxie comparable à la nôtre ( $M_{\text{H}} \simeq 4\text{-}8 \cdot 10^9 M_{\odot}$ ).

**Exercice 86 :** Obtenir cette estimation de la masse  $M_{\text{H}}$ .

### Élargissement de la raie

On montre que l'élargissement thermique est trop faible pour expliquer la largeur de la raie HI observée, qui est de l'ordre de  $200 \text{ km s}^{-1}$ . Il faut donc lui chercher une autre cause. On peut penser à une dispersion macroscopique des vitesses, de type turbulente, mais celle-ci est également trop faible<sup>18</sup>. En réalité, le profil de la raie est un **double pic caractéristique des disques en rotation**<sup>19</sup>. Ceci est confirmé par des observations à plus haute résolution angulaire (voir la Fig. 5.12), qui permettent de montrer que les différentes parties de la galaxie n'émettent pas aux mêmes fréquences. La vitesse de rotation est ici de l'ordre de  $100 \text{ km s}^{-1}$ .

**Exercice 87 :** Estimer la largeur thermique, et en conclure qu'elle est effectivement nettement plus faible que la largeur de la raie.

## 5.5.2 Les raies moléculaires en absorption

### Spectre observé

On va voir comment on peut utiliser les raies d'absorption moléculaires pour mesurer la densité de colonne d'espèces et leur température d'excitation. Pour fixer les idées, on considère le signal représenté sur la Fig. 5.13, reçu en direction d'un quasar lointain (redshift  $z_Q = 2.5$ ), sur la ligne de visée duquel se trouve une galaxie au redshift  $z < z_Q$ , dont le milieu interstellaire contient des espèces moléculaires qui absorbent le rayonnement du quasar dans un certain nombre de raies. Le signal présente l'intensité

18. Elle dépend de l'échelle, mais pour des nuages à haute latitude Galactique, elle est de l'ordre de  $30 \text{ km s}^{-1}$ .

19. On trouvera dans [51] une paramétrisation des profils en émission des disques galactiques en rotation par les fonctions de Busy.

## Overview UGC 11707

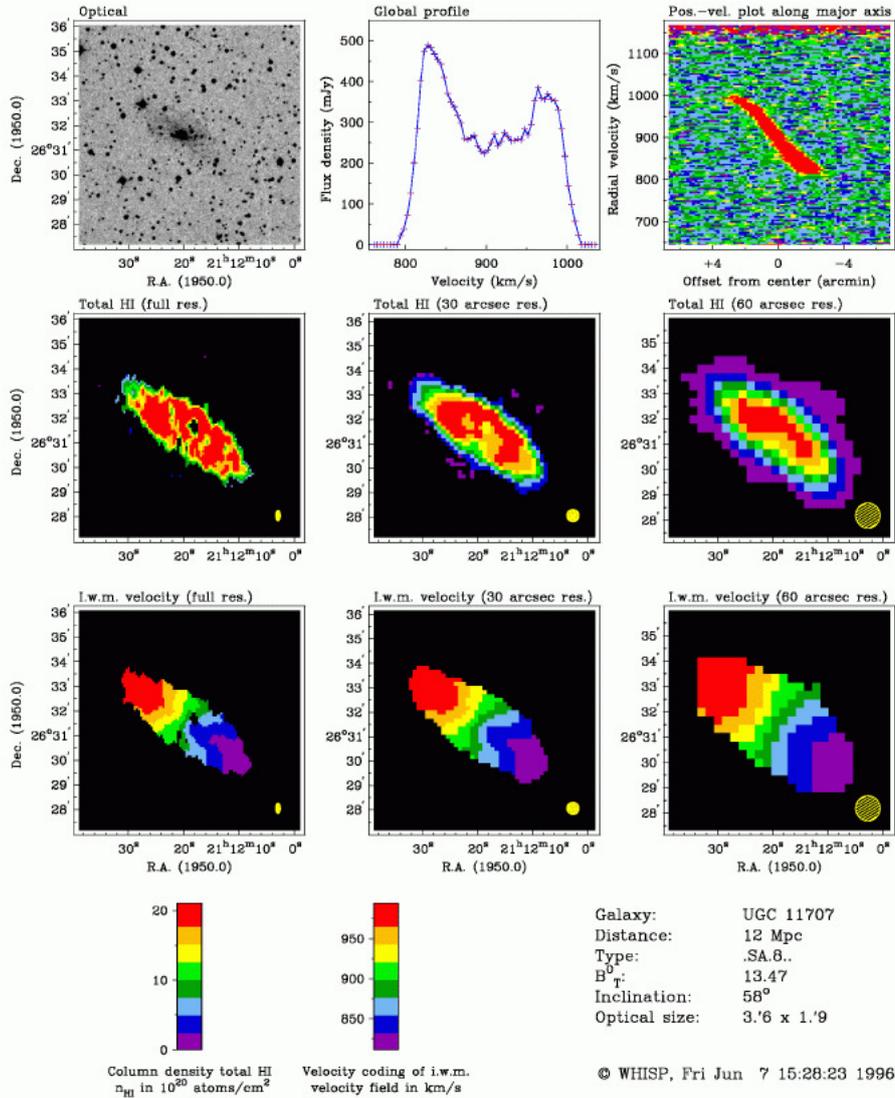


FIGURE 5.12 – Cartographie de l'émission HI dans UGC 11707. (Source : <http://www.cv.nrao.edu/course/ast534/ERA.shtml>.)

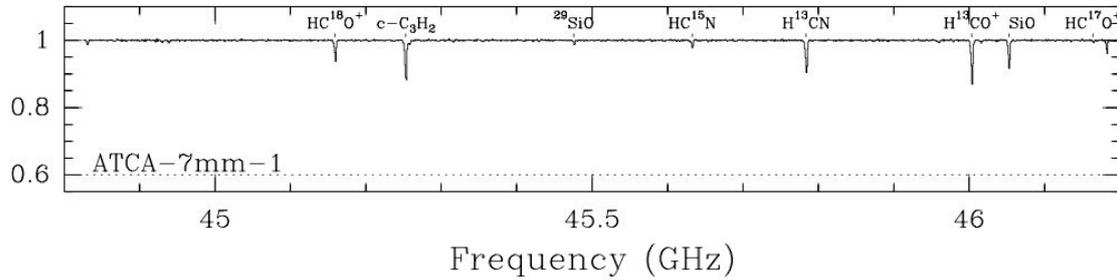


FIGURE 5.13 – **Intensité normalisée en direction de PKS 1830-211.** Figure issue de [28].

spécifique reçue normalisée à celle du rayonnement de fond,  $\mathcal{I}_\nu = I_\nu/I_Q$ . Les raies d'absorption correspondent à des **transitions rotationnelles**  $J \rightarrow J + 1$  entre deux niveaux successifs, lesquels sont caractérisés par un **nombre quantique rotationnel**  $J = 0, 1, 2, \dots$ , l'énergie du niveau  $J$  s'écrivant  $E_J = J(J+1)\epsilon$  avec  $\epsilon$  une valeur dépendant uniquement de l'espèce considérée, et le poids statistique de ce même niveau étant  $g_J = 2J + 1$ .

### Redshift de la galaxie

On observe une transition rotationnelle de l'espèce  $\text{H}^{13}\text{CN}$  aux alentours de 45.78 GHz. On peut alors montrer, à partir de la mesure au laboratoire de la fréquence  $\nu_0(z = 0) = 86.33873$  GHz de la transition  $J = 0 \rightarrow 1$ , que cette transition observée est également  $J = 0 \rightarrow 1$  et que le redshift de la galaxie est  $z \simeq 0.89$ .

**Exercice 88 : Démontrer ces résultats. On raisonnera sur les valeurs minimales possibles des différentes fréquences de transition.**

### Coefficient d'Einstein d'émission spontanée

Dans le cas des transitions rotationnelles, le coefficient d'Einstein d'émission spontanée est [24]

$$A_{ul} = \frac{64\pi^4 |D_{lu}|^2}{3hc^3} \nu_{ul}^3, \quad (5.68)$$

où  $|D_{lu}|^2$  est l'**élément de matrice de l'opérateur dipolaire électrique** entre les états  $u \leftrightarrow J + 1$  et  $l \leftrightarrow J$ . Pour des molécules linéaires, cet élément de matrice s'écrit  $|D_{lu}|^2 = D^2 S$  avec  $D$  le **moment dipolaire** et  $S$  la **force de raie**

$$S = \frac{J + 1}{2J + 3}. \quad (5.69)$$

Le coefficient d'Einstein prend alors la forme suivante, en notant  $\nu_J = \nu_{ul}$  la fréquence de la transition  $J \rightarrow J + 1$  au laboratoire,

$$A_{J+1 \rightarrow J} = \frac{64\pi^4 D^2}{3hc^3} \frac{J + 1}{2J + 3} \nu_J^3 \quad (5.70)$$

### Densité de colonne de H<sup>13</sup>CN

À partir de cette expression, on en déduit le coefficient d'absorption entre les niveaux  $J$  et  $J + 1$

$$\kappa_{\nu}^{J \rightarrow J+1} = \frac{8\pi^3 D^2}{3hc} \nu_J n \frac{J+1}{Z(T_x)} \exp\left(-\frac{E_J}{kT_x}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{E_J - E_{J+1}}{kT_x}\right)\right] \phi(\nu) \quad (5.71)$$

où l'on a fait apparaître la densité de l'espèce  $n$ , la température d'excitation  $T_x$ , la fonction de partition  $Z$  et le profil normalisé  $\phi(\nu)$ . La densité de colonne est alors donnée par

$$N = \frac{3h}{8\pi^3 D^2 (J+1)} \frac{Z(T_x) \exp\left(\frac{E_J}{kT_x}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{E_J - E_{J+1}}{kT_x}\right)} W_{J \rightarrow J+1} \quad (5.72)$$

où  $W_{J \rightarrow J+1}$  est une largeur équivalente de la raie  $J \rightarrow J + 1$  exprimée en vitesse

$$W_{J \rightarrow J+1} = \iint \kappa_{\nu}^{J \rightarrow J+1} dv ds. \quad (5.73)$$

**Exercice 89 :** Établir les expressions (5.71) et (5.72). On supposera que la température d'excitation est indépendante de la transition, et uniforme dans le milieu.

### Détermination de la température d'excitation et de la densité de colonne

La relation (5.72) doit être valable quelle que soit la transition considérée pour une espèce donnée, puisqu'on fait l'hypothèse que la température d'excitation est la même pour les différents niveaux. Il y a deux inconnues : la densité de colonne  $N$  et la température d'excitation  $T_x$ . Si l'on dispose de la mesure de deux largeurs équivalentes (par exemple  $W_{0 \rightarrow 1}$  et  $W_{1 \rightarrow 2}$ ), on peut en déduire ces deux inconnues. On montre en effet que la température d'excitation doit vérifier la condition

$$\exp\left(-3\frac{T_0}{T_x}\right) \cosh\left(\frac{T_0}{T_x}\right) = \frac{W_{1 \rightarrow 2}}{4W_{0 \rightarrow 1}}. \quad (5.74)$$

La température caractéristique pour H<sup>13</sup>CN est  $T_0 = \epsilon/k \simeq 2.0709$  K, et les deux transitions rotationnelles observées ont pour largeurs équivalentes  $W_{0 \rightarrow 1} = 4.966$  km.s<sup>-1</sup> et  $W_{1 \rightarrow 2} = 6.393$  km.s<sup>-1</sup>. On en déduit la valeur de la température d'excitation par une résolution numérique,  $T_x \simeq 5.148$  K.

**Exercice 90 :** Établir la relation (5.74) et en déduire que les populations des niveaux sont déterminées par le couplage au rayonnement du fond diffus cosmologique à  $z = 0.89$ .

On peut théoriquement alors utiliser la relation (5.72) pour déterminer la densité de colonne de l'espèce responsable de l'absorption.

### Densité de colonne d'espèces moléculaires

La relation (5.72) est une expression très générale donnant la densité de colonne d'une espèce moléculaire responsable d'une raie (en absorption ou en émission). On peut la généraliser encore légèrement, comme indiqué par [24],

$$N = \frac{3h}{8\pi^3 |D_{lu}|^2} \frac{Z(T_x)}{g_u} \frac{\exp\left(\frac{E_u}{kT_x}\right)}{\exp\left(\frac{h\nu_{ul}}{kT_x}\right) - 1} \int \tau_\nu dv \quad (5.75)$$

dont on pourra vérifier aisément qu'elle redonne (5.72) dans le cas d'une molécule linéaire comme considéré ici.

Note : Il peut être nécessaire de corriger cette expression par un **facteur de remplissage**  $f$  (en anglais **filling factor**) lorsque la source ne remplit pas complètement le lobe instrumental.

## Réponses aux exercices du chapitre 5

### **Exercice 66**

Il est évident que le nombre de transitions  $u \rightarrow l$  par unité de volume et par unité de temps doit être exactement égal au nombre de transitions  $l \rightarrow u$  par unité de volume et par unité de temps, puisqu'on est à l'équilibre statistique. On peut donc écrire

$$n_u B_{ul} J_{\nu_{ul}} + n_u A_{ul} = n_l B_{lu} J_{\nu_{ul}}$$

On en déduit l'expression de l'intensité moyenne à la fréquence de la transition en fonction des populations des niveaux et des coefficients d'Einstein :

$$J_{\nu_{ul}} = \frac{n_u A_{ul}}{n_l B_{lu} - n_u B_{ul}} = \frac{\frac{A_{ul}}{B_{ul}}}{\frac{n_l}{n_u} \frac{B_{lu}}{B_{ul}} - 1}$$

Or, à l'équilibre thermodynamique à la température  $T$ , on a la relation de Boltzmann entre les populations des niveaux :

$$\frac{n_u}{n_l} = \frac{g_u}{g_l} \exp\left(-\frac{h\nu_{ul}}{kT}\right)$$

Donc l'intensité moyenne à la fréquence  $\nu_{ul}$  s'écrit

$$J_{\nu_{ul}} = \frac{\frac{A_{ul}}{B_{ul}}}{\frac{B_{lu}}{B_{ul}} \frac{g_l}{g_u} \exp\left(\frac{h\nu_{ul}}{kT}\right) - 1}$$

Mais cette intensité moyenne, dans le cas de l'équilibre thermodynamique du rayonnement à la température  $T$  s'écrit aussi

$$J_{\nu_{ul}} = \frac{1}{4\pi} \int I_{\nu_{ul}} d\Omega = I_{\nu_{ul}} = B_{\nu_{ul}}(T) = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu_{ul}}{kT}\right) - 1}$$

Considérant que ces deux écritures doivent être identiques à toutes les températures, on est amené aux relations d'Einstein entre les coefficients  $A_{ul}$ ,  $B_{ul}$  et  $B_{lu}$  :

$$g_l B_{lu} = g_u B_{ul}$$

$$\frac{A_{ul}}{B_{ul}} = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2}$$

### **Exercice 67**

Imaginons qu'Einstein n'ait pas introduit le processus d'émission stimulée. Dans la même hypothèse d'équilibre thermodynamique que dans l'exercice précédent, on serait amené à écrire l'intensité moyenne à la fréquence de transition comme

$$J_{\nu_{ul}} = \frac{n_u A_{ul}}{n_l B_{lu}} = \frac{A_{ul}}{B_{lu}} \frac{g_u}{g_l} \exp\left(-\frac{h\nu_{ul}}{kT}\right) = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu_{ul}}{kT}\right)$$

qui n'est autre que la loi de Wien, comme annoncé. Remarquons que le fait qu'on retrouve la loi de Wien dans le cas de l'équilibre thermodynamique en négligeant l'émission stimulée correspond au fait

que pour  $h\nu_{ul} \gg kT$ , on a  $n_u \ll n_l$ , de sorte que l'émission stimulée ( $\propto n_u$ ) est effectivement négligeable devant l'absorption ( $\propto n_l$ ). En effet, comme  $g_u \sim g_l$ , on a  $B_{ul} \sim B_{lu}$  et donc  $n_u B_{ul} \ll n_l B_{lu}$ .

### Exercice 68

Remarquons que si  $J_\nu$  varie peu sur la plage  $\Delta\nu$ , on a sensiblement

$$\bar{J} = \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu) d\nu \simeq \int_0^\infty J_\nu \delta(\nu - \nu_{ul}) d\nu = J_{\nu_{ul}}$$

La dérivation faite à l'origine par Einstein faisait d'ailleurs cette hypothèse implicitement. Cette précision ne change pas les relations d'Einstein dès lors que  $B_\nu(T)$  ne varie pas appréciablement sur la plage  $\Delta\nu$ , car on a alors

$$\bar{J} = \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu) d\nu = \int_0^\infty B_\nu(T) \phi(\nu) d\nu \simeq \int_0^\infty B_\nu(T) \delta(\nu - \nu_{ul}) d\nu = B_{\nu_{ul}}(T)$$

à l'équilibre thermodynamique. Plus précisément, on peut écrire

$$J_\nu = B_\nu(T) \simeq B_{\nu_{ul}}(T) + (\nu - \nu_{ul}) \left. \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial \nu} \right|_{\nu=\nu_{ul}}$$

en faisant un développement de Taylor au premier ordre, ce qui donne

$$\bar{J} = \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu) d\nu = B_{\nu_{ul}}(T) + \left. \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial \nu} \right|_{\nu=\nu_{ul}} \int_0^\infty (\nu - \nu_{ul}) \phi(\nu) d\nu$$

où le second terme peut être négligé lorsque  $\phi(\nu) \simeq \delta(\nu - \nu_{ul})$ . Il est d'ailleurs nul dès lors que le profil  $\phi$  est symétrique par rapport à  $\nu_{ul}$ .

### Exercice 69

Comme l'intensité moyenne et la densité spectrale et volumique d'énergie sont reliées par<sup>20</sup>

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu$$

les relations d'Einstein entre coefficients ainsi définis deviennent

$$g_u B_{ul} = g_l B_{lu} \quad \text{et} \quad \frac{A_{ul}}{B_{ul}} = \frac{8\pi h \nu_{ul}^3}{c^3}$$

### Exercice 70

Pour la matière, on a donc l'équation bilan

$$\frac{dn_l}{dt} = A_{ul} n_u + B_{ul} n_u \bar{J} - B_{lu} n_l \bar{J}$$

Pour ce qui est du rayonnement, considérons la variation de l'intensité spécifique  $I_\nu$  le long d'un rayon lumineux (repéré par une abscisse  $s$ ). Celle ci peut se mettre sous la forme

$$\frac{dI_\nu}{ds} = A + S + E$$

où  $ds = c dt$  et où les trois termes du membre de droite correspondent respectivement à l'absorption ( $A$ ), l'émission induite ( $S$ ) et l'émission spontanée ( $E$ ).

20. Cette relation est valable même dans le cas anisotrope.

On se place dans le cadre d'une hypothèse d'isotropie locale du rayonnement. Dans ce cas, l'équation ci-dessus prend la forme<sup>21</sup>

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \frac{h\nu c}{4\pi} \frac{dn_\nu}{ds} = \frac{h\nu}{4\pi} \frac{dn_\nu}{dt} = E + A + S$$

et s'écrit donc comme un bilan sur le nombre de photons de fréquence  $\nu$  à  $d\nu$  près dans le champ de rayonnement. On peut alors calculer  $E$ ,  $A$  et  $S$  en reliant la variation de  $n_\nu$  à celles des populations des niveaux pour chacun de ces processus, qui sont liées entre elles par les coefficients d'Einstein.

Considérons tout d'abord l'émission spontanée ( $E$ ) : chaque évènement de ce type provoque l'apparition d'un photon et une désexcitation  $u \rightarrow l$ . En termes du coefficient  $A_{ul}$ , on a

$$\left. \frac{dn_l}{dt} \right|_E = A_{ul} n_u$$

Pendant, il convient de remarquer que cette équation tient compte de *toutes* les transitions de type émission spontanée de  $u$  vers  $l$ , alors que l'énergie libérée dans cette désexcitation - et qui est celle du photon émis - n'est pas exactement  $h\nu_{ul}$ , mais  $h\nu \simeq h\nu_{ul}$ , du fait de l'élargissement des niveaux. Autrement dit, elle est intégrée sur la fréquence. C'est donc l'intégrale sur la fréquence de la variation de  $n_\nu$  associée à  $E$  qui est égale à la variation de population du niveau inférieur du fait de l'émission spontanée :

$$\int d\nu \left. \frac{dn_\nu}{dt} \right|_E = \left. \frac{dn_l}{dt} \right|_E = A_{ul} n_u = A_{ul} n_u \int \phi(\nu) d\nu = \int A_{ul} \phi(\nu) n_u d\nu$$

en remarquant que ni  $A_{ul}$  ni  $n_u$  ne dépendent de la fréquence exacte  $\nu$  du photon émis. On a donc l'équation bilan sous forme intégrale :

$$\int d\nu \left[ \left. \frac{dn_\nu}{dt} \right|_E - A_{ul} \phi(\nu) n_u \right] = 0$$

Physiquement, cela implique également la nullité de la quantité sous l'intégrale. En effet, la dépendance en fréquence de  $dn_\nu/dt$  est par définition donnée par la fonction de profil  $\phi(\nu)$  :

$$\left. \frac{dn_\nu}{dt} \right|_E = k_E \phi(\nu) \Rightarrow 0 = \int d\nu \left[ \left. \frac{dn_\nu}{dt} \right|_E - A_{ul} \phi(\nu) n_u \right] = [k_E - A_{ul} n_u] \int \phi(\nu) d\nu = k_E - A_{ul} n_u$$

On en déduit la probabilité d'émission spontanée par intervalle de fréquence

$$\left. \frac{dn_\nu}{dt} \right|_E = A_{ul} \phi(\nu) n_u \Rightarrow \left. \frac{dI_\nu}{ds} \right|_E = \frac{h\nu}{4\pi} \left. \frac{dn_\nu}{dt} \right|_E = \frac{h\nu}{4\pi} A_{ul} \phi(\nu) n_u$$

En définitive, le coefficient d'Einstein  $A_{ul}$  est donc "pondéré" par  $\phi$  sur le profil de la raie. On peut faire la même chose pour l'absorption ( $A$ ) et pour l'émission stimulée ( $S$ ) :

$$\left. \frac{dn_\nu}{dt} \right|_A = -B_{lu} \phi(\nu) J_\nu n_l \Rightarrow \left. \frac{dI_\nu}{ds} \right|_A = \frac{h\nu}{4\pi} \left. \frac{dn_\nu}{dt} \right|_A = -\frac{h\nu}{4\pi} B_{lu} \phi(\nu) J_\nu n_l$$

$$\left. \frac{dn_\nu}{dt} \right|_S = B_{ul} \phi(\nu) J_\nu n_u \Rightarrow \left. \frac{dI_\nu}{ds} \right|_S = \frac{h\nu}{4\pi} \left. \frac{dn_\nu}{dt} \right|_S = \frac{h\nu}{4\pi} B_{ul} \phi(\nu) J_\nu n_u$$

Dans ces deux expressions, il convient de remarquer que l'intensité moyenne du rayonnement qui intervient est bien entendu  $J_\nu$ , et non pas  $\bar{J}$ , puisque l'on considère des transitions à la fréquence exacte  $\nu$ , interne au profil de la raie.

21. On ignore ici la diffusion, qui ne modifie pas l'état de la matière, lorsqu'elle est cohérente.

En sommant les trois contributions, on obtient :

$$\frac{dI_\nu}{ds} = A_{ul}n_u \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu) + B_{ul}n_u \frac{h\nu}{4\pi} J_\nu \phi(\nu) - B_{lu}n_l \frac{h\nu}{4\pi} J_\nu \phi(\nu)$$

On peut vérifier que cette équation est raisonnable en intégrant sur la fréquence pour obtenir la variation de la densité  $n$  de photons liés à cette transition :

$$\frac{dn}{dt} = \int d\nu \frac{dn_\nu}{dt} = \int d\nu [A_{ul}n_u + B_{ul}n_u J_\nu - B_{lu}n_l J_\nu] \phi(\nu) = A_{ul}n_u + B_{ul}n_u \bar{J} - B_{lu}n_l \bar{J} = \frac{dn_l}{dt}$$

ce qui est cohérent puisque le passage d'un atome ou d'une molécule de l'état  $u$  vers l'état  $l$  s'accompagne de l'émission d'un photon et qu'on a donc  $dn = dn_l = -dn_u$ .

Pour rapprocher cette équation de l'équation de transfert sans diffusion sous la forme usuelle

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \epsilon_\nu - \kappa_\nu I_\nu$$

on utilise à nouveau l'hypothèse d'isotropie locale du rayonnement pour remplacer  $J_\nu$  par  $I_\nu$  dans le membre de droite, de sorte que

$$\frac{dI_\nu}{ds} = A_{ul}n_u \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu) + B_{ul}n_u \frac{h\nu}{4\pi} I_\nu \phi(\nu) - B_{lu}n_l \frac{h\nu}{4\pi} I_\nu \phi(\nu)$$

et l'on en tire l'émissivité et le coefficient d'absorption

$$\epsilon_\nu = A_{ul}n_u \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu) \quad \kappa_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu) (B_{lu}n_l - B_{ul}n_u)$$

### **Exercice 71**

La fonction source dans la raie est

$$S_\nu = \frac{\epsilon_\nu}{\kappa_\nu} = \frac{A_{ul}n_u \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu)}{\frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu) (B_{lu}n_l - B_{ul}n_u)} = \frac{A_{ul}n_u}{(B_{lu}n_l - B_{ul}n_u)} = \frac{\frac{A_{ul}}{B_{ul}}}{\left(\frac{B_{lu}n_l}{B_{ul}n_u} - 1\right)}$$

On remarque d'ores et déjà qu'elle ne dépend pas de la fréquence exacte  $\nu$ , mais uniquement des coefficients d'Einstein de la transition et des populations des niveaux impliqués. Avec les relations d'Einstein, cela donne une forme semblable à une fonction de Planck

$$S_\nu = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} \frac{1}{\left(\frac{g_u n_l}{g_l n_u} - 1\right)}$$

On peut alors introduire la température d'excitation  $T_x$  via

$$\frac{n_u}{n_l} = \frac{g_u}{g_l} \exp\left(-\frac{\Delta E}{kT_x}\right) = \frac{g_u}{g_l} \exp\left(-\frac{h\nu_{ul}}{kT_x}\right)$$

On a alors la fonction source sous la forme annoncée

$$S_\nu = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu_{ul}}{kT_x}\right) - 1} = B_{\nu_{ul}}(T_x).$$

### Exercice 72

Le coefficient d'absorption dans la raie s'écrit

$$\kappa_\nu = \frac{\epsilon_\nu}{S_\nu} = \frac{c^2}{2h\nu_{ul}^3} \left[ \exp\left(\frac{h\nu_{ul}}{kT_x}\right) - 1 \right] \times A_{ul} n_u \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu) = \frac{c^2\nu}{8\pi\nu_{ul}^3} A_{ul} n_u \left[ \exp\left(\frac{h\nu_{ul}}{kT_x}\right) - 1 \right] \phi(\nu)$$

qu'on met plus volontiers sous la forme (5.14) annoncée car en général  $n_l > n_u$  et que de plus ce sont les particules sur le niveau inférieur qui sont susceptibles d'absorber.

### Exercice 73

Faisons l'hypothèse que la raie est intrinsèquement infiniment fine, c'est-à-dire que la fréquence émise est exactement  $\nu_e = \nu_{ul}$  pour toutes les particules émettrices du milieu, qu'on suppose à l'équilibre thermique à une température  $T$ . Ces particules sont donc soumises à l'agitation thermique, et leurs vitesses projetées se répartissent suivant une distribution de Maxwell :

$$f_{v_z}(v_z) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right)$$

où  $m$  est la masse des particules émettrices. La probabilité  $dP$  pour qu'une particule ait une vitesse projetée comprise entre  $v_z$  et  $v_z + dv_z$  est alors  $dP = f_{v_z}(v_z)dv_z$ . Pour simplifier, on a supposé que la vitesse projetée est nulle en moyenne  $\langle v_z \rangle = 0$ . À une vitesse projetée donnée correspond une fréquence observée donnée par la formule de l'effet Doppler. Cette correspondance étant linéaire dans la limite non relativiste

$$v_z = c \left(1 - \frac{\nu}{\nu_{ul}}\right),$$

le profil  $\phi(\nu)$  est donc directement lié à  $f_{v_z}$  par un changement de variable

$$\phi(\nu) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left[-\frac{mc^2}{2kT\nu_{ul}^2}(\nu - \nu_{ul})^2\right] \frac{c}{\nu_{ul}}$$

de sorte que

$$\phi(\nu)|d\nu| = f_{v_z}(v_z)|dv_z|$$

la normalisation de  $\phi$  étant ainsi assurée par celle de la distribution de Maxwell. On met habituellement ce résultat sous la forme

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} \exp\left[-\left(\frac{\nu - \nu_{ul}}{\Delta\nu_D}\right)^2\right]$$

en définissant la largeur Doppler thermique

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_{ul}}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

### Exercice 74

On écrit le profil thermique à la position  $s$  sous la forme

$$\phi_T[\nu - \nu_0(s)] = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} \exp\left\{-\left[\frac{\nu - \nu_0(s)}{\Delta\nu_D}\right]^2\right\}$$

A priori, l'élargissement Doppler thermique  $\Delta\nu_D$  est une fonction de la position  $s$ , via la température, qui peut être différente en différents points de la ligne de visée. Mais si l'on fait l'hypothèse que cette température est la même quelle que soit  $s$ , alors le profil résultant s'écrit

$$\phi(\nu) = \int_0^\infty \phi_t(\nu - \nu_0) f(\nu_0) d\nu_0$$

où  $f(\nu_0)$  est la densité de probabilité des fréquences centrales associées aux mouvements turbulents, c'est-à-dire que  $f(\nu_0)d\nu_0$  est la probabilité que la fréquence centrale en un point donné de la ligne de visée soit comprise entre  $\nu_0$  et  $\nu_0 + d\nu_0$ . On a donc un produit de convolution  $\phi = \phi_t * f$ . Bien entendu, la distribution des fréquences centrales est directement liée à la distribution des vitesses turbulentes sur la ligne de visée.

### **Exercice 75**

Dans la distribution Gaussienne

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} \exp\left[-\left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D}\right)^2\right]$$

on définit la largeur à mi-hauteur en écrivant que

$$\phi\left(\nu_0 + \frac{\text{FWHM}}{2}\right) = \phi\left(\nu_0 - \frac{\text{FWHM}}{2}\right) = \frac{\phi(\nu_0)}{2}$$

ce qui donne

$$\exp\left[-\left(\frac{\text{FWHM}}{2\Delta\nu_D}\right)^2\right] = \frac{1}{2}$$

et donc

$$\text{FWHM} = 2\sqrt{\ln 2}\Delta\nu_D$$

### **Exercice 76**

Imaginons en effet que nous placions une assemblée de particules sur l'état  $u$ , sans champ de rayonnement. La désexcitation des particules ne peut se faire que via le processus d'émission spontanée<sup>22</sup>. On a donc la variation de la population du niveau  $u$  sous la forme

$$\frac{dn_u}{dt} = -\sum_{l < u} A_{ul} n_u$$

en tenant compte de tous les niveaux  $l$  d'énergie inférieure à  $E_u$ . On en déduit une décroissance exponentielle de cette population

$$n_u(t) = n_u(0)e^{-t/\tau_u}$$

avec le temps caractéristique

$$\tau_u = \frac{1}{\sum_{l < u} A_{ul}}$$

### **Exercice 77**

---

22. On suppose que la densité est suffisamment faible pour qu'il n'y ait pas de désexcitations collisionnelles.

On a

$$\sigma_{\omega} = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e c} \frac{\gamma \omega^2}{[(\omega - \omega_{ul})(\omega + \omega_{ul})]^2 + \omega^2 \gamma^2} \simeq \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e c} \frac{\gamma \omega_{ul}^2}{[(\omega - \omega_{ul})2\omega_{ul}]^2 + \omega_{ul}^2 \gamma^2} = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e c} \frac{\gamma}{4(\omega - \omega_{ul})^2 + \gamma^2}$$

En fonction de la fréquence  $\nu$ , la section efficace prend la forme suivante

$$\sigma_{\nu,a} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c} \frac{\delta}{\delta^2 + (\nu - \nu_{ul})^2}$$

où l'on a introduit  $\delta = \gamma/(4\pi)$ . Comme le coefficient d'absorption est lié à la section efficace par  $\kappa_{\nu} = n_l \sigma_{\nu,a}$ , on en déduit qu'il s'écrit alors sous la forme

$$\kappa_{\nu} = n_l \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c} \frac{\delta}{\delta^2 + (\nu - \nu_{ul})^2} = n_l \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} \phi(\nu)$$

où l'on a introduit le profil Lorentzien normalisé (représenté pour différentes valeurs de  $\delta$  sur la Fig. 5.3)

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\pi} \frac{\delta}{\delta^2 + (\nu - \nu_{ul})^2} \quad \text{avec} \quad \int_0^{\infty} \phi(\nu) d\nu = 1$$

### Exercice 78

On rapproche (5.32) de (5.14), qu'on rappelle ici, dans l'approximation d'une raie fine pour assimiler  $\nu$  à  $\nu_{ul}$  :

$$\kappa_{\nu} = \frac{c^2}{8\pi\nu_{ul}^2} A_{ul} n_l \frac{g_u}{g_l} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h\nu_{ul}}{kT_x}\right) \right] \phi(\nu)$$

Le terme entre crochets se réduit à l'unité lorsqu'on néglige l'émission stimulée (comme c'est le cas ici). On peut donc faire l'identification suivante

$$n_l \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} = \frac{c^2}{8\pi\nu_{ul}^2} A_{ul} n_l \frac{g_u}{g_l}$$

et en déduire l'expression classique du coefficient d'Einstein d'absorption

$$B_{lu} = \frac{g_u}{g_l} B_{ul} = \frac{g_u}{g_l} A_{ul} \frac{c^2}{2h\nu_{ul}^3} = \frac{\pi}{h\nu_{ul}} \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e c}$$

### Exercice 79

Pour s'en convaincre, prenons une raie élargie par deux processus  $i$  et  $j$ . Le profil  $\phi_i$  peut être vu comme la superposition de raies infiniment fines centrées sur des fréquences discrètes  $\nu_k$  infiniment rapprochées les unes des autres, et dont les intensités sont données par  $\phi_i(\nu_k)$

$$\phi_i(\nu) = \sum_k \phi_i(\nu_k) \delta(\nu - \nu_k) \delta\nu_k$$

où  $\delta\nu_k \rightarrow 0$  est la largeur asymptotiquement nulle de chaque raie. Chacune est élargie par le processus  $j$ , de sorte que chaque composante de la somme ci-dessus doit être remplacée par

$$\phi_i(\nu_k) \delta(\nu - \nu_k) \rightarrow \phi_i(\nu_k) \phi_j(\nu - \nu_k)$$

L'argument de  $\phi_j$  est bien  $\nu - \nu_k$ , parce que le profil de cette composante est centré sur  $\nu_k$ . On en déduit que le profil résultant des deux processus a la forme

$$\Psi(\nu) = \sum_k \phi_i(\nu_k) \phi_j(\nu - \nu_k) \delta\nu_k$$

soit, en passant à la limite continue,

$$\Psi(\nu) = \int \phi_i(\nu') \phi_j(\nu - \nu') d\nu'$$

### **Exercice 80**

En plaçant le centre de la raie en  $\nu_0 = 0$

$$\kappa_\nu = n_l \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} f_{ul} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\delta}{\delta^2 + (\nu - \nu')^2} \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D} \exp \left[ - \left( \frac{\nu'}{\Delta\nu_D} \right)^2 \right] d\nu'$$

On pose alors

$$a = \frac{\delta}{\Delta\nu_D} \quad u = \frac{\nu}{\Delta\nu_D} \quad y = \frac{\nu'}{\Delta\nu_D}$$

ce qui permet d'écrire  $\kappa_\nu$  sous la forme

$$\kappa_\nu = n_l \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} f_{ul} \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D} H(a, u) = \kappa_{\nu,0} H(a, u)$$

en faisant apparaître la fonction de Voigt

$$H(a, u) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{a^2 + (u - y)^2} dy$$

En tenant compte de la fréquence centrale  $\nu_0$ , on a la même forme en posant

$$u = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D}$$

### **Exercice 81**

Pour obtenir le comportement au centre du profil ( $u \rightarrow 0$ ) on a recours à un développement de Taylor de la fonction, donné par [17], puisque  $a \ll 1$ ,

$$H(a, u) = H_0(u) + aH_1(u) + a^2H_2(u) + \dots = \sum_{n \geq 0} a^n H_n(u)$$

avec notamment

$$\begin{aligned} H_0(u) &= e^{-u^2} \\ H_1(u) &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} [1 - 2uF(u)] \\ H_2(u) &= (1 - 2u^2) e^{-u^2} \\ H_3(u) &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{2}{3} (1 - 2u^2) - 2u \left( 1 - \frac{2}{3} u^2 \right) F(u) \right] \end{aligned}$$

où l'on utilise la notation

$$F(u) = e^{-u^2} \int_0^u e^{t^2} dt$$

On peut alors montrer que le cœur du profil est dominé par la partie Doppler, et les ailes par la composante Lorentzienne. En effet, pour  $u \rightarrow 0$ , et en se limitant au premier ordre en  $a$ , on a

$$H(u) \simeq e^{-u^2} - \frac{2a}{\sqrt{\pi}} (1 - 2u^2) \quad \text{car} \quad F(u) \simeq u$$

donc le terme dominant pour  $a \ll 1$  et  $u \rightarrow 0$  est bien  $e^{-u^2}$ . C'est cette forme qui est représentée par les pointillés sur la Fig. 5.4

Inversement, lorsque  $u \gg 1$ , toujours avec  $a \ll 1$ ,

$$\frac{1}{a^2 + (u - y)^2} \simeq \frac{1}{u^2}$$

et donc

$$H(a, u) \simeq \frac{1}{u^2} \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{a}{\sqrt{\pi} u^2}$$

ce qui est représenté par les courbes en tirets sur la Fig. 5.4.

### Exercice 82

Pour comprendre la raison de ce comportement, il faut revenir à la fonction  $H(a, u)$  :

► Dans la limite d'une épaisseur optique nulle au centre de la raie,  $\tau_{\nu,0} \rightarrow 0$ , l'expression sous l'intégrale dans l'Eq. 5.61 tend vers zéro. On en déduit que lorsque l'épaisseur optique est faible  $\tau_{\nu,0} \ll 1$ , seules les plages de  $u$  pour lesquelles  $H(a, u)$  n'est pas trop petit (et donc  $\tau_{\nu,0} H(a, u)$  suffisamment loin de zéro) vont avoir une contribution à  $1 - \mathcal{I}_\nu$  et donc à la largeur équivalente  $W_\lambda$ . En se référant à la Fig. 5.4, on voit que c'est donc le cœur Doppler du profil qui fixe la largeur équivalente. On a alors

$$W_\lambda \simeq \int \tau_{\nu,0} H(a, u) d\lambda \simeq \int \tau_{\nu,0} e^{-u^2} d\lambda = \int \tau_{\nu,0} \exp \left[ - \left( \frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta\lambda_D} \right)^2 \right] d\lambda = \sqrt{\pi} \tau_{\nu,0} \Delta\lambda_D$$

qu'on met généralement sous la forme

$$W_\lambda = N_l \frac{e^2 \lambda_0^2 f_{ul}}{4\epsilon_0 m_e c^2} \quad \text{ou encore} \quad \frac{W_\lambda}{\lambda_0} = \left( \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c^2} \right) N_l \lambda_0 f_{ul}$$

Dans ce cas optiquement mince,  $W_\lambda$  ne dépend donc plus que de la densité de colonne : c'est une situation très favorable où une seule raie suffit à déterminer celle-ci, via

$$N_l = \frac{4\epsilon_0 m_e c^2}{e^2} \frac{W_\lambda}{\lambda_0^2 f_{ul}}$$

qu'on met sous la forme numérique

$$N_l = 1.13 \cdot 10^{20} \frac{W_\lambda}{\lambda_0^2 f_{ul}}$$

avec  $N_l$  en  $\text{cm}^{-2}$ , et  $W_\lambda$  et  $\lambda_0$  exprimées en Å. On voit que la largeur équivalente est directement proportionnelle à la densité de colonne de l'espèce<sup>23</sup>, ce qu'on représente par la relation

$$\frac{W_\lambda}{\lambda_0} \propto N_l f_{ul} \lambda_0.$$

► Lorsque l'épaisseur optique est très grande  $\tau_{\nu,0} \gg 1/a$ , la raie est saturée jusqu'aux ailes Lorentziennes : aux faibles valeurs de  $u$ , l'argument de l'exponentielle est très grand en valeur absolue et négatif, la quantité sous l'intégrale vaut donc sensiblement 1 jusqu'à une valeur "critique"  $u_c$  de  $u$  telle que

$$\tau_{\nu,0} H(a, u) \simeq \tau_{\nu,0} \frac{a}{\sqrt{\pi} u^2} \simeq 1 \quad \text{soit} \quad u_c \simeq \frac{\sqrt{a\tau_{\nu,0}}}{\pi^{1/4}}$$

23. On sera souvent dans un cas où les particules de l'espèce considérée se trouvent essentiellement sur le niveau inférieur, donc  $N \simeq N_l$ .

On a alors

$$W_\lambda \simeq \int_{-u_c}^{u_c} d\lambda = \int_{-u_c}^{u_c} \Delta\lambda_D du = 2u_c \Delta\lambda_D = \frac{2\sqrt{a\tau_{\nu,0}} \Delta\lambda_D}{\pi^{1/4}}.$$

Avec les expressions de

$$a = \frac{\delta}{\Delta\nu_D} = \frac{\lambda_0^2}{c} \frac{\delta}{\Delta\lambda_D}$$

et

$$\tau_{\nu,0} = N_l \frac{e^2 \lambda_0^2 f_{ul}}{4\sqrt{\pi} \epsilon_0 m_e c^2 \Delta\lambda_D},$$

on obtient finalement

$$\frac{W_\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{e^2}{\pi \epsilon_0 m_e c^3} \delta N_l f_{ul} \lambda_0^2}.$$

### Exercice 83

La taille angulaire caractéristique du lobe du radiotélescope est

$$\theta_{\text{beam}} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

ce qui donne ici, avec  $D = 43$  m et  $\lambda = 21$  cm,  $\theta_{\text{beam}} \simeq 20'$ . On rappelle qu'une minute d'arc est égale à  $1/60^\circ$  de degré, et que la formule ci-dessus donne bien entendu un résultat en radians. La taille du disque de gaz HI de la galaxie UGC 11707 est de  $8'$ , elle est donc non résolue spatialement, de sorte que l'antenne est sensible au flux total de la source (exprimé ici en Jy), et non à sa distribution de brillance.

### Exercice 84

Si on calcule le rapport  $x = h\nu_0/kT_s$ , avec  $\nu_0 = 1420$  MHz (raie radio centimétrique), on trouve

$$x = \frac{h\nu_0}{kT_s} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34} \times 1.42 \cdot 10^9}{1.38 \cdot 10^{-23} \times T_s} = \frac{6.82 \cdot 10^{-2}}{T_s}$$

soit  $x = 1.36 \cdot 10^{-3}$  à  $T = 50$  K et  $x = 6.82 \cdot 10^{-6}$  à  $T = 10000$  K. On est donc toujours dans le domaine  $x \ll 1$  où l'on peut appliquer l'approximation de Rayleigh-Jeans à  $T_s$  dans la formule donnant le coefficient d'absorption monochromatique

$$\kappa_\nu = \frac{c^2 \nu}{8\pi \nu_0^3} A_{ul} n_l \frac{g_u}{g_l} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h\nu_0}{kT_s}\right) \right] \phi(\nu) \simeq \frac{c^2 \nu}{8\pi \nu_0^3} A_{ul} n_l \frac{g_u}{g_l} \frac{h\nu_0}{kT_s} \phi(\nu)$$

On utilise ensuite le fait que  $g_u = 3$  et  $g_l = 1$  :

$$\kappa_\nu = \frac{3c^2 h \nu}{8\pi \nu_0^2 k T_s} A_{ul} n_l \phi(\nu)$$

D'autre part le rapport des populations donne

$$\frac{n_u}{n_l} = \frac{g_u}{g_l} \exp\left(-\frac{h\nu_0}{kT_s}\right) \simeq \frac{g_u}{g_l} = 3$$

On a donc, en introduisant la densité totale des atomes d'hydrogène  $n_H$

$$n_H = n_u + n_l = 4n_l \quad \Rightarrow \quad \kappa_\nu = \frac{3c^2 h \nu}{32\pi \nu_0^2 k T_s} A_{ul} n_H \phi(\nu)$$

Quant à la profondeur optique, elle est définie par l'intégrale de  $\kappa_\nu$  sur la ligne de visée

$$\tau_\nu = \int \kappa_\nu ds = \int \frac{3c^2 h \nu}{32\pi \nu_0^2 k T_s} A_{ul} n_H \phi(\nu) ds = \frac{3c^2 h \nu}{32\pi \nu_0^2 k T_s} A_{ul} N_H \phi(\nu)$$

en introduisant la densité de colonne d'hydrogène atomique neutre  $N_H$ . On a fait ici l'hypothèse d'un milieu homogène, de sorte que  $T_s$  et  $\phi$  ne dépendent pas de la position  $s$  le long de la ligne de visée.

### Exercice 85

On part de la solution générale de l'équation de transfert

$$I_\nu = I_\nu^0 e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu e^{-\tau'} d\tau'$$

et on fait l'hypothèse qu'il n'y a pas de radiation de fond, de sorte que le premier terme disparaît

$$I_\nu = \int_0^{\tau_\nu} S_\nu e^{-\tau'} d\tau'$$

En supposant le milieu homogène, on peut sortir la fonction source et intégrer

$$I_\nu = S_\nu (1 - e^{-\tau_\nu})$$

On peut écrire cette équation en introduisant la température de brillance  $T_b(\nu)$ , dont on rappelle qu'elle est définie par  $I_\nu = B_\nu[T_b(\nu)]$ , ce qui donne

$$\frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left[\frac{h\nu}{kT_b(\nu)}\right] - 1} = B_{\nu_0}(T_s) (1 - e^{-\tau_\nu}) \simeq \frac{2kT_s \nu_0^2}{c^2} (1 - e^{-\tau_\nu}) \simeq \frac{2kT_s \nu_0^2 \tau_\nu}{c^2}$$

puisque la fonction source est  $S_\nu = B_{\nu_0}(T_s)$  comme on l'a vu au 5.2.2. On a ici également fait l'hypothèse que la profondeur optique dans la raie est faible ( $\tau_\nu \ll 1$ ). On a donc

$$\frac{1}{\exp\left[\frac{h\nu}{kT_b(\nu)}\right] - 1} \simeq \frac{kT_s \nu_0^2}{h\nu^3} \times \frac{3c^2 h \nu}{32\pi \nu_0^2 k T_s} A_{ul} N_H \phi(\nu) = \frac{3c^2}{32\pi \nu^2} A_{ul} N_H \phi(\nu)$$

Sachant que la densité de colonne typique de l'hydrogène atomique neutre dans une galaxie telle que UGC 11707 est  $N_H \sim 10^{21} \text{ cm}^{-2}$ , et comme la largeur du profil d'émission HI est  $\delta\nu \simeq 1 \text{ MHz}$  et donc  $\phi(\nu) \simeq 10^{-6} \text{ Hz}^{-1}$ , on a

$$y = \frac{3c^2}{32\pi \nu^2} A_{ul} N_H \phi(\nu) \simeq \frac{3 \times (3 \cdot 10^8)^2}{32 \times 3.14 \times (1.42 \cdot 10^9)^2} \times 2.85 \cdot 10^{-15} \times 10^{25} \times 10^{-6} \simeq 38$$

On en déduit que

$$T_b(\nu) = \frac{h\nu}{k} \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{y}\right)} \simeq \frac{h\nu y}{k} = \frac{3hc^2}{32\pi k \nu} A_{ul} N_H \phi(\nu)$$

ce qui revient à écrire l'approximation de Rayleigh-Jeans pour la température de brillance. Comme la largeur relative de la raie est très faible

$$\frac{\delta\nu}{\nu} \simeq \frac{1 \text{ MHz}}{1420 \text{ MHz}} \simeq 7 \cdot 10^{-4}$$

les fréquences  $\nu$  pour lesquelles  $\phi$  n'est pas négligeable sont toutes sensiblement égales à  $\nu_0$ . En intégrant sur  $\nu$  pour obtenir l'émission totale - en n'oubliant pas que  $T_b(\nu)$  est dépendant de la fréquence - on a

$$\int T_b(\nu) d\nu = \frac{3c^2 h}{32\pi k} A_{ul} N_H \int \frac{\phi(\nu)}{\nu} d\nu \simeq \frac{3c^2 h}{32\pi k} A_{ul} N_H \int \frac{\delta(\nu - \nu_0)}{\nu} d\nu = \frac{3c^2 h}{32\pi \nu_0 k} A_{ul} N_H$$

On a donc une relation donnant la densité de colonne de gaz atomique neutre en fonction de l'émission totale dans la raie

$$N_{\text{H}} = \frac{32\pi\nu_0 k}{3c^2 h A_{ul}} \int T_b(\nu) d\nu$$

En utilisant la projection de la vitesse relative sur la ligne de visée  $v_z$  en lieu et place de la fréquence, on a

$$N_{\text{H}} = \frac{32\pi\nu_0^2 k}{3c^3 h A_{ul}} \int T_b(v_z) dv_z$$

On peut alors mettre la relation précédente sous une forme classiquement utilisée par les radioastronomes

$$\frac{N_{\text{H}}}{\text{cm}^{-2}} \simeq 1.82 \cdot 10^{18} \int \frac{T_b(v_z) dv_z}{\text{K.km.s}^{-1}}$$

### **Exercice 86**

La distance de la galaxie s'estime à partir du redshift et de la loi de Hubble. Sur le spectre, la fréquence centrale du signal est approximativement 1416.2 MHz, ce qui donne

$$z = \frac{1420.4}{1416.2} - 1 = \frac{4.2}{1416.2} \simeq \frac{4.5}{1.5} \cdot 10^{-3} = 0.003$$

La vitesse relative est alors donnée par

$$v = c \left( \frac{\nu_0}{\nu} - 1 \right) = cz \Rightarrow v \simeq 890 \text{ km.s}^{-1}$$

La loi de Hubble  $v = H_0 D$  fournit alors la distance

$$D = \frac{v}{H_0} = \frac{890}{67.4} \simeq 13.2 \text{ Mpc}$$

Pour obtenir la masse de gaz HI de cette galaxie, il faut estimer l'intégrale du flux sur le profil de la raie. On le fait via la valeur moyenne de  $F$ , soit  $\langle F \rangle \simeq 0.35 \text{ Jy}$  et la largeur en vitesse  $\Delta v \simeq 200 \text{ km.s}^{-1}$ , ce qui donne, avec la formule écrite plus haut,

$$M_{\text{H}} \simeq 2.9 \cdot 10^9 M_{\odot}$$

### **Exercice 87**

Pour de l'hydrogène atomique neutre,  $m = m_p$  et la dispersion thermique des vitesses est

$$\sigma_{v_z} \simeq 90\sqrt{T} \text{ m.s}^{-1}$$

donc  $\sigma_{v_z} \simeq 630 \text{ m.s}^{-1}$  à 50 K et  $\sigma_{v_z} \simeq 9 \text{ km.s}^{-1}$  à 10000 K. Or la raie émise par UGC 11707 n'a d'une part pas un profil Gaussien, et d'autre part sa largeur est bien plus grande, de l'ordre de  $200 \text{ km.s}^{-1}$ .

### **Exercice 88**

La fréquence  $\nu_J$  de la transition  $J \rightarrow J+1$  s'exprime en fonction de  $J$  via

$$h\nu_J = E_{J+1} - E_J = (J+2)(J+1)\varepsilon - J(J+1)\varepsilon = 2(J+1)\varepsilon$$

donc  $\nu_J = (J+1)\nu_0$  avec  $\nu_0 = 2\varepsilon/h$  la fréquence de la transition  $0 \rightarrow 1$ . Au laboratoire ( $z = 0$ ) on mesure  $\nu_0(0) = 86.33873 \text{ GHz}$  pour l'espèce  $\text{H}^{13}\text{CN}$ , dont on observe une transition sur le spectre

présenté, aux alentours de 45.78 GHz. Il faut alors déterminer à quelle transition correspond cette raie. Pour cela, on remarque que nécessairement

$$\nu_J(z) = \frac{(J+1)\nu_0}{1+z} > \frac{(J+1)\nu_0}{1+z_Q} = \nu_J(z_Q)$$

puisque  $z < z_Q$ . Dans le cas  $J = 1$  on a

$$\nu_1(z) > \nu_1(z_Q) = \frac{2 \times 86.33873}{1+2.5} \simeq 49 \text{ GHz} > 45,78 \text{ GHz}$$

et pour  $J > 1$  la valeur minimale de la fréquence  $\nu_J(z)$  est encore plus élevée. On en déduit que la transition observée est nécessairement la transition  $0 \rightarrow 1$  et donc

$$\nu_0(z) = \frac{\nu_0}{1+z} \simeq 45.78 \text{ GHz}$$

ce qui donne  $z \simeq 0.89$ .

### Exercice 89

On rappelle que le coefficient d'absorption  $\kappa_\nu$  pour une transition entre deux niveaux  $u$  (supérieur) et  $l$  (inférieur) s'écrit de façon générale

$$\kappa_\nu = \frac{c^2}{8\pi\nu_{ul}^2} A_{ul} n_l \frac{g_u}{g_l} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h\nu_{ul}}{kT_x}\right) \right] \phi(\nu)$$

avec  $T_x$  la température d'excitation,  $\phi(\nu)$  le profil normalisé de la raie,  $\nu_{ul}$  la fréquence de la transition  $u \rightarrow l$  et  $A_{ul}$  le coefficient d'Einstein d'émission spontanée pour cette transition. On a donc pour la transition  $J \rightarrow J+1$

$$\kappa_\nu^{J \rightarrow J+1} = \frac{c^2}{8\pi\nu_J^2} A_{J+1 \rightarrow J} n_J \frac{g_{J+1}}{g_J} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h\nu_J}{kT_x}\right) \right] \phi(\nu)$$

En remplaçant par les expressions des poids statistiques et de  $A_{J+1 \rightarrow J}$ , on a

$$\kappa_\nu^{J \rightarrow J+1} = \frac{c^2}{8\pi\nu_J^2} \frac{64\pi^4 D^2}{3hc^3} \frac{J+1}{2J+3} \nu_J^3 n_J \frac{2J+3}{2J+1} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h\nu_J}{kT_x}\right) \right] \phi(\nu)$$

ce qu'on simplifie en

$$\kappa_\nu^{J \rightarrow J+1} = \frac{8\pi^3 D^2}{3hc} \frac{J+1}{2J+1} \nu_J n_J \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h\nu_J}{kT_x}\right) \right] \phi(\nu)$$

On introduit la fonction de partition pour faire apparaître la densité totale  $n$  de l'espèce<sup>24</sup>

$$n_J = n \frac{g_J}{Z(T_x)} \exp\left(-\frac{E_J}{kT_x}\right)$$

de sorte que

$$\kappa_\nu^{J \rightarrow J+1} = \frac{8\pi^3 D^2}{3hc} \nu_J n \frac{J+1}{Z(T_x)} \exp\left(-\frac{E_J}{kT_x}\right) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E_J - E_{J+1}}{kT_x}\right) \right] \phi(\nu)$$

<sup>24</sup> On fait l'hypothèse que la température d'excitation  $T_x$  est identique pour toutes les paires de niveaux considérées, et qu'elle est homogène sur la ligne de visée.

Du coup, la densité de colonne est donnée par

$$N = N \int \phi(\nu) d\nu = \int ds \int n\phi(\nu) d\nu = \int ds \int \frac{\kappa_{\nu}^{J \rightarrow J+1} \frac{3hc}{8\pi^3 D^2} \frac{1}{\nu_J} \frac{Z(T_x)}{J+1} \exp\left(\frac{E_J}{kT_x}\right)}{\left[1 - \exp\left(\frac{E_J - E_{J+1}}{kT_x}\right)\right]} d\nu$$

On fait un changement de variable pour exprimer l'intégrale en fonction de la vitesse (de manière à rendre le calcul indépendant de la transition considérée), avec donc

$$d\nu = \frac{\nu_J}{c} dv$$

ce qui donne

$$N = \frac{3h}{8\pi^3 D^2} \frac{Z(T_x)}{J+1} \frac{\exp\left(\frac{E_J}{kT_x}\right)}{\left[1 - \exp\left(\frac{E_J - E_{J+1}}{kT_x}\right)\right]} \int \tau_{\nu}^{J \rightarrow J+1} dv \quad \text{avec} \quad \tau_{\nu}^{J \rightarrow J+1} = \int \kappa_{\nu}^{J \rightarrow J+1} ds$$

### **Exercice 90**

En considérant la transition  $0 \rightarrow 1$

$$N = \Lambda \frac{Z(T_x)}{1 - \exp\left(\frac{-2\varepsilon}{kT_x}\right)} W_{0 \rightarrow 1}$$

et la transition  $1 \rightarrow 2$

$$N = \frac{\Lambda}{2} \frac{Z(T_x) \exp\left(\frac{2\varepsilon}{kT_x}\right)}{1 - \exp\left(\frac{-4\varepsilon}{kT_x}\right)} W_{1 \rightarrow 2}$$

on fait le rapport des deux relations, ce qui élimine la densité de colonne de  $\text{H}^{13}\text{CN}$  et la fonction de partition

$$1 = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{2\varepsilon}{kT_x}\right) \frac{1 - \exp\left(\frac{-2\varepsilon}{kT_x}\right)}{1 - \exp\left(\frac{-4\varepsilon}{kT_x}\right)} \frac{W_{1 \rightarrow 2}}{W_{0 \rightarrow 1}}$$

On pose alors

$$T_0 = \frac{\varepsilon}{k} \quad \text{et} \quad u = \frac{T_0}{T_x} = \frac{\varepsilon}{kT_x}$$

ce qui donne

$$2 = e^{2u} \frac{1 - e^{-2u}}{1 - e^{-4u}} \frac{W_{1 \rightarrow 2}}{W_{0 \rightarrow 1}} = e^{3u} \frac{e^u - e^{-u}}{e^{2u} - e^{-2u}} \frac{W_{1 \rightarrow 2}}{W_{0 \rightarrow 1}}$$

qu'on peut mettre sous une forme plus simple

$$2 = e^{3u} \frac{\sinh u}{\sinh 2u} \frac{W_{1 \rightarrow 2}}{W_{0 \rightarrow 1}} = \frac{e^{3u}}{2 \cosh u} \frac{W_{1 \rightarrow 2}}{W_{0 \rightarrow 1}}$$

On en déduit que la température d'excitation doit vérifier la condition suivante

$$F\left(\frac{T_0}{T_x}\right) = \frac{W_{1 \rightarrow 2}}{4W_{0 \rightarrow 1}} \quad \text{avec} \quad F(u) = e^{-3u} \cosh(u)$$

La température caractéristique  $T_0$  pour  $\text{H}^{13}\text{CN}$  est  $T_0 \simeq 2.0709$  K. Muller *et al.* (2013) donnent, pour les deux transitions rotationnelles de  $\text{H}^{13}\text{CN}$  observées,

$$W_{0 \rightarrow 1} = 4.966 \text{ km.s}^{-1} \quad \text{et} \quad W_{1 \rightarrow 2} = 6.393 \text{ km.s}^{-1}$$

On en déduit la valeur de  $T_x$  par une résolution numérique :

$$u \simeq 0.4023 \quad \Longrightarrow \quad T_x \simeq \frac{2.0709}{0.4023} \simeq 5.148 \text{ K}$$

La température du fond diffus cosmologique dépend du redshift  $z$  par la relation

$$T_{\text{CMB}}(z) = (1 + z)T_{\text{CMB}}(0)$$

Comme  $z = 0.89$  et  $T_{\text{CMB}}(0) = 2.725$  K, on a  $T_{\text{CMB}}(0.89) \simeq 5.15$  K, et on en déduit que les populations des niveaux sont déterminées par le couplage au rayonnement du fond diffus cosmologique.

## Les transitions collisionnelles et les écarts à l'ETL

### 6.1 Transitions collisionnelles

L'établissement de l'**équilibre thermodynamique local (ETL)**, étudié au chapitre 4, suppose un couplage fort entre la matière et le rayonnement, c'est-à-dire que les processus permettant un échange d'énergie de l'un vers l'autre et vice versa sont suffisamment fréquents. Dans ce cas, on a vu que d'une part la fonction source du rayonnement est simplement la fonction de Planck, et que d'autre part les populations des niveaux d'énergie des atomes et des molécules obéissent à la distribution de Boltzmann.

Dans une description plus générale, les processus mis en jeu pour déterminer les populations des niveaux incluent les **transitions radiatives** caractérisées par les coefficients d'Einstein  $A_{ul}$ ,  $B_{ul}$  et  $B_{lu}$ , mais également des **transitions collisionnelles** - sans émission ou absorption de rayonnement :

► Un atome ou une molécule  $A$  dans un état d'énergie  $E_l$  peut être excité vers un état d'énergie  $E_u > E_l$  par interaction avec une particule excitatrice  $p$ , d'énergie cinétique suffisante, et qui en cède une partie  $E_{ul} = E_u - E_l$  à  $A$ .

► Un atome ou une molécule  $A$  dans un état d'énergie  $E_u$  peut être désexcité vers un état d'énergie  $E_l < E_u$  par interaction avec une particule excitatrice  $p$ , qui récupère alors l'énergie  $E_{ul} = E_u - E_l$  sous forme d'énergie cinétique.

L'ETL est caractérisé par la **microréversibilité des processus**, c'est-à-dire que chaque processus d'excitation d'un niveau vers un autre est exactement compensé par un processus de désexcitation inverse. Autrement dit, il y a **autant d'excitations radiatives que de désexcitations radiatives, et autant d'excitations collisionnelles que de désexcitations collisionnelles**.

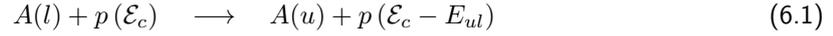
Des écarts à l'ETL (on parle de situation **hors ETL** ou **NLTE** en anglais) ont lieu lorsque le milieu n'est pas assez dense, que l'épaisseur optique n'est pas assez grande, dans un gaz froid et de faible densité tel que celui rencontré dans le milieu interstellaire. La microréversibilité ne s'applique alors plus, et le milieu est simplement dans un état stationnaire<sup>1</sup> pour lequel **les populations des niveaux sont le résultat de l'ensemble des processus, radiatifs et collisionnels**, pouvant les peupler ou les dépeupler. La fonction source doit alors être calculée à partir de ces populations, et en retour elle peut en influencer le calcul via les processus induits. Dans le cas le plus général, on est donc amenés à devoir considérer des **équations différentielles couplées non-linéaires entre le champ de rayonnement et les populations des niveaux**.

1. hypothèse qui doit parfois aussi être relaxée pour les systèmes subissant des variations rapides (chocs, ...)

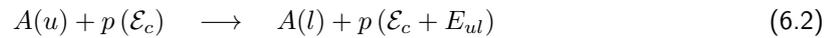
## 6.2 Coefficients d'excitation et désexcitation collisionnelles

### 6.2.1 Définition des coefficients

Comme on vient de le dire, un atome, une molécule ou ion  $A$  peut être excité non seulement par absorption d'un photon, mais aussi par **collision avec un partenaire**  $p$ . Considérant par exemple que  $A$  se trouve sur un niveau d'énergie  $l$  et que  $p$  possède une énergie cinétique  $\mathcal{E}_c \geq E_{ul}$ , on peut avoir une **excitation collisionnelle** de  $A$ , qu'on écrira sous la forme



Inversement, si  $A$  est déjà sur un niveau excité  $u$ , il peut en être délogé par interaction avec un partenaire de collision qui récupère l'énergie supplémentaire :



Dans ce cas de figure de **désexcitation collisionnelle**, il n'y a bien entendu pas de seuil en énergie requis, contrairement au cas de l'excitation collisionnelle.

Ces deux processus sont caractérisés par des **coefficients d'excitation et de désexcitation collisionnelle**, appelés aussi **taux de collisions** et notés respectivement  $C_{lu}$  et  $C_{ul}$ . On définit le premier en écrivant que  $C_{lu}n_p n_l$  représente le nombre d'excitations collisionnelles  $l \rightarrow u$  par unité de volume et par unité de temps, où  $n_p$  est la densité des partenaires de collision et  $n_l$  la population du niveau inférieur. De même, on définit le second coefficient en écrivant que  $C_{ul}n_p n_u$  représente le nombre de désexcitations collisionnelles  $u \rightarrow l$  par unité de volume et par unité de temps.

Le bilan pour le niveau inférieur  $l$  est alors, en l'absence d'autres processus de transition,

$$\frac{dn_l}{dt} = -C_{lu}n_p n_l + C_{ul}n_p n_u \quad (6.3)$$

Ces coefficients  $C_{lu}$  et  $C_{ul}$  s'expriment en  $\text{cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  dans le système CGS.

### 6.2.2 Remarques

Notons que l'écriture-bilan précédente fait plusieurs hypothèses implicites.

#### Systemes à plus de deux niveaux

D'une part, elle suppose que  $A$  est correctement décrit comme un système à deux niveaux. En effet, en toute généralité, pour écrire le bilan concernant la population d'un niveau  $i$  il faut considérer l'ensemble des transitions vers et en provenance de ce niveau, soit :

$$\frac{dn_i}{dt} = n_p \left[ \sum_{j \neq i} C_{ji} n_j - \left( \sum_{j \neq i} C_{ij} \right) n_i \right] \quad (6.4)$$

et il faut aussi en toute rigueur considérer le couplage possible avec un continuum de niveaux (**ionisation collisionnelle** et **recombinaison**).

### Prise en compte des transitions radiatives

D'autre part, la population du niveau  $l$  peut aussi varier via des transitions radiatives avec le niveau  $u$ , de sorte que la variation de la population de ce niveau s'écrit (voir le chapitre 5)

$$\frac{dn_l}{dt} = -C_{lu}n_p n_l + C_{ul}n_p n_u + A_{ul}n_u + B_{ul}n_u \bar{J} - B_{lu}n_l \bar{J} \quad (6.5)$$

Là encore on a ignoré la présence des autres niveaux et du continuum.

### Multiplicité des partenaires de collision

Enfin, les coefficients de transitions collisionnelles dépendent de la nature du partenaire  $p$ . En général, ce sont les électrons libres qui dominent, mais les collisions avec les atomes d'hydrogène peuvent devenir prépondérantes dans les nuages interstellaires froids, notamment pour la transition à 21 cm de HI. Il faudra aussi parfois considérer les collisions avec  $H_2$  (dans le milieu moléculaire) ou avec He. On écrira donc une équation bilan pour la population  $n_l$  sous la forme

$$\frac{dn_l}{dt} = \sum_p n_p [C_{ul}^{(p)} n_u - C_{lu}^{(p)} n_l], \quad (6.6)$$

là encore en ignorant les autres effets possibles (transitions radiatives, autres niveaux).

**L'écriture la plus générale possible de cette équation de variation des populations des niveaux énergétiques, même si elle ne présente pas de difficulté conceptuelle, peut donc devenir particulièrement lourde. On ne l'explicitera pas.**

### 6.2.3 Lien avec les sections efficaces

Les coefficients des transitions collisionnelles sont liés à des **sections efficaces** correspondantes  $s_{ul}$  et  $s_{lu}$ , qui dépendent de la vitesse relative  $v = ||\mathbf{v}||$  des partenaires de collision et des particules,

$$C_{lu} = \langle s_{lu}(v)v \rangle_{v \geq v_{lu}} \quad \text{et} \quad C_{ul} = \langle s_{ul}(v)v \rangle \quad (6.7)$$

où la moyenne est prise sur la distribution  $f(\mathbf{v})$  de cette vitesse, en se limitant, pour le cas de l'excitation, aux vitesses suffisantes pour permettre l'excitation, soit <sup>2</sup>

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m_p v^2 \geq E_{ul} \quad \text{donc} \quad v \geq v_{lu} = \sqrt{\frac{2E_{ul}}{m_p}} \quad (6.8)$$

En explicitant l'écriture de cette moyenne sur les distributions de vitesse, on a alors

$$C_{lu} = \int_{v_{lu}}^{\infty} f(\mathbf{v}) s_{lu}(v) 4\pi v^3 dv \quad \text{et} \quad C_{ul} = \int_0^{\infty} f(\mathbf{v}) s_{ul}(v) 4\pi v^3 dv \quad (6.9)$$

2. Notons qu'on se place dans un cadre non-relativiste. Dans le cas où les partenaires de collision sont les électrons, ils sont beaucoup moins massifs et donc beaucoup plus rapides - à température égale - que les atomes, ions ou molécules cibles. La vitesse relative est donc simplement leur vitesse.

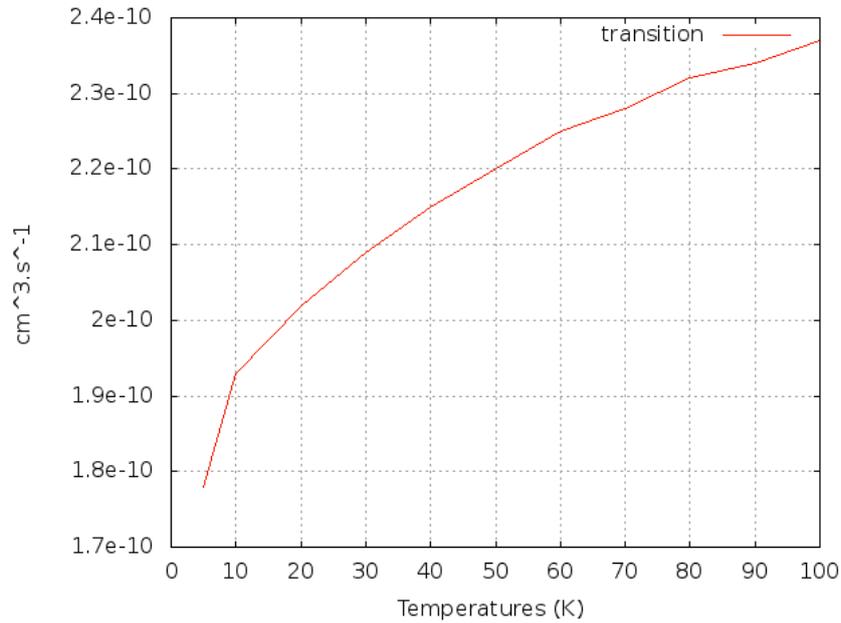


FIGURE 6.1 – **Exemple de coefficient de désexcitation collisionnelle.** Cas de la désexcitation collisionnelle  $C_{21}$  de CO ( $J = 2 \rightarrow 1$ ) par H entre 5 K et 100 K. Figure réalisée sur BASECOL [10], avec des données de [3].

**Exercice 91 : Justifier les écritures (6.7)-(6.9) des sections efficaces de collision.**

Les sections efficaces de collision sont déterminées soit expérimentalement, soit par des calculs complexes de mécanique quantique, et sont accessibles via des bases de données en ligne, comme BASECOL<sup>3</sup> (voir la Fig. 6.1). Notons que certaines d’entre elles sont encore très mal connues.

Notons également que les résultats fournis dans ces bases de données sont généralement donnés en termes des coefficients  $C_{lu}$  et  $C_{ul}$ , pour plusieurs températures  $T$ , **en faisant l’hypothèse d’une distribution Maxwellienne des vitesses des partenaires de collision**, soit<sup>4</sup>

$$C_{lu}(T) = \int_{v_{lu}}^{\infty} \left( \frac{m_p}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) s_{lu}(v) 4\pi v^3 dv \quad (6.10)$$

$$C_{ul}(T) = \int_0^{\infty} \left( \frac{m_p}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) s_{ul}(v) 4\pi v^3 dv \quad (6.11)$$

L’écriture ci-dessus permet de mettre en évidence que les coefficients des transitions collisionnelles sont sensibles aux conditions physiques, i.e., la température cinétique  $T$  du gaz des partenaires de collision. On montre un peu plus bas qu’on a la dépendance

$$C_{ul}(T) \propto \sqrt{T}. \quad (6.12)$$

3. <http://basecol.obspm.fr>, [10].  
 4. Si dans les conditions du milieu étudié on ne peut faire l’hypothèse d’une distribution Maxwellienne des vitesses, il faudra prendre garde à cette restriction quant aux données de la littérature. Dans les plasmas spatiaux, on observe souvent des queues non-Gaussiennes à haute énergie, ajustée par des fonctions de distribution dites  $\kappa$  [38].

## 6.2.4 Relation entre $C_{lu}$ et $C_{ul}$

Les définitions de  $C_{lu}$  et  $C_{ul}$  écrites juste au dessus font uniquement l'hypothèse que la distribution des vitesses des partenaires de collision est Maxwellienne, ce qui est réalisé assez fréquemment. Elles ne font pas l'hypothèse que le milieu est à l'ETL, mais on peut se placer dans ce cas particulier pour en tirer une relation entre  $C_{lu}$  et  $C_{ul}$ . On a dans ce cas microréversibilité des processus, et par conséquent

$$C_{lu}n_p n_l = C_{ul}n_p n_u \implies \frac{C_{lu}}{C_{ul}} = \frac{n_u}{n_l} = \frac{g_u}{g_l} \exp\left(-\frac{E_{ul}}{kT}\right) \quad (6.13)$$

Cette dernière égalité (portant sur le rapport des populations) n'est valable qu'à l'ETL, mais la relation entre  $C_{lu}$  et  $C_{ul}$  qu'on en tire est, elle, valable en dehors de l'ETL, dès lors que la distribution  $f(v)$  des vitesses des partenaires de collision est une maxwellienne à la température cinétique  $T$ ,

$$C_{lu} = C_{ul} \frac{g_u}{g_l} \exp\left(-\frac{E_{ul}}{kT}\right) \quad (6.14)$$

La raison en est qu'elle ne dépend que de l'écart en énergie  $E_{ul}$  et de  $T$ .

Exemple : On a un ordre de grandeur des taux de collisions en écrivant  $s_{ul} \sim \pi r^2$  avec  $r$  le rayon de collision, voisin du rayon de l'atome mis en jeu, soit  $r \sim 10^{-8}$  cm. Pour un gaz à  $T \sim 10^4$  K,

$$C_{ul} \sim s_{ul} \langle v \rangle \sim \pi r^2 \sqrt{\frac{kT}{m_e}} \sim 10^{-8} \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1} \quad (6.15)$$

en prenant comme vitesse caractéristique la vitesse quadratique moyenne et comme partenaire de collision les électrons libres (à cette température, ce sont eux qui dominent les collisions).

Note : Les **transitions électroniques** présentent des écarts en énergie de l'ordre de quelques eV, donc des transitions optiques ou UV ( $\nu_{ul} \sim 10^{14} - 10^{15}$  Hz). Pour un gaz à  $T \sim 10^4$  K ou moins, le facteur exponentiel dans l'expression de  $C_{lu}(T)$  est très petit, et on a donc  $C_{lu} \ll C_{ul}$  : **la désexcitation collisionnelle est bien plus facile que l'excitation collisionnelle**. Bien entendu, pour des transitions de plus basse énergie, notamment des **transitions rotationnelles** de molécules, **le rapport entre l'excitation et la désexcitation collisionnelles est beaucoup moins déséquilibré**.

## 6.2.5 Bilan détaillé

La relation (6.14) peut être vue comme une intégration sur la distribution des vitesses d'une équation de **bilan détaillé** exprimant que les populations des niveaux sont déterminées par un équilibre entre les **collisions anélastiques** et les **collisions super-élastiques**. Pour les premières, l'énergie cinétique des partenaires diminue, la différence étant convertie en énergie d'excitation électronique (excitation collisionnelle), tandis que pour les secondes, les partenaires ressortent de la collision avec une énergie cinétique plus grande, extraite de l'énergie interne (désexcitation collisionnelle). Ce bilan détaillé s'écrit

$$n_p n_l f(v) s_{lu}(v) 4\pi v^3 dv = n_p n_u f(v') s_{ul}(v') 4\pi v'^3 dv' \quad (6.16)$$

où les vitesses (relatives)  $v$  et  $v'$  sont bien entendu reliées par la conservation de l'énergie

$$\frac{1}{2} m_p v^2 = \frac{1}{2} m_p v'^2 + E_{ul}. \quad (6.17)$$

## 6.3 Équilibre statistique des niveaux

### 6.3.1 Équilibre statistique d'un système à deux niveaux

Hors ETL, on n'a plus un équilibre statistique séparé pour les transitions radiatives d'une part et collisionnelles d'autre part, mais un **équilibre global** (en supposant cependant qu'un équilibre stationnaire soit atteint dans le milieu, ce qui exclut les phénomènes rapidement variables). Pour simplifier, on va considérer le cas d'un système réduit à deux niveaux<sup>5</sup>. On a alors, à l'équilibre,

$$C_{ul}n_p n_u + A_{ul}n_u + B_{ul}n_u \bar{J} = C_{lu}n_p n_l + B_{lu}n_l \bar{J} \quad (6.18)$$

où  $\bar{J}$  est l'intensité moyenne intégrée sur le profil de la raie (voir l'équation. 5.5).

### 6.3.2 Fonction source

#### Forme de la fonction source

On a vu que la fonction source de la raie, qui détermine l'émission du milieu, peut s'exprimer comme une fonction de Planck, en faisant intervenir la température d'excitation  $T_x$ , soit  $S_\nu = B_{\nu_{ul}}(T_x)$ , qu'on soit à l'ETL ou pas<sup>6</sup>. D'autre part, le gaz des partenaires de collision étant caractérisé par une température cinétique  $T$ , on peut se demander si la fonction source peut s'écrire sous une forme qui fait intervenir la fonction de Planck à cette température  $T$ . En effet, on peut montrer que

$$S_\nu = \frac{\bar{J} + \eta B_{\nu_{ul}}(T)}{1 + \eta} \quad (6.19)$$

où le paramètre  $\eta$  est défini par la relation

$$\eta = \frac{C_{ul}n_p}{A_{ul}} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E_{ul}}{kT}\right) \right] \quad (6.20)$$

#### Exercice 92 : Démontrer la relation (6.19).

#### Interprétation

Le paramètre  $\eta$  donne une estimation du rapport entre les désexcitations collisionnelles et les désexcitations radiatives<sup>7</sup>, et son inverse  $1/\eta$  est donc une mesure de l'écart à l'ETL.

► Lorsqu'on est proche de cet état, à grande densité  $n_p$ , les collisions - caractérisées par la température cinétique  $T$  - déterminent les populations des niveaux, et donc  $\eta \gg 1$ , on a alors  $S_\nu \simeq B_{\nu_{ul}}(T)$ . Comme  $S_\nu = B_{\nu_{ul}}(T_x)$ , en introduisant la température d'excitation, on a dans ce cas  $T \simeq T_x$ , comme prévu. Cette partie  $\eta B_{\nu_{ul}}(T)$  de la fonction source est appelée **terme d'absorption**.

► Lorsqu'en revanche on est loin de l'ETL, dans les milieux de faible densité ou en présence d'un champ de rayonnement très intense, les populations des niveaux sont essentiellement déterminées par les transitions radiatives. On a alors  $\eta \ll 1$  et  $S_\nu \simeq \bar{J}$ . Cette partie  $\bar{J}$  de la fonction source est appelée **terme de diffusion**.

5. On verra d'ailleurs que cette hypothèse est justifiée dans un certain nombre de cas.

6. Il ne faut pas oublier que cette expression suppose l'identité des profils en émission et en absorption.

7. Le facteur exponentiel permet d'inclure les processus d'émission stimulée dans le bilan.

## Densité critique

Le paramètre  $\eta$  est lié au rapport suivant, appelé **densité critique**, du fait que  $\eta \simeq n_p/n_{\text{crit}}$

$$n_{\text{crit}} = \frac{A_{ul}}{C_{ul}} \quad (6.21)$$

Typiquement, lorsque la densité des particules dominant les collisions est nettement supérieure à la densité critique,  $n_p \gg n_{\text{crit}}$  on s'attend à ce que les populations des niveaux en question suivent la statistique de Boltzmann. On dit que **les niveaux sont thermalisés**.

### 6.3.3 Influence des autres niveaux et du continuum

Si le système considéré contient d'autres niveaux (ou un continuum d'énergie) couplés aux niveaux considérés, il faut en tenir compte dans les équations d'équilibre statistiques pour  $u$  et  $l$ . L'expression de la fonction source dans ce cas peut se mettre sous une forme similaire

$$S_\nu = \frac{\bar{J} + \eta B_{\nu ul}(T) + \eta'}{1 + \eta + \eta''} \quad (6.22)$$

où  $\eta'$  et  $\eta''$  contiennent tous les termes concernant les autres niveaux.

### 6.3.4 Écriture aux basses fréquences

Aux basses fréquences, en radioastronomie, on a l'habitude de travailler avec des températures, du fait de la linéarité consécutive à l'approximation de Rayleigh-Jeans. On introduit notamment la température radiative  $T_r$  par  $J_\nu = B_\nu(T_r)$ , et on montre alors que la relation (6.19) se met sous la forme

$$T_x \simeq T \frac{T_r + T_0}{T + T_0} \quad (6.23)$$

en introduisant la température caractéristique

$$T_0 = \frac{C_{ul} n_p}{A_{ul}} \frac{h\nu_{ul}}{k}. \quad (6.24)$$

**Exercice 93 :** Démontrer la relation (6.23). On supposera la raie assez fine pour que la fonction de Planck ne varie pas appréciablement sur son étendue  $\delta\nu$ .

On voit donc que  $T_x$  est comprise entre  $T_r$  (caractéristique du rayonnement) et  $T$  (caractéristique de l'état du gaz des partenaires de collision). Aux faibles densités, on a  $\eta \ll 1$ , soit  $T_0 \ll T$ , et donc  $T_x \simeq T_r$ , et inversement, aux fortes densités, on a  $\eta \gg 1$ , soit  $T_0 \gg T$ , et donc  $T_x \simeq T$ , ce qui traduit la situation d'ETL.

## 6.4 Exemple : retour sur la raie à 21 cm du gaz HI

### 6.4.1 Raie formée à l'ETL

Prenant l'exemple de la raie HI à 21cm, elle se forme dans des milieux où les collisions dominantes sont celles entre atomes d'hydrogène, et le taux de désexcitations collisionnelles pour ce cas de figure

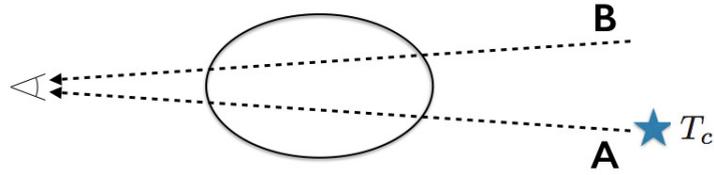


FIGURE 6.2 – **Lignes de visée au travers d’un nuage HI.** La ligne de visée A est en direction d’une source ponctuelle brillante dans le continuum radio, en arrière-plan. La ligne de visée B ne comporte pas de source en arrière-plan.

est donné par  $C_{ul} \simeq 2 \cdot 10^{-10} \sqrt{T} \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ , où  $u$  et  $l$  sont les deux sous-niveaux hyperfins participant à la transition. On montre alors que

$$\eta \simeq 4.78 \cdot 10^3 \frac{n_{\text{H}}}{\sqrt{T}}, \quad (6.25)$$

en exprimant la densité  $n_{\text{H}}$  en  $\text{cm}^{-3}$  et la température en K. On voit donc que  $\eta > 1$  dès lors que  $n_{\text{H}} \gtrsim 2 \cdot 10^{-4} \sqrt{T}$ , ce qui est presque toujours largement réalisé dans les nuages froids où se forme la raie. **On en déduit que la raie à 21 cm se forme à l’ETL dans un milieu qui lui est loin de l’être globalement.** La densité est faible, mais comme  $A_{ul} \ll 1$  on a néanmoins  $n_{\text{H}} \gg n_{\text{crit}}$ .

**Exercice 94 :** Démontrer la relation (6.25).

#### 6.4.2 Raie en absorption et en émission

L’observation de la raie à 21 cm dans une source étendue, en absorption devant une source ponctuelle brillante dans le continuum à cette même longueur d’onde, permet d’estimer à la fois **l’épaisseur optique  $\tau_{\nu}$  dans la raie, la température d’excitation<sup>8</sup>  $T_x$ , et la densité de colonne  $N_{\text{H}}$**  dans la source en avant-plan. En considérant la situation schématisée sur la Fig. 6.2, où le nuage de gaz atomique neutre HI est supposé homogène, on montre en effet que

$$\tau_{\nu} = \ln \left[ \frac{T_{b,\nu_1}^{(A)}}{T_{b,\nu}^{(A)} - T_{b,\nu}^{(B)}} \right] \quad (6.26)$$

où  $T_{b,\nu}$  désigne la température de brillance, dépendant de la ligne de visée (A ou B) considérée, et où la fréquence  $\nu_1$  est choisie hors de la raie.

On peut alors obtenir  $T_x$  (qui est égale à  $T$  puisque  $\eta \gg 1$ ) à partir de la brillance sur la ligne de visée B, et on en déduit la densité de colonne  $N_{\text{H}}$  en identifiant l’expression (6.26) de la relation (5.65).

**Exercice 95 :** Démontrer la relation (6.26) ainsi que l’affirmation selon laquelle on peut alors obtenir  $T_x$  à partir de la brillance sur la ligne de visée B.

Si l’on n’a pas accès à une mesure en absorption (ligne de visée A), on ne peut pas directement estimer l’épaisseur optique et la température d’excitation, mais on peut tout de même avoir accès à la densité de colonne si l’on fait l’hypothèse d’un nuage optiquement mince, car alors

$$T_{b,\nu}^{(B)} \simeq \frac{3c^2 h \nu}{32\pi \nu_0^2 k} A_{ul} N_{\text{H}} \phi(\nu) \quad (6.27)$$

8. On rappelle que dans ce cas, on l’appelle également température de spin.

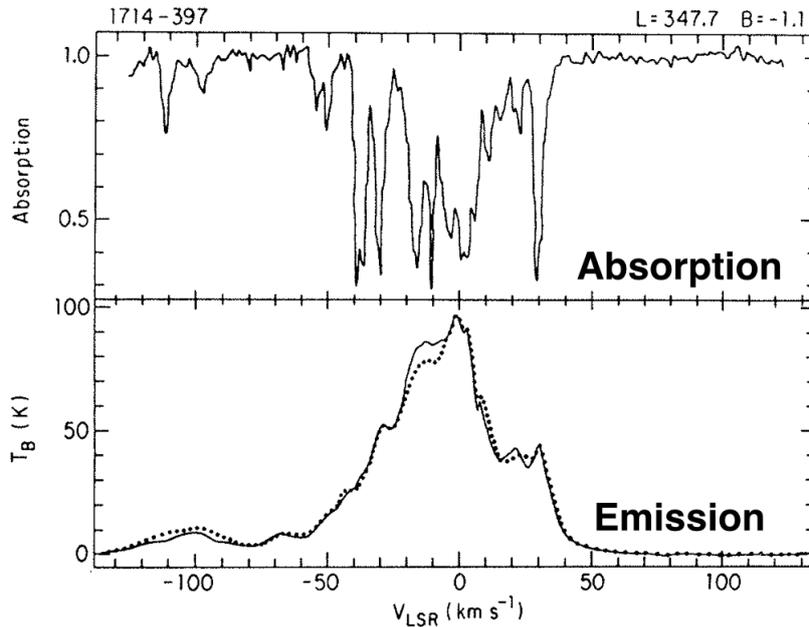


FIGURE 6.3 – Exemple de spectre en émission et en absorption dans la raie HI à 21 cm. (Source : <http://www.cv.nrao.edu/course/astr534/ERA.shtml>.)

### Exercice 96 : Établir la relation (6.27).

*Note* : Il faut cependant remarquer que les nuages HI sont souvent inhomogènes, et que leur température varie d'un nuage à l'autre sur une même ligne de visée. Or **la température pondère différemment l'absorption et l'émission** puisque le rapport des deux, c'est-à-dire la fonction source, dépend de la température. C'est pourquoi on observe des spectres tels que ceux de la Fig. 6.3, sur lesquels on distingue des **composantes étroites et larges**. Les premières se trouvent à la fois en absorption et en émission, les secondes uniquement en émission. Ceci s'explique par le fait que les composantes larges correspondent à des régions de gaz chaud ( $10^3$  K) dont l'épaisseur optique  $\tau_\nu \propto 1/T_x$  (voir l'équation 5.65) est fortement réduite. C'est cette observation qui a permis de déterminer l'existence de tels nuages chauds.

## 6.5 Probabilité d'échappement et approximation de Sobolev

### 6.5.1 Échappement dans l'espace des vitesses

L'une des difficultés majeures du problème du transfert radiatif, notamment dans la formation des raies, est le **couplage entre différentes régions** du milieu considéré : en effet, un photon de raie peut être émis à un certain point A et réabsorbé en un point B, ce qui d'une part implique qu'il ne sera pas observé et donc modifie le calcul du rayonnement reçu par l'instrument, et d'autre part modifie le bilan énergétique en B.

À première vue, la prise en compte de **mouvements macroscopiques** du gaz peut sembler ajouter une complexité supplémentaire, mais en réalité, dans certains cas, elle permet de grandement simplifier le problème de la formation des raies, en découplant les différentes régions du milieu émetteur. En effet, en raison de **l'effet Doppler**, si le point B se déplace par rapport à A à une vitesse suffisamment grande,

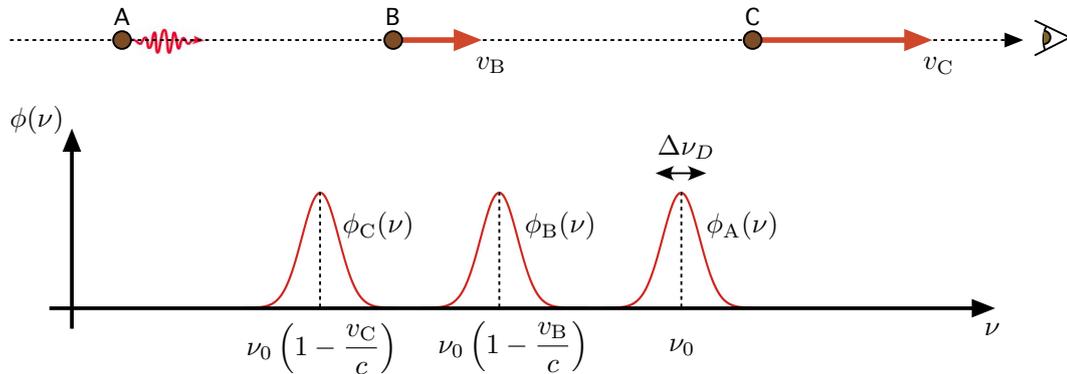


FIGURE 6.4 – **Principe de l'échappement des photons dans l'espace des vitesses.** Le photon de raie émis en A a une fréquence contenue dans le profil d'émission  $\phi_A(\nu)$ . En B et C, les profils d'absorption  $\phi_B(\nu)$  et  $\phi_C(\nu)$  sont décalés par effet Doppler.

le photon émis dans la raie en A apparaît, pour le gaz susceptible de l'absorber situé en B, comme ayant une **fréquence située en dehors du profil d'absorption**  $\phi_B(\nu)$  (voir la Fig. 6.4). Par conséquent, si cette situation se présente pour toutes les régions entre A et la sortie du nuage, le photon ne sera pas absorbé et pourra donc être observé. On dit que **le photon s'échappe dans l'espace des vitesses**.

### 6.5.2 Approximation LVG

La discussion qui suit reprend celle de [45], où l'on trouvera le détail des calculs. Utilisant les notations de la Fig. 6.5, considérons l'émission de raie venant d'un point  $\mathbf{r}$  se déplaçant à la vitesse  $\mathbf{u}$ , et notons  $\mathbf{k}$  le vecteur unitaire le long de la ligne de visée<sup>9</sup> reliant le point  $\mathbf{r}$  à l'observateur situé en  $\mathbf{r}_0$ . On note  $s$  la distance entre  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}_0$ , soit  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} + s\mathbf{k}$ . On note  $l$  **la taille caractéristique sur laquelle la variation de la vitesse le long de la ligne de visée est comparable à la dispersion de vitesse thermique**  $\sigma_{\text{th}}$ , soit

$$l = \frac{\sigma_{\text{th}}}{\mathbf{k} \cdot \nabla (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})} \quad (6.28)$$

**Exercice 97 :** Établir l'expression (6.28) de cette taille caractéristique.

Notons maintenant  $L$  la taille caractéristique des variations des grandeurs macroscopiques telle que la densité. Si  $l \ll L$  et  $|\mathbf{u}| \ll c$ , on peut supposer que **le gaz en  $\mathbf{r}$  émet une raie à la fréquence unique**

$$\nu_c(\mathbf{r}) = \nu_0 \left[ 1 + \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})}{c} \right] \quad (6.29)$$

où  $\nu_0$  est la fréquence de la raie pour un émetteur de vitesse nulle.

Cette équation peut être vue inversement comme une **équation déterminant implicitement la position  $\mathbf{r}_\nu$  émettant à la fréquence  $\nu$**  et le problème du transfert radiatif est simplifié s'il existe au plus une solution  $\mathbf{r}_\nu$  pour toute fréquence  $\nu$ . On peut montrer (voir [45] p. 86-87) que c'est le cas pour les écoulements de **pure expansion** (vents stellaires, supernovæ) ou de **pure contraction**

9. On fait l'hypothèse que l'observateur se trouve à suffisamment grande distance pour que le vecteur  $\mathbf{k}$  puisse être considéré comme constant.

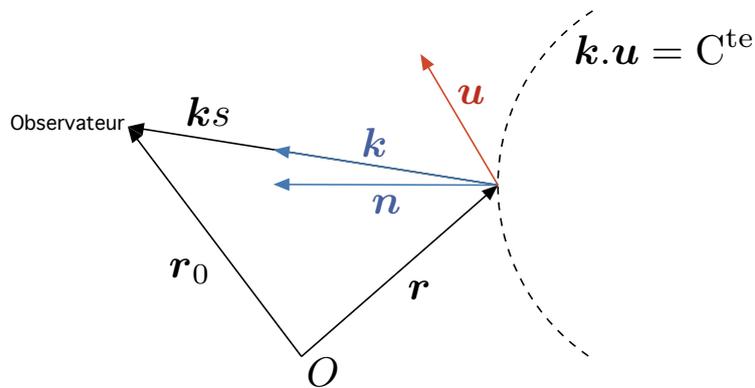


FIGURE 6.5 – Mise en place du calcul de l'approximation de Sobolev. Figure adaptée de [45].

(effondrement gravitationnel). Ce cas de figure constitue l'**approximation de Sobolev**, aussi appelée **approximation LVG** pour **Large Velocity Gradient**, qui est utilisée dans des codes de transfert radiatif comme RADEX<sup>10</sup> [49]. Il permet de prendre comme profil d'absorption au point  $r$  une distribution de Dirac centré sur la fréquence (6.29), soit  $\phi_r(\nu) = \delta[\nu - \nu_c(r)]$ .

### 6.5.3 Rayonnement émergent

Pour simplifier, on suppose qu'il n'y a pas de rayonnement de fond et que les populations impliquées dans la formation de la raie sont à l'ETL à la température  $T$ , laquelle peut varier de point en point.

Aux fréquences  $\nu$  pour lesquelles il n'existe pas, sur la ligne de visée, de solution  $r_\nu$  à l'équation  $\nu_c(r) = \nu$ , l'**intensité spécifique émergente est nulle**,  $I_\nu(\mathbf{k}) = 0$ .

En revanche, aux fréquences  $\nu$  telles qu'il existe une **unique solution**  $r_\nu$  à cette équation sur la ligne de visée considérée, on montre que l'intensité émergente est

$$I_\nu(\mathbf{k}) = B_\nu [T(r_\nu)] (1 - e^{-\tau_\nu}) \quad (6.30)$$

où l'épaisseur optique dans la raie est donnée par

$$\tau_\nu = \frac{n_l f_{ul} e^2}{4\epsilon_0 m_e \nu_0} \frac{1}{|\mathbf{k} \cdot \nabla(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})|} \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{h\nu}{kT(r_\nu)} \right] \right\} \quad (6.31)$$

**Exercice 98 :** Démontrer les formules (6.30) et (6.31). On partira de la solution formelle de l'équation du transfert, et on notera que l'approximation LVG implique que la fonction source ne varie pas significativement à l'échelle  $l$  (équation 6.28) sur laquelle le coefficient d'absorption est significativement différent de zéro.

10. <http://home.strw.leidenuniv.nl/~moldata/radex.html>

On peut alors montrer (voir [45] pour le détail du calcul) que la **luminosité de la raie** dans l'approximation LVG se met sous la forme

$$L = \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} 4\pi \frac{\nu_0}{c} I_\nu |\mathbf{k} \cdot \nabla (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})| d\phi \quad (6.32)$$

où  $(r, \theta, \phi)$  sont les coordonnées sphériques de la région émettrice, et  $I_\nu$  est donnée par l'équation (6.30). Dans le cas **optiquement mince**, on montre alors que cette luminosité s'écrit

$$L^{\text{thin}} = h\nu_{ul} A_{ul} N_u \quad (6.33)$$

où  $N_u$  est le nombre total d'atomes ou de molécules dans l'état supérieur. Cette équation exprime simplement que la luminosité dans la raie est donnée par le taux de désexcitations radiatives spontanées dans l'ensemble de la région considérée. Ce résultat est en réalité **indépendant de l'hypothèse ETL**.

**Exercice 99 :** Démontrer l'expression (6.33) à partir de l'expression plus générale (6.32).

### 6.5.4 Probabilité d'échappement

Si contrairement à ce qu'on a supposé pour établir l'équation (6.33), le **milieu n'est pas optiquement mince** dans la raie, on peut néanmoins écrire la luminosité de celle-ci sous une forme semblable

$$L = \beta h\nu_{ul} A_{ul} N_u = \beta L^{\text{thin}} \quad (6.34)$$

en introduisant la **probabilité d'échappement**  $\beta$ , définie par

$$\beta = \left\langle \frac{1 - e^{-\tau_\nu}}{\tau_\nu} \right\rangle \quad (6.35)$$

où la moyenne est prise sur le volume de la source. La relation (6.34) exprime que le **taux effectif de désexcitations radiatives spontanées** est  $\beta A_{ul}$  lorsque le piégeage des photons dans des régions non optiquement minces intervient, alors qu'il est simplement égal à  $A_{ul}$  dans les régions transparentes. L'utilité de ce concept est de permettre une **estimation rapide de l'épaisseur optique** car  $\beta \simeq 1$  pour  $\tau_\nu \ll 1$  et  $\beta \simeq \langle 1/\tau_\nu \rangle$  pour  $\tau_\nu \gg 1$ .

**Exercice 100 :** Établir l'expression (6.34).

*Note :* Le lien entre la probabilité d'échappement  $\beta$  et la profondeur optique  $\tau_\nu$  dépend de la géométrie considérée. L'expression (6.35) est valable pour une coquille sphérique en expansion ou en contraction avec un grand gradient de vitesse. On trouvera dans [49] les expressions valables dans d'autres géométries.

### 6.5.5 Conditions d'établissement de l'ETL

Nous allons voir, dans un modèle extrêmement simple (atome à deux niveaux, profils d'émission et d'absorption identiques, pas d'absorption continue à la fréquence de la raie), comment la densité et l'épaisseur optique du milieu influent sur les écarts à l'ETL. Pour cela, considérons le **taux net radiatif**

$$R_{ul} = \frac{A_{ul} n_u + B_{ul} n_u \bar{J} - B_{lu} n_l \bar{J}}{n_u A_{ul}} \quad (6.36)$$

Compris entre 0 et 1, il mesure le bilan des transitions radiatives rapporté aux seules émissions spontanées. Cette remarque permet de l'identifier à la probabilité d'échappement

$$R_{ul} = \beta \quad (6.37)$$

et on montre alors sans grande difficulté que l'on a

$$\frac{B_{\nu_{ul}}(T)}{S_{\nu}} = 1 + \frac{\beta}{\eta} \quad (6.38)$$

Cette forme met en évidence que **c'est le rapport  $\beta/\eta$  qui gouverne les écarts à l'ETL** : pour  $\beta/\eta \ll 1$  - c'est-à-dire à grande densité ( $n_p \rightarrow \infty$  donc  $\eta \rightarrow \infty$ ) ou grande épaisseur optique ( $\tau_{\nu} \rightarrow \infty$  donc  $\beta \rightarrow 0$ ) - cet écart tend vers zéro et  $S_{\nu} \simeq B_{\nu_{ul}}(T)$ .

**Exercice 101 : Établir la relation (6.38).**

## Réponses aux exercices du chapitre 6

### Exercice 91

On considère une "cible" sur le niveau supérieur  $u$ , et on se place dans son référentiel. Les particules "projectiles"  $p$  susceptibles de la désexciter collisionnellement ont alors une vitesse relative  $v$  par rapport à elle, avec une distribution des vitesses  $f(v)$ . Par définition, la probabilité qu'une telle désexcitation ait lieu est, par unité de temps,  $C_{lu}n_p$ . D'un autre côté, cette probabilité peut être écrite via une section efficace de collision, en considérant séparément les particules  $p$  ayant une vitesse relative  $v$  particulière par rapport à la cible. Pendant un temps  $dt$ , le nombre de telles particules pouvant interagir avec la cible est  $n_p \times v dt \times \sigma_{ul}(v) \times f_v(v) dv$ , en faisant apparaître la distribution en probabilité des modules de la vitesse  $f_v(v)$ , la section efficace, et la longueur  $v dt$  du cylindre dans lequel devaient se trouver les projectiles pendant l'intervalle de temps précédent. On a alors, en notant la relation entre la distribution des vitesses  $f(v)$  et celle des modules des vitesses  $f_v(v) = 4\pi v^2 f(v)$ , et en intégrant sur cette distribution, la relation annoncée. Pour ce qui est de l'excitation collisionnelle, la seule différence est le seuil en énergie et donc en vitesse.

### Exercice 92

On note que la fonction source de la raie  $a$  pour expression (déjà vue au chapitre 5)

$$S_\nu = \frac{A_{ul}n_u}{B_{lu}n_l - B_{ul}n_u} = \frac{\frac{A_{ul}}{B_{ul}}}{\left(\frac{B_{lu}n_l}{B_{ul}n_u} - 1\right)}$$

et on peut utiliser les relations d'Einstein

$$g_l B_{lu} = g_u B_{ul} \quad \text{et} \quad \frac{A_{ul}}{B_{ul}} = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2}$$

ainsi que la relation entre  $C_{lu}$  et  $C_{ul}$  pour la mettre sous une forme faisant apparaître clairement les écarts à l'ETL. En effet

$$n_u [C_{ul}n_p + A_{ul} + B_{ul}\bar{J}] = n_l [C_{lu}n_p + B_{lu}\bar{J}]$$

ce qui donne le rapport des populations

$$\frac{n_l}{n_u} = \frac{C_{ul}n_p + A_{ul} + B_{ul}\bar{J}}{C_{lu}n_p + B_{lu}\bar{J}}$$

donc pour la fonction source, on a l'expression suivante

$$S_\nu = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} \frac{1}{\left(\frac{g_u}{g_l} \frac{C_{ul}n_p + A_{ul} + B_{ul}\bar{J}}{C_{lu}n_p + B_{lu}\bar{J}} - 1\right)} = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} \frac{C_{lu}n_p + B_{lu}\bar{J}}{\frac{g_u}{g_l} [C_{ul}n_p + A_{ul} + B_{ul}\bar{J}] - [C_{lu}n_p + B_{lu}\bar{J}]}$$

La relation d'Einstein entre  $B_{lu}$  et  $B_{ul}$  permet d'éliminer les termes correspondants au dénominateur, et on peut par ailleurs exprimer  $B_{lu}$  au numérateur en fonction de  $A_{ul}$

$$S_\nu = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} \frac{C_{lu}n_p + B_{lu}\bar{J}}{\frac{g_u}{g_l} [C_{ul}n_p + A_{ul}] - C_{lu}n_p} = \frac{\frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} C_{lu}n_p + \frac{g_u}{g_l} A_{ul}\bar{J}}{\frac{g_u}{g_l} [C_{ul}n_p + A_{ul}] - C_{lu}n_p}$$

D'autre part, on remplace  $C_{lu}$  par son expression en fonction de  $C_{ul}$ , ce qui permet de simplifier par le rapport des poids statistiques  $g_u/g_l$

$$S_\nu = \frac{\frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} C_{ul} \exp\left(-\frac{E_{ul}}{kT}\right) n_p + A_{ul} \bar{J}}{C_{ul} n_p + A_{ul} - C_{ul} \exp\left(-\frac{E_{ul}}{kT}\right) n_p}$$

On divise alors numérateur et dénominateur par  $A_{ul}$  et on pose

$$\eta = \frac{C_{ul} n_p}{A_{ul}} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E_{ul}}{kT}\right) \right]$$

En remarquant qu'alors

$$\eta B_{\nu_{ul}}(T) = \frac{C_{ul}}{A_{ul}} n_p \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E_{ul}}{kT}\right) \right] \frac{\frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2}}{\exp\left(\frac{E_{ul}}{kT}\right) - 1} = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} \frac{C_{ul}}{A_{ul}} \exp\left(-\frac{E_{ul}}{kT}\right) n_p$$

on aboutit à l'expression annoncée de la fonction source

$$S_\nu = \frac{\bar{J} + \eta B_{\nu_{ul}}(T)}{1 + \eta}$$

### **Exercice 93**

On écrit

$$S_\nu = B_{\nu_{ul}}(T_x) = \frac{\bar{J} + \eta B_{\nu_{ul}}(T)}{1 + \eta}$$

et on introduit Comme on suppose la raie assez fine pour que la fonction de Planck ne varie pas appréciablement sur son étendue  $\delta\nu$ , on a  $\bar{J} \simeq J_{\nu_{ul}} = B_{\nu_{ul}}(T_r)$  et donc

$$\frac{2kT_x \nu_{ul}^2}{c^2} \simeq \frac{2kT_r \nu_{ul}^2}{c^2} + \eta \frac{2kT \nu_{ul}^2}{c^2}$$

Or  $\eta$  peut aussi être écrit dans l'approximation de Rayleigh-Jeans

$$\eta \simeq \frac{C_{ul} n_p}{A_{ul}} \frac{h\nu_{ul}}{kT} = \frac{T_0}{T}$$

ce qui définit la température caractéristique

$$T_0 = \frac{C_{ul} n_p}{A_{ul}} \frac{h\nu_{ul}}{k}$$

et permet de mettre la température d'excitation sous la forme

$$T_x \simeq \frac{T_r + \frac{T_0}{T} T}{1 + \frac{T_0}{T}} = T \frac{T_r + T_0}{T + T_0}$$

#### Exercice 94

Le coefficient d'Einstein d'émission spontanée est  $A_{ul} = 2.85 \cdot 10^{-15} \text{ s}^{-1}$ , et la fréquence de la transition est  $\nu_{ul} \simeq 1.42 \cdot 10^9 \text{ Hz}$ , donc

$$\eta \simeq \frac{C_{ul} n_{\text{H}}}{A_{ul}} \frac{h\nu_{ul}}{kT} \simeq \frac{2 \cdot 10^{-10} \times 1.42 \cdot 10^9}{2.85 \cdot 10^{-15}} \frac{6.62 \cdot 10^{-34}}{1.38 \cdot 10^{-23}} \frac{n_{\text{H}}}{\sqrt{T}} \simeq 4.78 \cdot 10^3 \frac{n_{\text{H}}}{\sqrt{T}}$$

en exprimant la densité  $n_{\text{H}}$  en  $\text{cm}^{-3}$  et la température en K.

#### Exercice 95

On peut calculer la température de brillance dans la raie à 21 cm sur les deux lignes de visée A et B de la Fig. 6.2. Dans le premier cas, on a

$$T_{b,\nu}^{(A)} = T_c e^{-\tau_\nu} + T_x (1 - e^{-\tau_\nu})$$

où  $T_c$  est la température de brillance du continuum de la radiosource en arrière-plan et  $T_x$  la température d'excitation de la raie dans le nuage. Hors de la raie, disons pour une fréquence  $\nu_1$ ,  $\tau_{\nu_1} = 0$  et la température de brillance observée est bien entendu

$$T_{b,\nu_1}^{(A)} = T_c,$$

de sorte que le profil observé sera en absorption ou en émission suivant le signe de  $T_x - T_c$  : en effet, la variation de la température de brillance entre le centre de la raie ( $\nu_0$ ) et ses ailes ( $\nu_1$ ) est

$$\Delta T_{b,\nu_0}^{(A)} = T_{b,\nu_0}^{(A)} - T_{b,\nu_1}^{(A)} = T_c e^{-\tau_{\nu_0}} + T_x (1 - e^{-\tau_{\nu_0}}) - T_c = (T_x - T_c) (1 - e^{-\tau_{\nu_0}})$$

et est donc du signe de  $T_x - T_c$ . Si  $T_x < T_c$  le profil est en absorption, et si  $T_x > T_c$  le profil est en émission.

Sur la ligne de visée B, il n'y a pas de rayonnement de fond, donc

$$T_{b,\nu}^{(B)} = T_x (1 - e^{-\tau_\nu})$$

qui donne donc toujours un profil en émission.

En utilisant l'hypothèse que les propriétés du nuage sont les mêmes en tous points, on peut déduire l'épaisseur optique de la comparaison des deux lignes de visée, car

$$\tau_\nu = \ln \left[ \frac{T_c}{T_{b,\nu}^{(A)} - T_{b,\nu}^{(B)}} \right] = \ln \left[ \frac{T_{b,\nu_1}^{(A)}}{T_{b,\nu}^{(A)} - T_{b,\nu}^{(B)}} \right]$$

On peut alors en déduire la température d'excitation par

$$T_x = \frac{T_{b,\nu}^{(B)}}{1 - e^{-\tau_\nu}}$$

#### Exercice 96

Lorsque l'épaisseur optique  $\tau_\nu \ll 1$ , on a alors

$$T_{b,\nu}^{(B)} = T_x (1 - e^{-\tau_\nu}) \simeq T_x \tau_\nu = \frac{3c^2 h \nu}{32\pi \nu_0^2 k} A_{ul} N_{\text{H}} \phi(\nu)$$

ce qui fait disparaître la température d'excitation qu'on ne connaît pas.

#### Exercice 97

La composante de la vitesse macroscopique sur la ligne de visée est  $u_k = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}$  et sa variation sur une distance  $\delta s$  le long de cette ligne de visée est donc

$$\delta u_k = \delta s \cdot \partial_k u_k = \delta s \mathbf{k} \cdot \nabla (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})$$

En écrivant  $\delta u_k = \sigma_{\text{th}}$  on aboutit à la taille  $l$  annoncée.

### Exercice 98

La résolution formelle de l'équation du transfert donne alors

$$I_\nu(\mathbf{k}) = \int S_\nu e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu = \int_0^\infty S_\nu \exp \left[ - \int_0^s \kappa_\nu(\mathbf{r}_0 - s' \mathbf{k}) ds' \right] \kappa_\nu(\mathbf{r}_0 - s \mathbf{k}) ds$$

avec  $d\tau_\nu(\mathbf{r}) = \kappa_\nu(\mathbf{r}_0 - s \mathbf{k}) ds$  et  $s$  la coordonnée le long de la ligne de visée, nulle au niveau de l'observateur. La profondeur optique le long de la ligne de visée, de  $\mathbf{r}$  à  $\mathbf{r}_0$  est alors

$$\tau_\nu = \int_0^s \kappa_\nu(\mathbf{r}_0 - s' \mathbf{k}) ds'$$

comme explicité dans l'argument de l'exponentielle. Comme on suppose que la raie se forme à l'ETL, la fonction source est donnée par  $S_\nu = B_{\nu_c(\mathbf{r})} [T_x(\mathbf{r})] = B_{\nu_c(\mathbf{r})} [T(\mathbf{r})]$ , où

$$\nu_c(\mathbf{r}) = \nu_0 \left[ 1 + \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})}{c} \right]$$

est la fréquence centrale de la raie au point  $\mathbf{r}$ . On a alors

$$I_\nu(\mathbf{k}) = \int_0^\infty B_{\nu_c(\mathbf{r})} [T(\mathbf{r})] \exp \left[ - \int_0^s \kappa_\nu(\mathbf{r}_0 - s' \mathbf{k}) ds' \right] \kappa_\nu(\mathbf{r}_0 - s \mathbf{k}) ds$$

Dans l'approximation de Sobolev, on prend pour profil d'absorption en chaque point une distribution de Dirac centrée sur la fréquence  $\nu_c(\mathbf{r})$ , soit  $\phi(\nu) = \delta[\nu - \nu_c(\mathbf{r})]$ , et donc

$$\kappa_\nu(\mathbf{r}) = n_l f_{ul} \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} \left\{ 1 - \exp \left[ - \frac{h\nu}{kT(\mathbf{r})} \right] \right\} \delta[\nu - \nu_c(\mathbf{r})]$$

Considérons tout d'abord les fréquences  $\nu$  pour lesquelles il n'existe pas, sur la ligne de visée, de solution  $\mathbf{r}_\nu$  à l'équation  $\nu_c(\mathbf{r}) = \nu$ . Le coefficient d'absorption est alors nul sur toute la ligne de visée, et par conséquent  $I_\nu(\mathbf{k}) = 0$ .

Pour les fréquences  $\nu$  telles qu'il existe une unique solution  $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_0 - s_\nu \mathbf{k}$  à cette équation sur la ligne de visée considérée, l'approximation de Sobolev revient à écrire que la fonction source ne varie pas significativement sur l'étendue  $\Delta s = l$  sur laquelle le coefficient d'absorption est significativement différent de zéro. On peut alors la sortir de l'intégrale, et celle-ci s'étend uniquement sur une taille  $l$  autour de la position  $s_\nu$  :

$$I_\nu(\mathbf{k}) = B_{\nu_c(\mathbf{r}_\nu)} [T(\mathbf{r}_\nu)] \int_{s_\nu - l/2}^{s_\nu + l/2} \exp(-\tau_\nu) d\tau_\nu = B_\nu [T(\mathbf{r}_\nu)] \int_{s_\nu - l/2}^{s_\nu + l/2} \exp(-\tau_\nu) d\tau_\nu$$

car  $\nu_c(\mathbf{r}_\nu) = \nu$  par définition. L'intégrale restante est triviale, de sorte que

$$I_\nu(\mathbf{k}) = B_\nu [T(\mathbf{r}_\nu)] \left\{ \exp \left[ -\tau_\nu \left( s_\nu - \frac{l}{2} \right) \right] - \exp \left[ -\tau_\nu \left( s_\nu + \frac{l}{2} \right) \right] \right\}$$

Or la profondeur optique à la fréquence  $\nu$  en  $s_\nu - l/2$  est nulle car les cellules de coordonnée  $s < s_\nu - l/2$  sont transparentes au rayonnement à cette fréquence. D'autre part, la profondeur optique à la fréquence

$\nu$  en  $s_\nu + l/2$  est la profondeur optique totale à cette fréquence,  $\tau_\nu$ , puisque les cellules situées au-delà sont elles aussi transparentes à ce rayonnement. On a donc

$$I_\nu(\mathbf{k}) = B_\nu [T(\mathbf{r}_\nu)] (1 - e^{-\tau_\nu})$$

où l'épaisseur optique dans la raie est

$$\tau_\nu = \int_0^\infty \kappa_\nu(\mathbf{r}) ds = n_l f_{ul} \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} \int_0^\infty \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{h\nu}{kT(\mathbf{r})} \right] \right\} \delta[\nu - \nu_c(\mathbf{r})] ds$$

et donc par changement de variable  $s \rightarrow \nu_c(\mathbf{r})$

$$\tau_\nu = n_l f_{ul} \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} \int_0^\infty \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{h\nu}{kT(\mathbf{r})} \right] \right\} \delta[\nu - \nu_c(\mathbf{r})] \frac{ds}{d\nu_c} d\nu_c.$$

Or  $s$  et  $\nu_c$  sont reliées par

$$\frac{d\nu_c}{ds} = \frac{d}{ds} \left[ \nu_0 \left( 1 + \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}}{c} \right) \right] = \frac{\nu_0}{c} \mathbf{k} \cdot \nabla(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})$$

et donc

$$\tau_\nu = n_l f_{ul} \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e \nu_0} \frac{1}{|\mathbf{k} \cdot \nabla(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})|} \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{h\nu}{kT(\mathbf{r}_\nu)} \right] \right\}$$

La valeur absolue provient de l'échange possible des bornes d'intégration dans le cas d'un écoulement de contraction.

### **Exercice 99**

Dans le cas optiquement mince, on a  $I_\nu(\mathbf{k}) = B_\nu [T(\mathbf{r})] \tau_\nu$ , ce qui donne

$$4\pi \frac{\nu_0}{c} I_\nu |\mathbf{k} \cdot \nabla(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})| = 4\pi \frac{\nu_0}{c} B_\nu [T(\mathbf{r})] n_l f_{ul} \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e \nu_0} \frac{1}{|\mathbf{k} \cdot \nabla(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})|} \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{h\nu}{kT(\mathbf{r})} \right] \right\} |\mathbf{k} \cdot \nabla(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})|$$

On peut donc simplifier notablement l'expression et on obtient

$$4\pi \frac{\nu_0}{c} I_\nu |\mathbf{k} \cdot \nabla(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})| = 4\pi B_\nu [T(\mathbf{r})] n_l f_{ul} \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{h\nu}{kT(\mathbf{r})} \right] \right\}$$

qui donne, en explicitant la fonction de Planck

$$4\pi \frac{\nu_0}{c} I_\nu |\mathbf{k} \cdot \nabla(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})| = 4\pi \frac{2h\nu^3}{c^2} n_l f_{ul} \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} \exp \left[ -\frac{h\nu}{kT(\mathbf{r})} \right]$$

En introduisant le coefficient d'Einstein d'émission spontanée à la place de la force d'oscillateur

$$f_{ul} \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} = \frac{c^2 \nu}{8\pi \nu_{ul}^3} A_{ul} \frac{g_u}{g_l}$$

on obtient finalement l'expression suivante, dans laquelle on fait l'approximation  $\nu \simeq \nu_{ul}$

$$4\pi \frac{\nu_0}{c} I_\nu |\mathbf{k} \cdot \nabla(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})| = 4\pi \frac{2h\nu^3}{c^2} n_l \frac{c^2 \nu}{8\pi \nu_{ul}^3} A_{ul} \frac{g_u}{g_l} \exp \left[ -\frac{h\nu}{kT(\mathbf{r})} \right] = h\nu_{ul} n_u A_{ul}$$

où l'on a aussi utilisé l'hypothèse de niveaux à l'ETL. Du coup, la luminosité est simplement

$$L^{\text{thin}} = \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} h\nu_{ul} n_u A_{ul} d\phi$$

soit le résultat annoncé.

### Exercice 100

On introduit "artificiellement" un facteur  $\tau_\nu$ , sous la forme suivante

$$4\pi \frac{\nu_0}{c} I_\nu |\mathbf{k} \cdot \nabla (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})| = 4\pi B_\nu [T(\mathbf{r})] \tau_\nu \frac{1 - e^{-\tau_\nu}}{\tau_\nu} \frac{\nu_0}{c} |\mathbf{k} \cdot \nabla (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})|$$

Le reste du calcul est alors identique au cas précédent, au facteur  $(1 - e^{-\tau_\nu})/\tau_\nu$  près, et donc

$$4\pi \frac{\nu_0}{c} I_\nu |\mathbf{k} \cdot \nabla (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})| = h\nu_{ul} n_u A_{ul} \frac{1 - e^{-\tau_\nu}}{\tau_\nu}.$$

La luminosité de la raie est alors

$$L = h\nu_{ul} A_{ul} \int n_u \frac{1 - e^{-\tau_\nu}}{\tau_\nu} dV$$

En posant  $\beta$  la probabilité d'échappement définie par

$$\beta = \left\langle \frac{1 - e^{-\tau_\nu}}{\tau_\nu} \right\rangle = \frac{\int n_u \frac{1 - e^{-\tau_\nu}}{\tau_\nu} dV}{N_u}$$

on peut mettre la luminosité sous la forme annoncée

$$L = \beta h\nu_{ul} A_{ul} N_u = \beta L^{\text{thin}}$$

### Exercice 101

Le taux net radiatif s'écrit sans difficulté en utilisant la fonction source de la raie

$$R_{ul} = 1 - \frac{\bar{J}}{S_\nu}$$

Il est donc toujours inférieur à l'unité. On peut le relier à l'expression de la fonction source écrite plus haut pour faire apparaître la paramètre  $\eta$

$$R_{ul} = 1 - \frac{(1 + \eta)S_\nu - \eta B_{\nu_{ul}}(T)}{S_\nu} = \eta \left[ \frac{B_{\nu_{ul}}(T)}{S_\nu} - 1 \right]$$

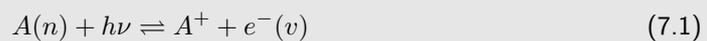
qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{B_{\nu_{ul}}(T)}{S_\nu} = 1 + \frac{R_{ul}}{\eta}$$

Comme  $R_{ul}$  peut être identifié à la probabilité d'échappement  $\beta$ , on a le résultat annoncé.

## Les processus de photo-ionisation et de recombinaison

Les processus de **photo-ionisation** et de **recombinaison** sont des transitions radiatives **libre-lié** entre un niveau électronique quantifié et un continuum, qu'on écrit sous la forme d'un équilibre



où l'on précise que l'atome  $A$  est sur un niveau électronique  $n$  d'énergie  $\mathcal{E}_n$ , et que l'électron libéré a une vitesse  $v$ . En introduisant le **potentiel d'ionisation**  $\chi_0$  (voir 4.3.3), la conservation de l'énergie permet de relier  $v$  à la fréquence  $\nu$  du photon par

$$\chi_0 - \mathcal{E}_n + \frac{1}{2}m_e v^2 = h\nu. \quad (7.2)$$

Ces processus jouent un rôle fondamental dans les propriétés des **nébuleuses ionisées**, qu'il s'agisse de **régions HII** autour d'étoiles jeunes et chaudes (OB) ou de **nébuleuses planétaires** (PN) issues de l'éjection des couches externes des étoiles en fin de vie, alors que leur cœur est en route vers le stade de naine blanche. Pour étudier ces objets, il convient donc de discuter auparavant des coefficients caractéristiques de ces transitions radiatives libre-lié.

### 7.1 Absorption et émission libre-lié

De même que les relations (5.3) entre les coefficients d'Einstein caractérisent les probabilités de transitions **lié-lié**, on peut obtenir des relations entre coefficients caractéristiques des processus de photo-ionisation et de recombinaison.

#### 7.1.1 Les relations d'Einstein-Milne

On note  $n_0$  la densité des atomes neutres,  $n_{0,n}$  celle des neutres dans l'état d'énergie  $\mathcal{E}_n$ ,  $n_1$  celle des ions,  $n_e$  celle des électrons libres, et  $f(v)$  la distribution de vitesse de ces derniers, qu'on supposera Maxwellienne à la température  $T$  (4.35). Comme pour l'établissement des relations d'Einstein, on va se placer dans le cas particulier de l'équilibre thermodynamique, pour lequel on a **micro-réversibilité des processus de photo-ionisation et de recombinaison**.

## Taux de photo-ionisation

Le **taux de photoionisation**  $r_p$  par les photons de fréquence comprise entre  $\nu$  et  $\nu + d\nu$  doit être proportionnel à la densité des neutres  $n_{0,n}$ , et à l'intensité moyenne du champ de rayonnement  $J_\nu d\nu$  dans cet intervalle de fréquence. La constante de proportionnalité<sup>1</sup> est notée  $\pi_\nu$ , et on a donc

$$r_p = n_{0,n} \pi_\nu J_\nu d\nu \quad (7.3)$$

## Taux de recombinaison

La recombinaison d'un électron libre avec un ion produit un photon, et de même qu'il y a un processus d'émission spontanée et un processus d'émission stimulée lors de la transition entre deux niveaux discrets, il y a aussi un processus de **recombinaison spontanée** avec un électron de vitesse  $v$  à  $d^3v$  près, et un processus de **recombinaison induite** en présence d'un champ de rayonnement. Ces deux processus sont caractérisés par des coefficients  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , respectivement. Le **taux de recombinaison**  $r_c(v)$  avec ces électrons est alors<sup>2</sup>

$$r_c(v) = n_1 n_e v f(v) [\mathcal{A} + \mathcal{B} J_\nu] d^3v \quad (7.4)$$

## Relations d'Einstein-Milne

En notant que la conservation de l'énergie (7.2) implique que les intervalles de vitesse de l'électron et de fréquence du photon sont liées par  $h d\nu = m_e v dv$  on obtient, en partant du cas particulier de l'équilibre thermodynamique, les **relations d'Einstein-Milne**

$$\mathcal{A} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \mathcal{B} \quad \mathcal{B} = \frac{h}{16\pi m_e} \frac{g_{0,n}}{Z_1(T)} \frac{\pi_\nu}{\nu - \nu_n} \quad (7.5)$$

où l'on a introduit le poids statistique  $g_{0,n}$  des neutres dans l'état d'énergie  $\mathcal{E}_n$ , la fonction de partition  $Z_1$  des ions, prise à la température cinétique des électrons, et la fréquence  $\nu_n = (\chi_0 - \mathcal{E}_n)/h$  d'un photon tout juste capable d'ioniser le neutre depuis l'état d'énergie  $\mathcal{E}_n$ . **Les relations d'Einstein-Milne (7.5) sont également valables hors ETL, tant que les électrons sont thermalisés.**

**Exercice 102 : Démontrer les relations d'Einstein-Milne (7.5).**

### 7.1.2 Section efficace, coefficient d'absorption et émissivité

La **section efficace d'absorption**  $s_{\nu,a}$  associée au processus de photo-ionisation est directement liée à la probabilité  $\pi_\nu$  par<sup>3</sup>

$$s_{\nu,a} = \frac{h\nu}{4\pi} \pi_\nu \quad (7.6)$$

**Exercice 103 : Justifier la relation (7.6).**

Le **coefficient d'absorption** associé à cette transition lié-libre (photo-ionisation) est alors, en tenant compte du processus de recombinaison stimulée comme d'une absorption négative,

$$\kappa_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} \left[ n_{0,n} \pi_\nu - \frac{h}{m_e} n_1 n_e f_v(v) \mathcal{B} \right] \quad (7.7)$$

1. Notons, même si ce n'est pas explicité ici, que cette constante dépend du niveau  $n$ .  
 2. La présence du facteur  $v$  est liée au fait que le nombre d'événements est proportionnel à la longueur  $v dt$  du cylindre dans lequel se trouvent les électrons susceptibles de se recombiner. Voir l'équation (6.16) pour un autre exemple.  
 3. Là encore, la dépendance en fonction du niveau  $n$  est implicite.

en introduisant la distribution (4.37) des modules des vitesses des électrons. On peut alors montrer que ce coefficient d'absorption se met également sous une forme rappelant celle (5.14) des processus lié-lié,

$$\kappa_\nu = s_{\nu,a} \left[ n_{0,n} - n_{0,n}^* \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right] \quad (7.8)$$

où  $n_{0,n}^*$  est la densité des atomes neutres dans l'état d'énergie  $\mathcal{E}_n$  qu'on obtient en utilisant l'équation de Saha (4.45) avec les vraies populations des ions et des électrons en lieu et place des valeurs à l'ETL,

$$n_{0,n}^* = n_1 n_e \frac{g_{0,n}}{2Z_1(T)} \frac{h^3}{(2\pi m_e kT)^{3/2}} \exp\left(\frac{\chi_0 - \mathcal{E}_n}{kT}\right) \quad (7.9)$$

Quand on se place à l'ETL, le coefficient d'absorption devient, comme attendu

$$\kappa_\nu^E = s_{\nu,a} n_{0,n}^E \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right] \quad (7.10)$$

Il faut noter que pour cette absorption continuum, **le terme stimulé est toujours calculé comme à l'ETL**, ce qui n'est pas surprenant car la recombinaison, qu'elle soit spontanée ou induite, est fondamentalement liée aux collisions entre particules, constitutives de la condition d'ETL.

#### **Exercice 104 : Démontrer la relation (7.8).**

Par analogie avec le terme d'émission stimulée dans le coefficient d'absorption, **l'émissivité** s'écrit

$$\epsilon_\nu = \frac{h^2\nu}{4\pi m_e} n_1 n_e f_\nu(v) \mathcal{A} \quad (7.11)$$

dont on peut montrer qu'elle s'écrit aussi

$$\epsilon_\nu = n_{0,n}^* s_{\nu,a} B_\nu(T) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right] \quad (7.12)$$

ce qui traduit la **loi de Kirchhoff**  $\epsilon_\nu = \kappa_\nu^* B_\nu(T)$  en définissant le coefficient d'absorption

$$\kappa_\nu^* = n_{0,n}^* s_{\nu,a} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right] \quad (7.13)$$

qui est la forme trouvée à l'ETL dans laquelle la population des atomes neutres est celle calculée avec la loi de Saha (ETL) mais avec les vraies populations des ions et des électrons libres. **Le fait qu'on trouve cette forme pour l'émissivité est lié au caractère collisionnel de l'émission libre-lié.**

#### **Exercice 105 : Démontrer la relation (7.12).**

*Note :* Dans le cas général, il faudra sommer les coefficients d'absorption et les émissivités associés aux raies et aux continua. Voir par exemple [27] pour les expressions correspondantes.

## 7.2 Équilibre d'ionisation d'une région HII

Les régions HII autour des étoiles jeunes et chaudes (de type spectral O ou B) sont décrites par un modèle d'équilibre d'ionisation dû à Strömgren, lequel a montré qu'on doit y trouver l'hydrogène presque exclusivement sous sa forme ionisée HII autour de l'étoile et, au-delà d'une **zone de transition très rapide**, presque exclusivement sous sa forme neutre HI. En symétrie sphérique, la région HII est une boule de rayon  $R_S$ , appelé **rayon de Strömgren**, comme indiqué sur la Fig. 7.1.

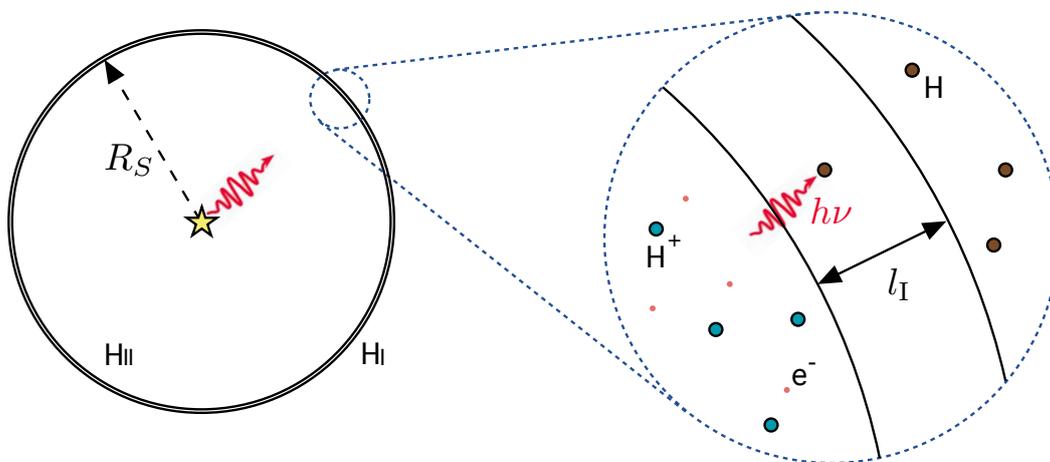


FIGURE 7.1 – Structure d’ionisation d’une région HII dans le modèle de Strömgen.

## 7.2.1 Rappels sur les états électroniques de l’hydrogène

On rappelle que les états électroniques de l’atome d’hydrogène sont quantifiés et repérés par des nombres quantiques  $(n, l, m)$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq l \leq n - 1$  et  $-l \leq m \leq l$ . Le nombre quantique principal  $n$  détermine l’énergie de l’état ainsi que sa multiplicité<sup>4</sup>

$$\mathcal{E}_n = \chi_0 \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{et} \quad g_n = 2n^2 \quad (7.14)$$

où l’énergie est prise par rapport au niveau fondamental et le potentiel d’ionisation est donné par

$$\chi_0 = \frac{m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2} \simeq 2.18 \cdot 10^{-18} \text{ J} \simeq 13.6 \text{ eV} \quad (7.15)$$

La température correspondante<sup>5</sup> est  $T_0 = \chi_0/k \simeq 1.58 \cdot 10^5 \text{ K}$

**Exercice 106 :** Montrer que la dégénérescence du niveau  $n$  est effectivement  $g_n = 2n^2$ .

## 7.2.2 Photo-ionisation de l’hydrogène neutre, limite de Lyman

### État majoritaire des atomes d’hydrogène neutre

Les photons capables d’ioniser l’hydrogène neutre doivent avoir une énergie suffisante,  $h\nu \geq \chi_0 - \mathcal{E}_n$ , *a priori* dépendant du niveau  $n$  sur lequel se trouve l’atome initialement. Or on peut montrer que **les atomes d’hydrogène sont très majoritairement sur le niveau fondamental  $n = 1$ .**

**Exercice 107 :** Montrer que si les populations sont à l’ETL à la température  $T = 50 \text{ K}$ , les niveaux  $n > 1$  sont largement minoritaires par rapport au fondamental.

4. Notons que si l’on tient compte du **couplage spin-orbite**, on lève la dégénérescence.  
5. D’ailleurs, une relation utile à connaître est qu’aux températures usuelles  $T = 300 \text{ K}$ , on a  $kT \simeq 25 \text{ meV} = 1/40 \text{ eV}$ , ce qui permet de faire des comparaisons rapides.

D'autre part, si un atome d'hydrogène se trouve sur un niveau excité  $n > 1$ , il subit rapidement une **cascade radiative** vers le niveau fondamental. En effet, le coefficient d'Einstein d'émission spontanée  $A_{qp}$  du niveau  $q$  au niveau  $p < q$  est donné par

$$A_{qp} = \frac{2\pi e^2 \chi_0^2}{\epsilon_0 m_e c^3 h^2} \frac{p^2}{q^2} f_{pq} \left( \frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2} \right)^2. \quad (7.16)$$

La force d'oscillateur  $f_{pq}$  est donnée quant à elle par une formule semi-classique due à Kramers [45]

$$f_{pq} = \frac{32}{3\pi\sqrt{3}} \frac{p^3 q}{(q^2 - p^2)^3} g_{qp} \quad (7.17)$$

où  $g_{qp}$  est appelé **facteur de Gaunt** et est typiquement proche de l'unité.

*Exemple :* On peut utiliser les relations (7.16) et (7.17) pour calculer quelques taux d'émission spontanée pour des transitions électroniques usuelles de l'hydrogène, à savoir Ly $\alpha$  ( $A_{21} = 4.68 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$ ), Ly $\beta$  ( $A_{31} = 5.54 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$ ), H $\alpha$  ( $A_{32} = 4.39 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$ ), H $\beta$  ( $A_{42} = 8.37 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ ).

Ces taux d'émission spontanée étant très grands, **un atome d'hydrogène se trouvant sur un niveau excité, suite à une collision, redescend très rapidement sur le niveau fondamental.**

**Exercice 108 :** Démontrer la relation (7.16). On utilisera les relations (5.3) et (5.35).

### Limite de Lyman

On peut donc se contenter de considérer la photo-ionisation des atomes d'hydrogène à partir du fondamental. Celle-ci a lieu en présence de photons de fréquence suffisamment grande, autrement dit une longueur d'onde suffisamment courte

$$\nu \geq \nu_{\text{Ly}} = \frac{\chi_0}{h} \simeq 3.3 \cdot 10^{15} \text{ Hz} \quad \lambda \leq \lambda_{\text{Ly}} = \frac{hc}{\chi_0} \simeq 912 \text{ \AA} \quad (7.18)$$

Cette longueur d'onde située dans l'ultraviolet lointain (FUV) est appelée **limite de Lyman** en référence au fait que **les raies des transitions  $n \Rightarrow 1$  forment la série de Lyman** (raie Ly $\alpha$  pour la transition  $2 \Rightarrow 1$ , raie Ly $\beta$  pour la transition  $3 \Rightarrow 1$ , etc...) <sup>6</sup>. On rappelle que les séries suivantes sont celles de **Balmer** ( $n \Rightarrow 2$ ), puis **Paschen** ( $n \Rightarrow 3$ ), **Bracket** ( $n \Rightarrow 4$ ) et **Pfund** ( $n \Rightarrow 5$ ).

### Taux de production de photons Lyman

Le calcul du rayon de Strömngren dépend notamment du **taux de production de photons Lyman**  $N_{\text{Ly}}$  (exprimé en  $\text{s}^{-1}$ ). De manière générale, on pourra écrire ce taux sous la forme

$$N_{\text{Ly}} = \int_{\nu_{\text{Ly}}}^{\infty} \frac{L_{\nu}^*}{h\nu} d\nu \quad (7.19)$$

où  $L_{\nu}^*$  est la **luminosité spectrale** de l'étoile. Dans un modèle où cette dernière, sphérique de rayon  $R_*$ , émet un rayonnement de corps noir à la température  $T_*$ , totalisant une luminosité bolométrique  $L_*$ , on montre que le taux de production de photons Lyman s'écrit

6. Ici, il s'agit formellement de la transition  $\infty \Rightarrow 1$ .

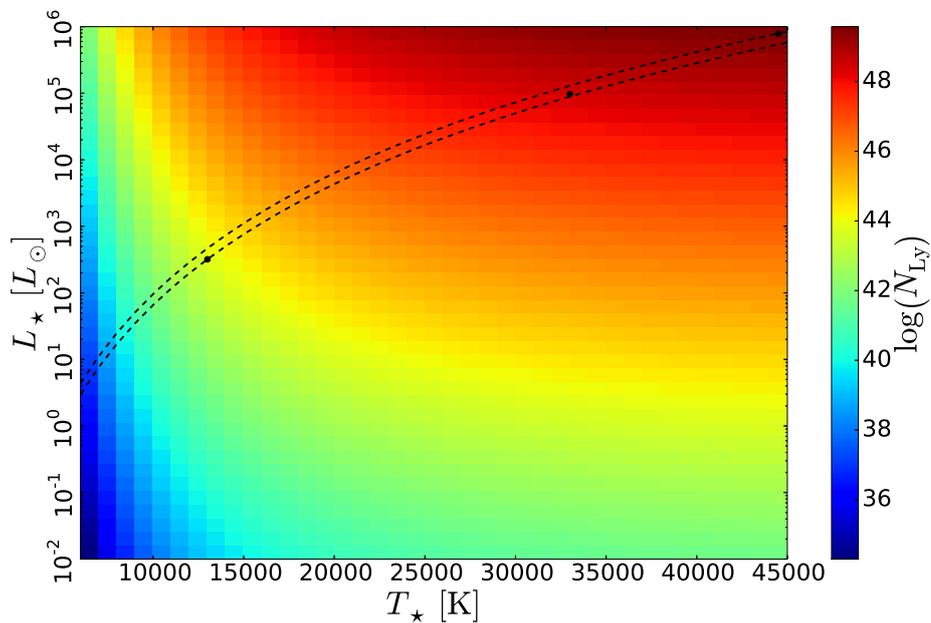


FIGURE 7.2 – Nombre de photons Lyman en fonction de la température  $T_*$  et de la luminosité bolométrique  $L_*$  de l'étoile. Les points noirs correspondent aux trois étoiles mentionnées dans le tableau, et les tirets à la relation température-luminosité de la séquence principale.

$$N_{\text{Ly}} = \frac{15}{k\pi^4} \frac{L_*}{T_0} G\left(\frac{T_0}{T_*}\right) = 2.71 \cdot 10^{43} \left(\frac{L_*}{L_\odot}\right) G\left(\frac{T_0}{T_*}\right) \text{ s}^{-1} \quad (7.20)$$

où l'on a introduit la luminosité solaire  $L_\odot = 3.826 \cdot 10^{26}$  W, et posé la fonction  $G$  définie par

$$G(u) = u \int_u^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx \quad (7.21)$$

**Exercice 109 : Démontrer la relation (7.20).**

Exemple : On peut ainsi estimer le taux de production de photons ionisants pour différentes étoiles :

Type stellaire	$L_* (L_\odot)$	$T_*$ (K)	$T_0/T_*$	$G(T_0/T_*)$	$N_{\text{Ly}} (\text{s}^{-1})$
O5	$7.9 \cdot 10^5$	44500	3.55	2.24	$4.8 \cdot 10^{49}$
O9	$9.7 \cdot 10^4$	33000	4.78	1.38	$3.6 \cdot 10^{48}$
B7	320	13000	12.1	0.011	$9.7 \cdot 10^{43}$

Le nombre de photons Lyman est représenté sur la Fig. 7.2 en fonction de la température  $T_*$  et de la luminosité bolométrique  $L_*$  de l'étoile. On y montre aussi le domaine de la séquence principale ( $L_* \propto T_*^6$ ) sur laquelle se trouvent ces étoiles.

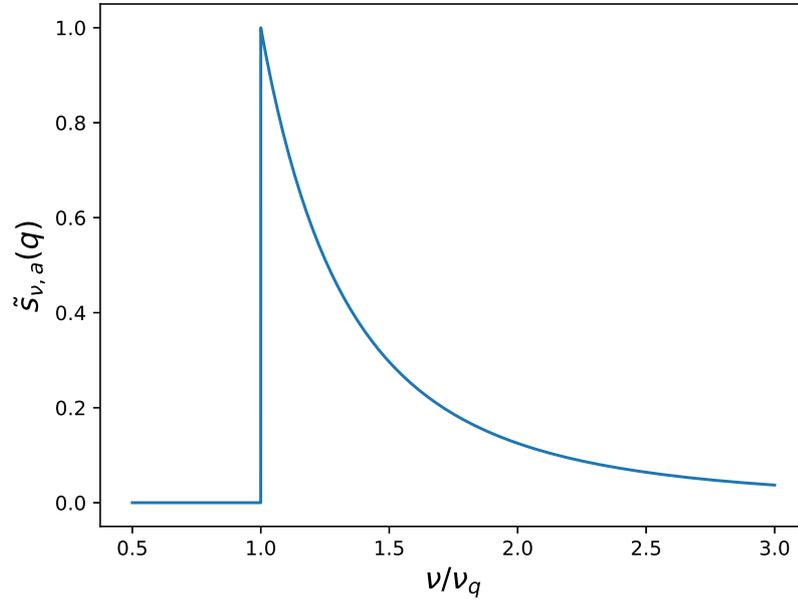


FIGURE 7.3 – **Section efficace d'absorption lié-libre de l'hydrogène.** L'axe des abscisses est normalisé à la fréquence seuil  $\nu_q$ , l'axe des ordonnées à la section efficace à la limite d'absorption.

### Sections efficaces lié-libre

Bien que la majorité des atomes neutres soient dans l'état fondamental, il est néanmoins utile pour la suite de discuter des propriétés des **sections efficaces d'absorption lié-libre** pour l'hydrogène, définies par (7.6),  $s_{\nu,a}(q)$ , en faisant explicitement apparaître que celles-ci dépendent du niveau  $q$  où se trouve initialement l'atome neutre. Elles prennent la forme suivante [45]

$$s_{\nu,a}(q) = q s_1 \left( \frac{\nu_q}{\nu} \right)^3 g_q(\nu) \quad (7.22)$$

aux fréquences  $\nu > \nu_q = (\chi_0 - \mathcal{E}_q)/h$  et sont nulles aux fréquences inférieures à ce seuil. Dans cette expression,  $g_q(\nu)$  est le **facteur de Gaunt lié-libre** depuis le niveau  $q$ , qui est de l'ordre de l'unité, et  $s_1$  est la section efficace d'absorption à la limite de Lyman, donnée par

$$s_1 = \frac{64}{3\sqrt{3}} \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right) \pi a_0^2 \simeq 7.91 \cdot 10^{-18} \text{ cm}^{-2} \quad (7.23)$$

où  $a_0$  est le **rayon de Bohr**

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \simeq 5.29 \cdot 10^{-11} \text{ m} \quad (7.24)$$

Les sections efficaces d'absorption ont alors l'allure représentée sur la Fig. 7.3.

### 7.2.3 Recombinaison

La photo-ionisation est concurrencée par le processus inverse de recombinaison dans la région ionisée. Ce processus est caractérisé par un **coefficient de recombinaison**  $\alpha = 3 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ , qui

intervient dans l'écriture du **taux volumique de recombinaisons**

$$r_c = \alpha n_e n_{H^+} \quad (7.25)$$

avec  $n_{H^+}$  et  $n_e$  les densités numériques des protons et des électrons, respectivement. Du fait de la neutralité électrique globale, si la densité initiale des atomes d'hydrogène est  $n_{\text{tot}}$ , on a  $n_e = n_{H^+} = n_{\text{tot}}$  dans la région totalement ionisée, chaque atome d'hydrogène ayant donné un proton et un électron.

*Exemple* : Pour une densité typique  $n_{\text{tot}} = 50 \text{ cm}^{-3}$ , on a donc  $r_c = 7.5 \cdot 10^{-10} \text{ cm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$ , et on peut en tirer un **temps caractéristique de recombinaison** très court,  $\tau_c = n_{\text{tot}}/r_c \simeq 2000 \text{ yr}$ .

Contrairement à l'ionisation, la recombinaison doit tenir compte du fait que **l'électron dans l'atome reformé peut être sur un niveau excité**. On montrera plus loin comment en déduire le coefficient  $\alpha$ .

## 7.2.4 Libre parcours moyen des photons

### Dans la région neutre

Le libre parcours moyen  $l_I$  des photons Lyman ( $\nu \geq \nu_{\text{Ly}}$ ) dans le gaz neutre HI se déduit de la section efficace d'absorption  $s_{\text{abs}}$  par la relation

$$l_I = \frac{1}{n_{\text{tot}} s_{\text{abs}}} \quad (7.26)$$

Or cette section efficace vaut de l'ordre de  $\simeq 10^{-17} \text{ cm}^2$  (équation 7.23), donc pour une densité de  $50 \text{ cm}^{-3}$ , on a typiquement  $l_I \simeq 2 \cdot 10^{13} \text{ m}$ , largement plus petit que la distance moyenne entre étoiles dans le voisinage solaire, qui est de l'ordre du parsec ( $1 \text{ pc} \simeq 3 \cdot 10^{16} \text{ m}$ ).

### Dans la région ionisée

Dans la région ionisée, les photons UV ne peuvent être absorbés, et la section efficace de diffusion des photons<sup>7</sup>  $s_{\text{sca}} \sim 6.7 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$  est beaucoup plus petite que  $s_{\text{abs}}$ . Elle correspond à un libre parcours moyen<sup>8</sup>

$$l_{II} = \frac{1}{n_{\text{tot}} s_{\text{sca}}} \quad (7.27)$$

qui vaut donc typiquement  $l_{II} \simeq 3 \cdot 10^{20} \text{ m}$ . Dans cette région, le milieu est quasiment transparent au rayonnement UV, et on peut donc considérer que les photons Lyman émis par l'étoile traversent sans encombre le volume déjà ionisé, avant d'être très vite absorbés en entrant dans la région neutre, montrant ainsi que **la transition HII-HI est très brusque**.

## 7.2.5 Rayon de Strömgren

Le temps caractéristique de la recombinaison étant très court devant la durée de vie de l'étoile, il s'établit un équilibre entre les processus de photoionisation et de recombinaison. Comme on peut supposer (voir [45]) qu'un photon Lyman provoque au plus une seule ionisation, on peut montrer que le rayon  $R$  de la région HII évolue selon

$$\frac{dR}{dt} = \frac{N_{\text{Ly}}}{4\pi R^2 n_{\text{tot}}} - \frac{1}{3} \alpha n_{\text{tot}} R \quad (7.28)$$

7. Il s'agit bien entendu de la section efficace de diffusion Thomson des photons sur les électrons libres du milieu.

8. On fait ici l'approximation que la densité  $n_{\text{tot}}$  dans le gaz ionisé est la même que dans le gaz neutre. Ce n'est pas tout à fait exact comme on le voit par la suite, mais suffisant pour notre argument.

et le rayon d'équilibre, c'est-à-dire le **rayon de Strömgen**, vaut

$$R_S = \left( \frac{3N_{\text{Ly}}}{4\pi\alpha n_{\text{tot}}^2} \right)^{1/3} \quad (7.29)$$

**Exercice 110 :** Établir l'équation (7.28) et en déduire le rayon de Strömgen (7.29). Déterminer ensuite complètement l'évolution  $R(t)$  du rayon de la région HII au cours du temps.

*Exemple :* Numériquement, pour les trois étoiles considérées plus haut, et avec une densité du gaz de  $50 \text{ cm}^{-3}$ , on a  $R_S(\text{O5}) = 8.3 \text{ pc}$ ,  $R_S(\text{O9}) = 3.5 \text{ pc}$  et  $R_S(\text{B7}) = 0.10 \text{ pc}$ . On voit bien que  $l_I \ll R_S \ll l_{\text{II}}$ , ce qui montre que la région HII a dans ce modèle une frontière bien marquée.

### 7.2.6 Structure d'ionisation de la région HII

Pour déterminer de manière plus précise la structure de la région HII, on suit l'approche de [45] en considérant l'équilibre entre les taux de photo-ionisation et de recombinaison à une distance  $r$  de l'étoile, dont on suppose qu'elle est une source sphérique de rayon  $R_*$  émettant une intensité spécifique  $I_\nu^*$ , de manière Lambertienne. On note  $n_{\text{H}}(s)$ ,  $n_p(s)$  et  $n_e(s)$  les densités respectives des atomes d'hydrogène neutre, des protons et des électrons à la distance  $s$ , et on définit la **fraction d'hydrogène neutre**

$$x = \frac{n_{\text{H}}}{n_{\text{H}} + n_p}. \quad (7.30)$$

Par conservation de la densité totale des protons, on a  $n_{\text{tot}} = n_{\text{H}} + n_p$ .

#### Taux de destruction des atomes neutres

L'intensité moyenne du champ de rayonnement à la distance  $r$  est donnée par

$$J_\nu(r) = WI_\nu^* \exp\left(-s_1 \int_{R_*}^r n_{\text{H}} ds\right) \quad (7.31)$$

où  $W \ll 1$  est un facteur géométrique, et où l'on fait l'approximation que l'épaisseur optique dans la région ionisée est dominée par l'absorption des photons à la limite de Lyman par les neutres résiduels<sup>9</sup>.

**Exercice 111 :** Déterminer le facteur géométrique  $W$  en fonction de  $r$  et  $R_*$ .

Le taux de destruction des atomes neutres par unité de volume à la distance  $r$  est alors obtenu à partir de l'équation (7.3), et on montre qu'on peut le mettre sous la forme

$$r_p(r) = \frac{n_{\text{H}} W s_1 N_{\text{Ly}}}{\pi R_*^2} \exp\left(-s_1 \int_{R_*}^r n_{\text{H}} ds\right) \quad (7.32)$$

**Exercice 112 :** Démontrer la relation (7.32).

#### Équilibre et fraction d'hydrogène neutre

Le taux de recombinaison étant donné par  $r_c(r) = \alpha n_p(r) n_e(r)$  d'après (7.25), on a  $r_c(r) = r_p(r)$  à l'équilibre. En posant  $\tau_S = R_S n_{\text{tot}} s_1$ , qui est l'épaisseur optique à la limite de Lyman et au bord de la

9. On a aussi supposé que  $g_1(\nu) = 1$ . L'hypothèse selon laquelle l'essentiel des absorptions a lieu à la limite de Lyman, et non pas pour des fréquences plus élevées, est liée à la décroissance en  $\nu^{-3}$  de la section efficace d'absorption, combinée à la décroissance exponentielle de l'intensité spécifique issue de l'étoile dans le domaine de Wien.

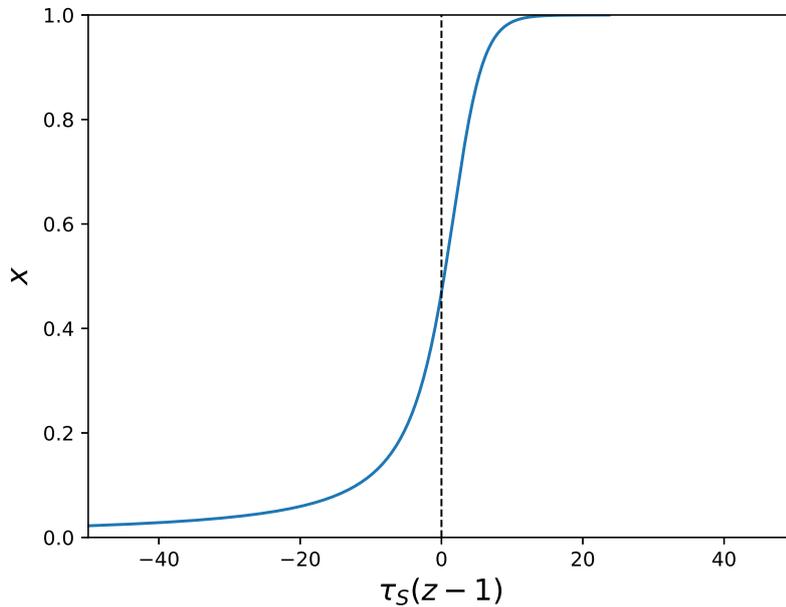


FIGURE 7.4 – Fraction d'hydrogène neutre au bord d'une région HII.

région HII si celle-ci était entièrement neutre, et en prenant comme variable adimensionnée  $z = r/R_S$ , on montre alors que la fraction d'hydrogène neutre vérifie l'équation

$$\exp \left[ -\tau_S \int_0^z x(u) du \right] = \frac{3z^2 (1-x)^2}{\tau_S x} \quad (7.33)$$

La résolution de cette équation différentielle pour la fraction d'hydrogène neutre  $x(z)$  est proposée analytiquement par [45]. La transition du milieu ionisé au milieu neutre, représentée sur la Fig. 7.4, se fait sur une distance très courte, de l'ordre de quelques  $R_S/\tau_S = l_I$ .

### 7.2.7 Coefficient de recombinaison

Pour déterminer le coefficient de recombinaison  $\alpha$  de l'équation (7.25), on écrit que le taux de recombinaison par unité de volume vers un niveau donné  $n$  est lié au processus d'émission libre-lié par (7.4)

$$r_c(n) = n_e n_p \int v f(\mathbf{v}) \mathcal{A}(n) d^3 \mathbf{v} \quad (7.34)$$

où l'on a ignoré le processus d'émission stimulée, car au bord de la région HII le rayonnement UV est fortement atténué<sup>10</sup>. En utilisant les relations d'Einstein-Milne (7.5), on montre alors que

$$\mathcal{A}(n) = \frac{h s_1}{m_e c^2} n^3 \frac{\nu_n^3}{\nu(\nu - \nu_n)} g_n(\nu) \quad (7.35)$$

**Exercice 113 : Démontrer la relation (7.35).**

10. La petitesse du facteur géométrique  $W$  joue également dans le sens de cette hypothèse.

On peut alors réécrire l'intégrale en utilisant la variable  $\nu$  plutôt que  $v$ , via la conservation de l'énergie (7.2). On montre alors que  $r_c(n) = \alpha(n)n_e n_p$ , avec la constante

$$\alpha(n) = \frac{8\pi s_1 \Lambda_e^3 \nu_1^3}{c^2 n^3} \exp\left(\frac{\chi_0}{kTn^2}\right) \int_{\nu_n}^{\infty} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \frac{g_n(\nu)}{\nu} d\nu \quad (7.36)$$

où  $\Lambda_e$  est la longueur d'onde thermique de de Broglie des électrons (4.52). Comme la recombinaison sur un niveau excité est rapidement suivie d'une désexcitation radiative, le coefficient  $\alpha$  de recombinaison est alors la somme de ces constantes pour les différents niveaux  $n$ ,

$$\alpha = \sum_{n \geq 2} \alpha(n) \quad (7.37)$$

Le calcul numérique de cette constante donne typiquement  $\alpha = 3 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ .

*Note :* La somme porte sur les niveaux autres que le fondamental car la recombinaison directement sur le fondamental produit un photon Lyman qui est réabsorbé très rapidement.

### 7.2.8 Température et pression de la région HII

Dans un évènement de photoionisation isolé, le photon apporte non seulement l'énergie nécessaire à l'ionisation, mais également un excédent  $\Delta E = h\nu - \chi_0$ . Celui-ci est converti en **énergie cinétique des produits de la réaction, notamment de l'électron**. Par le biais des collisions entre particules de la région ionisée, l'effet net est une **augmentation de la température**. Dans les régions HII, on a en effet plutôt  $T \sim 10^4 \text{ K}$ , tandis que  $T \sim 50 \text{ K}$  dans le nuage HI environnant.

D'autre part, l'ionisation double le nombre de particules par unité de volume (on passe d'un atome neutre à un électron et un proton). Ces deux effets contribuent à une **forte augmentation de la pression** dans la région HII par rapport au milieu neutre. Les calculs précédents ont négligé ce déséquilibre de pression, qui amène à une **expansion rapide**, et même supersonique, de la région HII, provoquant l'apparition d'**ondes de choc**.

#### *Remarques :*

- L'atmosphère des étoiles chaudes absorbe en réalité une partie de l'UV lointain, ce qui diminue le nombre de photons disponibles pour l'ionisation du voisinage stellaire. **Le rayon  $R_S$  calculé plus haut est donc surestimé.**
- Par ailleurs, une étoile massive O ou B met  $\sim 6 \cdot 10^4$  ans à se contracter vers la séquence principale. Pendant ce temps elle émet de la lumière, mais essentiellement à grande longueur d'onde, donc sans ioniser. En revanche, la pression de radiation contribue à repousser le gaz vers l'extérieur, de sorte que quand l'étoile commence à émettre des photons Lyman, la densité du gaz autour de l'étoile a chuté, et l'ionisation se fait plutôt au bord de la cavité formée par cette phase de **vent stellaire**.

## 7.3 Raies des nébuleuses ionisées

Les nébuleuses ionisées, que ce soit les régions HII ou les nébuleuses planétaires, émettent un spectre très riche dans le visible et l'UV, ainsi que dans l'infrarouge<sup>11</sup>. Si elles diffèrent par leur origine, leur composition chimique et leur taille, ces deux types d'environnement sont assez semblables du point de vue du transfert, car de densités comparables (de 1 à  $10^6 \text{ cm}^{-3}$ ) et soumises à un rayonnement UV intense. Elles ont également des températures voisines, de l'ordre de  $10^4 \text{ K}$  : il s'agit d'un **effet thermostatique** dû à la présence de nombreuses transitions électroniques de l'ordre de l'eV pouvant

11. Le gaz ionisé est notablement plus riche dans les PN, qui sont aussi plus petites que les régions HII.

évacuer l'énergie par rayonnement.

L'une des propriétés les plus étonnantes des spectres observés dans ces objets est **l'intensité comparable des raies permises et des raies interdites**. Comme on le verra, ce phénomène est lié à la faible densité du milieu et à la présence de différents degrés d'ionisation des espèces.

### 7.3.1 Raies permises

Deux processus gouvernent la formation des raies permises dans les nébuleuses ionisées : la **fluorescence** et les **excitations par collision**. On remarque tout d'abord que les processus induits (émission stimulée et absorption) peuvent être négligés devant l'émission spontanée (voir la note 10).

#### Fluorescence

Les **raies de fluorescence** se forment par les cascades radiatives suivant la recombinaison, sur un niveau excité, d'un ion avec un électron libre. Elles sont **issues des espèces dont le degré d'ionisation est immédiatement inférieur au degré prépondérant**, à savoir HI dans la région dominée par HII, HeI dans les régions externes où l'hélium est essentiellement sous forme HeII, et HeII dans les régions plus internes où l'hélium est essentiellement sous forme HeIII<sup>12</sup>. La raison en est que ce sont les espèces formées par la recombinaison des degrés d'ionisation prépondérants avec les électrons libres.

On a alors, pour un niveau  $i$  donné, l'équilibre statistique suivant

$$n_i \sum_{j < i} A_{ij} = n_+ n_e \alpha_i(T) + \sum_{j > i} n_j A_{ji} \quad (7.38)$$

où  $n_+$  est la densité du degré d'ionisation dominant et  $n_e$  celle des électrons libres. Le coefficient  $\alpha_i(T)$ , en réalité faiblement dépendant de la température, est le coefficient de recombinaison sur le niveau  $i$ , exprimé en  $\text{cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  (voir la section 7.2.7). Remarquons que la population du niveau fondamental n'obéit pas à ce type d'équation. Celle-ci est déterminée par une équation différente portant sur l'équilibre d'ionisation, et qui est décrite dans la section 7.2.

L'équation (7.38) est obtenue en remarquant que **les termes de désexcitations collisionnelles sont négligeables devant les termes de transitions radiatives spontanées** correspondantes, car

$$\eta_{ij} = \frac{C_{ij} n_e}{A_{ij}} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E_{ij}}{kT}\right) \right] \sim \frac{C_{ij} n_e}{A_{ij}} \sim \frac{10^{-8}}{A_{ij}} n_e \quad (7.39)$$

pour  $T \sim 10^4$  K. Comme les raies permises ont des coefficients d'Einstein d'émission spontanée de l'ordre de  $A_{ij} \sim 10^8 \text{ s}^{-1}$ , pour que  $\eta_{ij} > 1$  il faudrait que  $n_e > 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ , densité largement supérieure à celle de ces nébuleuses. On peut donc en déduire que  $C_{ij} n_e \ll A_{ij}$ . **Quant aux termes d'excitations collisionnelles, ils sont aussi négligeables** par la relation qu'on a établie au 6.2.4.

Les équations d'équilibre statistique forment un système linéaire pour les inconnues  $\{n_i\}$ , qu'on peut inverser connaissant le terme  $n_+ n_e \alpha_i(T)$ . Dans celui-ci,  $n_+ = n_{\text{H}^+} \simeq n_e$  si on s'intéresse aux raies de fluorescence de l'hydrogène,  $n_+ = n_{\text{He}^+}$  si on s'intéresse à l'hélium dans les régions externes, et  $n_+ = n_{\text{He}^{2+}}$  si on s'intéresse à l'hélium dans les régions internes.

L'inversion de la **matrice de cascades** permet d'exprimer les émissivités des différentes raies de fluorescence sous la forme

12. Les énergies d'ionisation successive de l'hélium sont 24.6 eV et 54.4 eV.

$$\epsilon_{ij} = \frac{h\nu_{ij}}{4\pi} n_e n_{+} \alpha_{i,\text{eff}}(T, n_e) \quad (7.40)$$

où  $\alpha_{i,\text{eff}}(T, n_e)$  est un **coefficient effectif de recombinaison** sur le niveau  $i$  qui tient compte des cascades  $k \rightarrow i$  depuis les niveaux supérieurs. On peut ainsi montrer que le rapport des émissivités des raies H $\alpha$  ( $n = 3 \rightarrow 2$ ) et H $\beta$  ( $n = 4 \rightarrow 2$ ) est sensiblement indépendant de  $T$  et  $n_e$  :

$$\frac{\epsilon(\text{H}\alpha)}{\epsilon(\text{H}\beta)} \simeq 3 \quad (7.41)$$

ce qui permet de l'utiliser pour **déterminer le rougissement par les poussières interstellaires** à partir des intensités observées dans ces deux raies.

### Excitation par collisions

Les autres raies permises intenses sont **celles des espèces dont le degré d'ionisation est dominant**. Elles ne se forment donc pas par recombinaison, mais par excitation (collisionnelle puisque les processus induits tels que l'absorption sont négligeables). Ce sont ces raies qui assurent l'**effet thermostatique** à  $10^4$  K. L'équilibre statistique des niveaux s'écrit ici

$$n_i \left[ \sum_{j<i} A_{ij} + n_e \sum_{j \neq i} C_{ij} \right] = n_e \sum_{j \neq i} n_j C_{ji} + \sum_{j>i} A_{ji} n_j \quad (7.42)$$

On peut cependant montrer que dans les conditions de densité et de champ de rayonnement qui règnent dans ces nébuleuses, **les termes de désexcitations collisionnelles de ces transitions sont négligeables devant les termes de désexcitations radiatives**. On a alors

$$n_i \left[ \sum_{j<i} A_{ij} + n_e \sum_{j>i} C_{ij} \right] = n_e \sum_{j<i} n_j C_{ji} + \sum_{j>i} A_{ji} n_j. \quad (7.43)$$

En prenant un cas très simple à deux niveaux  $E_2 > E_1$  découplés du reste du spectre, on montre alors que l'émissivité de la raie se met sous la forme

$$\epsilon_{12} = \frac{h\nu_{12}}{4\pi} n_2 A_{21} = \frac{h\nu_{12}}{4\pi} n_1 n_e C_{12} \quad (7.44)$$

#### **Exercice 114 : Démontrer la relation (7.44).**

On peut notamment utiliser ces raies pour **déterminer l'abondance des éléments lourds** (comme le carbone dans ses différents états d'ionisation) dans la nébuleuse, une fois connue la température et donc le coefficient  $C_{12}(T)$ .

Note : l'expression de l'émissivité d'une raie  $u \rightarrow l$  se met généralement sous la forme

$$\epsilon_{ul} = \beta \frac{h\nu_{ul}}{4\pi} A_{ul} n_u \quad (7.45)$$

faisant intervenir la probabilité d'échappement  $\beta$ .

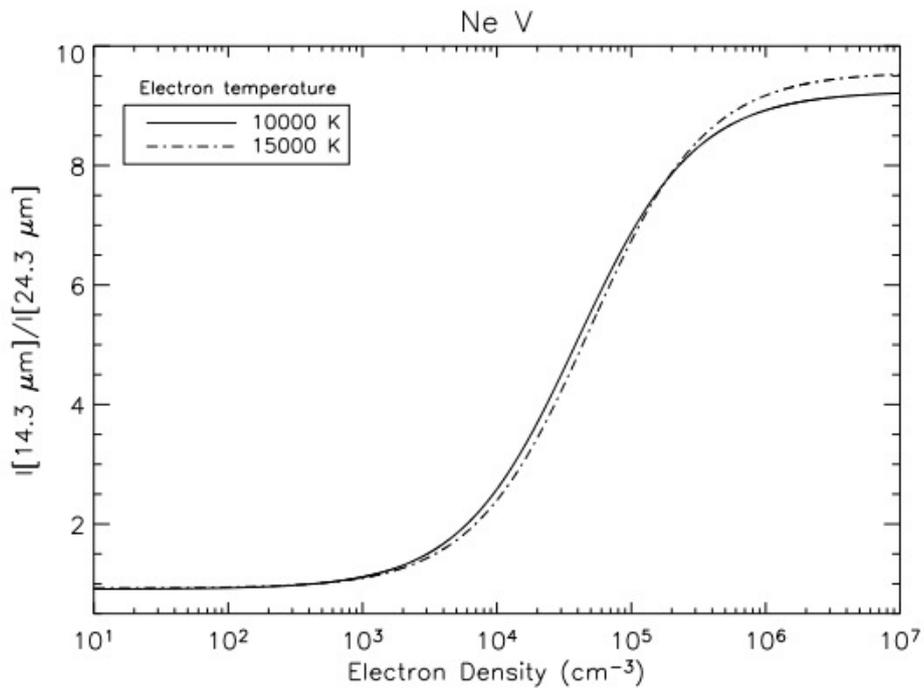
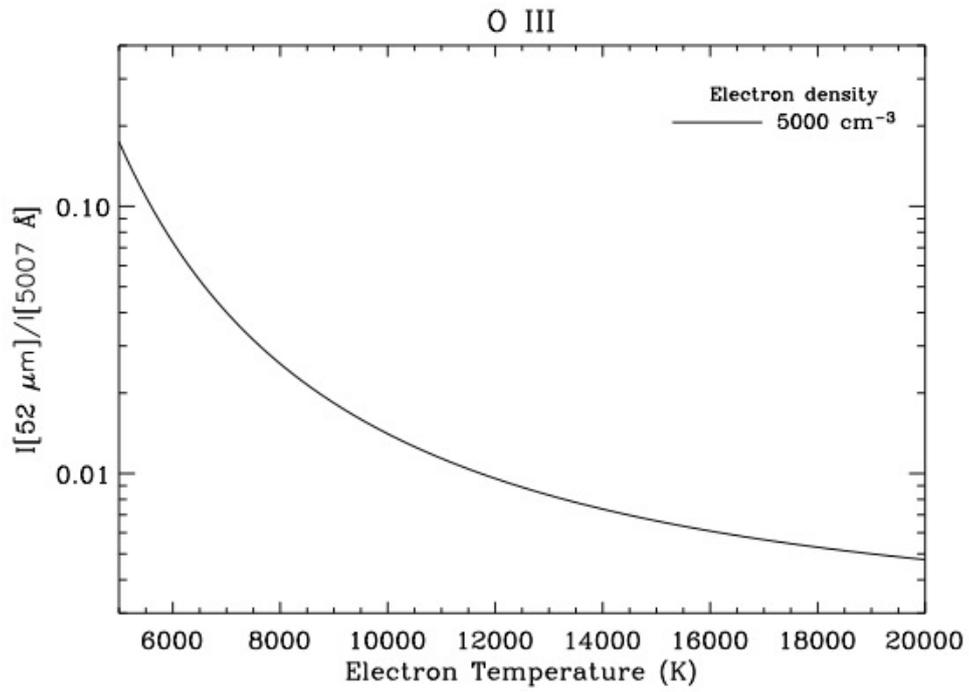


FIGURE 7.5 – Évolution des rapports de raies de OIII et NeV en fonction de la température et de la densité électroniques.

### 7.3.2 Raies interdites

Ces raies se forment par excitation collisionnelle, comme les raies permises des ions dominants, mais cette fois **les désexcitations collisionnelles ne peuvent être a priori négligées devant les désexcitations radiatives spontanées** puisque celles-ci sont maintenant caractérisées par des coefficients d'Einstein beaucoup plus petits. Les termes induits peuvent toujours être négligés.

Considérant un système simple à deux niveaux, on a donc l'équilibre statistique suivant

$$n_2 (n_e C_{21} + A_{21}) = n_1 n_e C_{12} \quad (7.46)$$

Cette écriture fait donc apparaître la **densité critique**  $n_e^{\text{crit}}$  de la transition (6.21). Comme cette densité critique est de l'ordre de  $10^5$  à  $10^6 \text{ cm}^{-3}$ , donc supérieure aux densités typiques des nébuleuses ionisées, on peut alors montrer que l'émissivité de la raie est donnée par

$$\epsilon_{12} = \frac{h\nu_{12}}{4\pi} n_2 A_{21} \simeq \frac{h\nu_{12}}{4\pi} n_1 n_e C_{12} \quad (7.47)$$

soit la même expression que pour les raies permises des ions dominants. Cette identité permet de comprendre pourquoi **les raies permises et interdites y sont d'intensités comparables**. L'intérêt notable de ces raies interdites est de permettre de **contraindre la densité et la température des nébuleuses en comparant des rapports de raies**, comme par exemple sur la Fig. 7.5, issue de [5].

**Exercice 115 :** Démontrer que lorsque  $n_e \ll n_e^{\text{crit}}$ , l'émissivité prend la forme (7.47). Dans la limite inverse  $n_e \gg n_e^{\text{crit}}$ , montrer que les populations des niveaux sont à l'ETL.

## Réponses aux exercices du chapitre 7

### Exercice 102

Comme pour l'établissement des relations d'Einstein, on se place dans le cas particulier de l'équilibre thermodynamique, pour lequel les taux de photoionisation et de recombinaison sont égaux, soit

$$n_{0,n}\pi_\nu J_\nu d\nu = n_1 n_e f(v) [\mathcal{A} + \mathcal{B}J_\nu] v d^3v$$

On note d'une part que  $f(v)d^3v = f_v(v)dv$  en introduisant la distribution des modules des vitesses (4.37), et d'autre part que  $hd\nu = m_e v dv$ , ce qui permet de relier les deux dans l'équation d'équilibre. De plus, à l'ETL,  $J_\nu = B_\nu(T)$  et les populations des espèces prennent leurs valeurs à l'ETL, qu'on note  $n_{0,n}^E$ ,  $n_1^E$  et  $n_e^E$ . On a donc

$$n_{0,n}^E \pi_\nu B_\nu(T) d\nu = \frac{h}{m_e} n_1^E n_e^E f_v(v) [\mathcal{A} + \mathcal{B}B_\nu(T)] dv$$

d'où l'on tire

$$[m_e n_{0,n}^E \pi_\nu - h n_1^E n_e^E f_v(v) \mathcal{B}] B_\nu(T) = h n_1^E n_e^E f_v(v) \mathcal{A}$$

et donc

$$B_\nu(T) = \frac{\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}}{\frac{m_e n_{0,n}^E \pi_\nu}{h n_1^E n_e^E f_v(v) \mathcal{B}} - 1}$$

La comparaison avec la fonction de Planck donne alors

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} = \frac{2h\nu^3}{c^2}$$

ce qui constitue la première des relations cherchées. D'autre part, on a

$$\frac{m_e n_{0,n}^E \pi_\nu}{h n_1^E n_e^E f_v(v) \mathcal{B}} = \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)$$

D'autre part, à l'ETL,  $f_v(v)$  est la distribution (4.37)

$$f_v(v) = \left(\frac{m_e}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2kT}\right) 4\pi v^2$$

et les populations sont données par la loi de Saha

$$\frac{n_1^E n_e^E}{n_0^E} = \frac{2Z_1(T)}{Z_0(T)} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} \exp\left(-\frac{\chi_0}{kT}\right)$$

Notons que dans cette expression la densité des neutres est celle de tous les états possibles, et  $\chi_0$  est le potentiel d'ionisation des neutres, compté comme il se doit depuis le fondamental. La loi de Boltzmann permet d'écrire alors que

$$\frac{n_1^E n_e^E}{n_{0,n}^E} = \frac{2Z_1(T)}{Z_0(T)} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} \exp\left(-\frac{\chi_0}{kT}\right) \times \frac{n_0^E}{n_{0,n}^E}$$

et donc

$$\frac{n_1^E n_e^E}{n_{0,n}^E} = \frac{2Z_1(T)}{Z_0(T)} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} \exp\left(-\frac{\chi_0}{kT}\right) \times \frac{Z_0(T)}{g_{0,n}} \exp\left(\frac{\mathcal{E}_n}{kT}\right)$$

soit

$$\frac{n_1^E n_e^E}{n_{0,n}^E} = \frac{2Z_1(T)}{g_{0,n}} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} \exp\left(-\frac{\chi_0 - \mathcal{E}_n}{kT}\right)$$

On a donc

$$\mathcal{B} = \pi_\nu \frac{m_e}{h} \frac{g_{0,n}}{2Z_1(T)} \frac{h^3}{(2\pi m_e kT)^{3/2}} \exp\left(\frac{\chi_0 - \mathcal{E}_n}{kT}\right) \left(\frac{2\pi kT}{m_e}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{m_e v^2}{2kT}\right) \frac{1}{4\pi v^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$$

Les arguments des exponentielles s'annulent par conservation de l'énergie et on a donc

$$\mathcal{B} = \pi_\nu \frac{m_e}{h} \frac{g_{0,n}}{2Z_1(T)} \frac{h^3}{(2\pi m_e kT)^{3/2}} \left(\frac{2\pi kT}{m_e}\right)^{3/2} \frac{1}{4\pi v^2}$$

ce qui donne en simplifiant encore

$$\mathcal{B} = \pi_\nu \frac{h^2}{m_e^2} \frac{g_{0,n}}{2Z_1(T)} \frac{1}{4\pi v^2}$$

et en réutilisant la conservation de l'énergie

$$\mathcal{B} = \pi_\nu \frac{h^2}{m_e} \frac{g_{0,n}}{Z_1(T)} \frac{1}{16\pi \times [h\nu - (\chi_0 - \mathcal{E}_n)]}$$

On introduit alors la fréquence  $\nu_n = (\chi_0 - \mathcal{E}_n)/h$  et on a la seconde relation d'Einstein-Milne

$$\mathcal{B} = \pi_\nu \frac{h}{m_e} \frac{g_{0,n}}{Z_1(T)} \frac{1}{16\pi (\nu - \nu_n)}$$

### **Exercice 103**

La quantité  $r_p/n_{0,n} = \pi_\nu J_\nu d\nu$  est la probabilité par unité de temps qu'un neutre soit photo-ionisé. La probabilité de photo-ionisation, par atome neutre, pendant  $dt$  est donc

$$\mathcal{P} = \pi_\nu J_\nu d\nu dt = \pi_\nu \times \frac{h\nu c n_\nu}{4\pi} \times d\nu dt = \frac{h\nu}{4\pi} \pi_\nu \times n_\nu d\nu \times c dt$$

La quantité  $n_\nu d\nu$  désignant un nombre de photons par unité de volume, et  $c dt$  étant la longueur du cylindre dans lequel se trouvent, pendant  $dt$ , les photons susceptibles d'être absorbés, le facteur restant s'interprète naturellement comme la section de ce même cylindre, et donc comme la section efficace d'absorption.

### **Exercice 104**

On peut mettre le coefficient d'absorption sous la forme

$$\kappa_\nu = s_{\nu,a} \left[ n_{0,n} - \frac{h}{m_e \pi_\nu} n_1 n_e f_\nu(v) \mathcal{B} \right] = s_{\nu,a} \left[ n_{0,n} - \frac{h}{m_e} n_1 n_e f_\nu(v) \frac{h}{16\pi m_e} \frac{g_{0,n}}{Z_1(T)} \frac{1}{\nu - \nu_n} \right]$$

et on peut alors réutiliser la conservation de l'énergie

$$\kappa_\nu = s_{\nu,a} \left[ n_{0,n} - \frac{h}{m_e} n_1 n_e f_\nu(v) \frac{h^2}{16\pi m_e} \frac{g_{0,n}}{Z_1(T)} \frac{2}{m_e v^2} \right] = s_{\nu,a} \left[ n_{0,n} - \frac{h^3}{m_e^3} n_1 n_e \frac{f_\nu(v)}{4\pi v^2} \frac{g_{0,n}}{2Z_1(T)} \right]$$

puis la distribution des modules des vitesses, qui donne

$$\kappa_\nu = s_{\nu,a} \left[ n_{0,n} - \frac{h^3}{(2\pi m_e kT)^{3/2}} n_1 n_e \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2kT}\right) \frac{g_{0,n}}{2Z_1(T)} \right]$$

On introduit alors

$$n_{0,n}^* = n_1 n_e \frac{g_{0,n}}{2Z_1(T)} \frac{h^3}{(2\pi m_e kT)^{3/2}} \exp\left(\frac{\chi_0 - \mathcal{E}_n}{kT}\right)$$

et en simplifiant, on obtient le résultat annoncé

$$\kappa_\nu = s_{\nu,a} \left[ n_{0,n} - n_{0,n}^* \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right]$$

### **Exercice 105**

Partant de l'expression de l'émissivité, on a

$$\epsilon_\nu = \frac{h^2 \nu}{4\pi m_e} n_1 n_e f_\nu(v) \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{h}{16\pi m_e} \frac{g_{0,n}}{Z_1(T)} \frac{\pi_\nu}{\nu - \nu_n}$$

ce qu'on modifie en appliquant la conservation de l'énergie

$$\epsilon_\nu = \frac{h^2 \nu}{4\pi m_e} n_1 n_e f_\nu(v) \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{h^2}{8\pi m_e} \frac{g_{0,n}}{Z_1(T)} \frac{\pi_\nu}{m_e v^2}$$

puis la distribution des modules de la vitesse

$$\epsilon_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{h\nu}{4\pi} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \frac{h^3}{(2\pi m_e kT)^{3/2}} n_1 n_e \frac{g_{0,n}}{2Z_1(T)} \exp\left(\frac{\chi_0 - \mathcal{E}_n}{kT}\right) \pi_\nu$$

et enfin on introduit  $n_{0,n}^*$

$$\epsilon_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{h\nu}{4\pi} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) n_{0,n}^* \pi_\nu$$

puis la section efficace

$$\epsilon_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) n_{0,n}^* s_{\nu,a}$$

et enfin la fonction de Planck

$$\epsilon_\nu = n_{0,n}^* s_{\nu,a} B_\nu(T) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right].$$

### **Exercice 106**

Chaque triplet  $(n, l, m)$  recouvre en réalité deux états correspondant aux deux valeurs possibles du spin électronique, de sorte que chaque niveau d'énergie a une dégénérescence

$$g_n = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^l 2 = 2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = 2 \left[ 2 \frac{n(n-1)}{2} + n \right] = 2n^2$$

### **Exercice 107**

On a  $T \ll T_0$ , donc  $kT \ll \chi_0$  et le facteur de Boltzmann est donc extrêmement petit. Celui intervenant dans le rapport des populations des deux premiers niveaux à cette température est

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{kT}\right) = 4 \exp\left(-\frac{3\chi_0}{4kT}\right) = 4 \exp\left(-\frac{3T_0}{4T}\right) = e^{-2367} \ll 1$$

On en déduit que l'immense majorité des atomes d'hydrogène sont dans l'état fondamental et que les niveaux  $n > 1$  ne sauraient être excités collisionnellement.

### Exercice 108

On a

$$A_{ul} = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} B_{ul} = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} \frac{g_l}{g_u} B_{lu} = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} \frac{g_l}{g_u} \frac{\pi e^2}{h\nu_{ul}\epsilon_0 m_e c} f_{ul} = \frac{2\pi\nu_{ul}^2 e^2}{\epsilon_0 m_e c^3} \frac{g_l}{g_u} f_{ul}$$

Avec  $u = q$  et  $l = p$ , et étant donné que  $g_p = 2p^2$ ,  $g_q = 2q^2$ , et

$$\nu_{qp} = \frac{\mathcal{E}_q - \mathcal{E}_p}{h} = \frac{\chi_0}{h} \left( \frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2} \right)$$

on aboutit à la relation demandée

$$A_{qp} = \frac{2\pi e^2 \chi_0^2}{\epsilon_0 m_e c^3 h^2} \frac{p^2}{q^2} f_{pq} \left( \frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2} \right)^2.$$

### Exercice 109

On rappelle que le flux sortant par unité de surface de l'étoile et par intervalle de fréquence est

$$F_\nu^+ = \pi I_\nu = \pi B_\nu(T_\star).$$

Cette grandeur est exprimée en  $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{Hz}^{-1}$ . On la multiplie par la surface de l'étoile et on divise par l'énergie d'un photon pour avoir le nombre de photons émis dans cet intervalle de fréquence par unité de temps (en  $\text{s}^{-1}\cdot\text{Hz}^{-1}$ )

$$N_\nu = 4\pi R_\star^2 \frac{F_\nu^+}{h\nu} = \frac{4\pi^2 R_\star^2 B_\nu(T_\star)}{h\nu}.$$

On peut éliminer le rayon via la luminosité bolométrique car

$$L_\star = 4\pi R_\star^2 \times \int_0^\infty F_\nu^+ d\nu = 4\pi^2 R_\star^2 \int_0^\infty B_\nu(T_\star) d\nu = 4\pi R_\star^2 \sigma T_\star^4$$

ce qui donne

$$N_\nu = \frac{L_\star}{h\nu} \frac{B_\nu(T_\star)}{\int_0^\infty B_\nu(T_\star) d\nu} = \frac{\pi L_\star}{h\nu} \frac{B_\nu(T_\star)}{\sigma T_\star^4}$$

On intègre alors sur les fréquences avec la bonne limite inférieure, à savoir  $\nu \geq \nu_{\text{Ly}}$ , pour obtenir le nombre de photons Lyman émis par l'étoile par unité de temps

$$N_{\text{Ly}} = \int_{\nu_{\text{Ly}}}^\infty N_\nu d\nu = \frac{\pi L_\star}{\sigma T_\star^4} \int_{\nu_{\text{Ly}}}^\infty \frac{B_\nu(T_\star)}{h\nu} d\nu$$

On écrit la fonction de Planck sous une forme adimensionnée

$$B_\nu(T_\star) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT_\star}\right) - 1} = \frac{2h}{c^2} \left(\frac{kT_\star}{h}\right)^3 \frac{x^3}{e^x - 1} \quad \text{avec} \quad x = \frac{h\nu}{kT_\star}$$

et donc

$$\frac{B_\nu(T_\star)}{h\nu} = \frac{2}{c^2} \left(\frac{kT_\star}{h}\right)^2 \frac{x^2}{e^x - 1}$$

Alors, en notant que

$$x_{Ly} = \frac{h\nu_{Ly}}{kT_\star} = \frac{\chi_0}{kT_\star} = \frac{T_0}{T_\star}$$

on a  $N_{Ly}$  sous la forme

$$N_{Ly} = \frac{\pi L_\star}{\sigma T_\star^4} \int_{x_{Ly}}^{\infty} \frac{2}{c^2} \left( \frac{kT_\star}{h} \right)^2 \frac{x^2}{e^x - 1} d\left( \frac{kT_\star x}{h} \right) = \frac{2\pi k^3 L_\star}{\sigma c^2 h^3 T_\star} \int_{x_{Ly}}^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx$$

Or la constante de Stefan vaut

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}$$

donc

$$N_{Ly} = \frac{15c^2 h^3}{2\pi^5 k^4} \frac{2\pi k^3 L_\star}{c^2 h^3 T_\star} \int_{x_{Ly}}^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx$$

et finalement on peut écrire

$$N_{Ly} = \frac{15}{k\pi^4} \frac{L_\star}{T_0} G\left(\frac{T_0}{T_\star}\right) \quad \text{avec} \quad G(u) = u \int_u^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx$$

On peut réécrire cette expression en explicitant les facteurs numériques et en introduisant la luminosité solaire  $L_\odot = 3.826 \cdot 10^{26}$  W,

$$N_{Ly} = 2.71 \cdot 10^{43} \text{ s}^{-1} \times \left( \frac{L_\star}{L_\odot} \right) \times G\left(\frac{T_0}{T_\star}\right)$$

### Exercice 110

Les photons ionisants émis pendant  $dt$  servent non seulement à augmenter le volume de la région HII, mais aussi à réioniser les atomes d'hydrogène reformés par la recombinaison. Ce nombre s'écrit naturellement comme le produit de  $r_c$  par le volume de la région HII et par  $dt$ , de sorte que

$$N_{Ly} dt = n_{\text{tot}} \times 4\pi R^2 dR + \alpha n_{\text{tot}}^2 \times \frac{4}{3} \pi R^3 \times dt$$

On a donc

$$\frac{dR}{dt} = \frac{N_{Ly}}{4\pi R^2 n_{\text{tot}}} - \frac{1}{3} \alpha n_{\text{tot}} R$$

Aux temps courts, comme  $R \simeq 0$ , le second terme du membre de droite est négligeable. On a alors une évolution en  $t^{1/3}$ . Au fur et à mesure que  $R$  augmente, le terme d'ionisation devient plus petit et le terme de recombinaison plus important, jusqu'à ce qu'on atteigne l'équilibre entre les deux, pour un rayon

$$R_S = \left( \frac{3N_{Ly}}{4\pi \alpha n_{\text{tot}}^2} \right)^{1/3}$$

On peut d'ailleurs résoudre complètement l'équation différentielle précédente, en passant au volume  $V$  de la sphère, car en multipliant par  $4\pi R^2$  des deux côtés, on obtient

$$\frac{dV}{dt} = \frac{N_{Ly}}{n_{\text{tot}}} - \alpha n_{\text{tot}} V$$

qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, donc

$$V(t) = \frac{N_{Ly}}{\alpha n_{\text{tot}}^2} + C e^{-\alpha n_{\text{tot}} t}$$

où  $C$  est une constante qu'on détermine en imposant  $V(0) = 0$ , ce qui donne

$$V(t) = \frac{N_{Ly}}{\alpha n_{tot}^2} (1 - e^{-\alpha n_{tot} t})$$

et pour le rayon

$$R(t) = R_S (1 - e^{-\alpha n_{tot} t})^{1/3}$$

### **Exercice 111**

Le facteur géométrique est un facteur de dilution

$$W = \frac{\Omega_\star}{4\pi}$$

correspondant au rapport entre l'angle solide  $\Omega_\star$  sous lequel on voit l'étoile depuis  $r$  et l'angle solide complet  $4\pi$ . Or,

$$\Omega_\star = 2\pi (1 - \cos \theta_c) = 2\pi \left[ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{R_\star}{r}\right)^2} \right]$$

et donc

$$W = \frac{1}{2} \left[ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{R_\star}{r}\right)^2} \right]$$

### **Exercice 112**

En combinant les équations (7.3), (7.6), (7.22), (7.19), et (7.31), on obtient le taux de comme

$$r_p(r) = 4\pi n_H s_1 \int_{\nu_{Ly}}^{\infty} \frac{J_\nu(r)}{h\nu} d\nu = 4\pi n_H W s_1 \left[ \int_{\nu_{Ly}}^{\infty} \frac{I_\nu^\star}{h\nu} d\nu \right] \exp\left(-s_1 \int_{R_\star}^r n_H ds\right)$$

et on utilise alors la relation entre intensité spécifique et luminosité spectrale pour une telle source Lambertienne sphérique, qu'on rappelle ici

$$L_\nu^\star = 4\pi R_\star^2 \times \pi I_\nu^\star$$

et on a donc

$$r_p(r) = \frac{1}{4\pi^2 R_\star^2} 4\pi n_H W s_1 \left[ \int_{\nu_{Ly}}^{\infty} \frac{L_\nu^\star}{h\nu} d\nu \right] \exp\left(-s_1 \int_{R_\star}^r n_H ds\right)$$

On reconnaît le taux de production des photons Lyman, et on obtient la relation cherchée

$$r_p(r) = \frac{n_H W s_1 N_{Ly}}{\pi R_\star^2} \exp\left(-s_1 \int_{R_\star}^r n_H ds\right)$$

### **Exercice 113**

En utilisant les relations d'Einstein-Milne (7.5), la relation (7.6) et l'expression (7.22) de la section efficace d'absorption, on a

$$\mathcal{A}(n) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \times \frac{h}{16\pi m_e} \frac{g_{0,n}}{Z_1(T)} \frac{1}{\nu - \nu_n} \times \frac{4\pi}{h\nu} \times n s_1 \left(\frac{\nu_n}{\nu}\right)^3 g_n(\nu)$$

or le proton seul ne peut prendre qu'un seul état<sup>13</sup> donc  $Z_1(T) = 1$ , et on a vu que  $g_{0,n} = 2n^2$ . En simplifiant, et en réarrangeant, on a la formule annoncée

$$\mathcal{A}(n) = \frac{hs_1}{m_e c^2} n^3 \frac{\nu^3}{\nu(\nu - \nu_n)} \left(\frac{\nu_n}{\nu}\right)^3 g_n(\nu)$$

#### **Exercice 114**

À partir de la relation (7.43), on a l'équation bilan ( $i = 1$  et  $j = 2$ )

$$n_2 (n_e C_{21} + A_{21}) = n_1 n_e C_{12}$$

devient alors

$$n_1 n_e C_{12} = n_2 A_{21}$$

d'où l'émissivité de la raie

$$\epsilon_{12} = \frac{h\nu_{12}}{4\pi} n_2 A_{21} = \frac{h\nu_{12}}{4\pi} n_1 n_e C_{12}$$

#### **Exercice 115**

Pour  $n_e \ll n_e^{\text{crit}}$ , les désexcitations collisionnelles sont négligeables

$$n_2 C_{21} n_e^{\text{crit}} = n_2 A_{21} \simeq n_1 n_e C_{12}$$

et l'émissivité de la raie est donnée par

$$\epsilon_{12} = \frac{h\nu_{12}}{4\pi} n_2 A_{21} \simeq \frac{h\nu_{12}}{4\pi} n_1 n_e C_{12}$$

Inversement, pour  $n_e \gg n_e^{\text{crit}}$ , on inhibe complètement les transitions radiatives, car alors

$$n_2 (n_e C_{21} + A_{21}) = n_2 C_{21} (n_e + n_e^{\text{crit}}) \simeq n_2 n_e C_{21} = n_1 n_e C_{12}$$

ce qui donne

$$\frac{n_2}{n_1} \simeq \frac{C_{12}}{C_{21}} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{h\nu_{12}}{kT}\right)$$

et montre que les populations des niveaux sont à l'ETL via les collisions avec les électrons.

13. En réalité, il y a deux états possibles de spin, mais à chacun de ceux-là correspondent  $2n^2$  états électroniques possibles.

## Le rayonnement d'une charge en mouvement

La génération d'un rayonnement électromagnétique est interprétée classiquement comme étant liée à l'accélération de charges électriques. On va voir dans ce chapitre, à partir de rappels d'électrodynamique classique, les propriétés de ce rayonnement. On en tirera les propriétés du **rayonnement free-free**, appelé aussi **Bremsstrahlung thermique**. Les mouvements relativistes des électrons dans un champ magnétique donnent lieu quant à eux au **rayonnement synchrotron**, dont on ne parlera pas ici, et on se reportera utilement au cours de F. Casse.

### 8.1 Rappels d'électrodynamique classique

#### 8.1.1 Équations de Maxwell

L'électrodynamique classique est construite à partir des **équations de Maxwell**, qui décrivent le champ électromagnétique (champ électrique  $\mathbf{E}$  et champ magnétique  $\mathbf{B}$ ) en fonction des sources de ce champ, à savoir la **densité de charges électriques**  $\rho_e$  (charge par unité de volume) et la **densité de courant électrique**  $\mathbf{j}_e$  (charge par unité de surface et par unité de temps). On rappelle ici ces équations<sup>1</sup>

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_e + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (8.1)$$

À partir de ces équations, on montre notamment la loi de **conservation de la charge électrique**

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_e = 0. \quad (8.2)$$

**Exercice 116 :** Démontrer que les équations de Maxwell impliquent effectivement (8.2).

Pour une distribution de  $N$  charges ponctuelles  $q_i$ , de positions  $\mathbf{x}_i(t)$  et de vitesses  $\mathbf{v}_i = d\mathbf{x}_i/dt$ , les densités de charge et de courant prennent la forme

$$\rho_e(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \delta[\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)] \quad \mathbf{j}_e(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{v}_i \delta[\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)] \quad (8.3)$$

où  $\delta$  est la distribution de Dirac.

1. Il est intéressant de noter, comme le fait F. Shu [45], que les équations impliquant les rotationnels des champs peuvent se mettre sous une forme les faisant clairement apparaître comme des équations donnant l'évolution temporelle du champ électromagnétique, les équations impliquant les divergences fournissant les conditions initiales.

### 8.1.2 Force de Lorentz

Sous l'action des champs électrique et magnétique, une charge  $q_i$  subit la **force de Lorentz**

$$\mathbf{F}_{ie} = q_i (\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) \quad (8.4)$$

Lorsque des champs électromagnétiques sont présents, cette force est généralement la contribution dominante de la force subie par les charges, la force de gravitation étant notamment bien plus faible.

### 8.1.3 Théorème de Poynting

La puissance de la force de Lorentz  $\mathbf{F}_{ie} \cdot \mathbf{v}_i$  n'est due qu'à la contribution électrique  $q_i \mathbf{E}$  de la force, la contribution magnétique  $q_i \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}$  étant perpendiculaire à la vitesse de la charge, et ne travaillant donc pas. De cette puissance pour une distribution de charges et des équations de Maxwell, on tire le **théorème de Poynting**, qui est un bilan local d'énergie du champ électromagnétique

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Pi} = -\mathbf{j}_e \cdot \mathbf{E} \quad (8.5)$$

Dans cette expression, la **densité d'énergie du champ électromagnétique** est

$$u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (8.6)$$

tandis que le vecteur  $\mathbf{\Pi}$  associé au flux d'énergie du champ est le **vecteur de Poynting**

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \quad (8.7)$$

Le membre de droite de l'équation (8.5) représente alors la puissance cédée au champ par les charges, opposée de celle cédée aux charges par le champ.

**Exercice 117 :** Démontrer le théorème de Poynting (8.5).

### 8.1.4 Ondes électromagnétiques dans le vide

#### Équations d'onde

Dans le vide, c'est-à-dire pour  $\rho_e = 0$  et  $\mathbf{j}_e = \mathbf{0}$ , le couplage entre les deux champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  via les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -c^2 \nabla \times \mathbf{B} \quad (8.8)$$

permet d'envisager des solutions non triviales, où des champs électriques et magnétiques variables dans le temps peuvent s'entretenir mutuellement. Ces solutions sont celles des **équations d'onde**

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad \Delta \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (8.9)$$

où  $\Delta$  est l'opérateur Laplacien. Les solutions de ces équations dépendent de la géométrie du problème, c'est-à-dire de la dépendance spatiale des champs. On aura en particulier des **ondes planes** ou des **ondes sphériques**, ces dernières pouvant localement être assimilées à des ondes planes. On considère donc dans la suite uniquement des ondes planes.

### Exercice 118 : Obtenir les équations d'onde (8.9).

#### Structure de l'onde électromagnétique

L'onde électromagnétique est **transverse**, c'est-à-dire que le champ électrique et le champ magnétique sont perpendiculaires au vecteur de Poynting  $\mathbf{\Pi}$ , et sont également perpendiculaires l'un à l'autre, le trièdre  $(\mathbf{\Pi}, \mathbf{E}, \mathbf{B})$  étant direct. La donnée du seul champ électrique permet alors de déterminer également le champ magnétique. Posant  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire portant la direction de propagation de l'onde plane, on a alors

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct) + \mathbf{E}_-(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + ct) \quad (8.10)$$

où  $\mathbf{E}_+$  et  $\mathbf{E}_-$  sont des fonctions vectorielles arbitraires, la première décrivant une onde se propageant dans la direction  $\mathbf{n}$ , la seconde décrivant une onde se propageant dans la direction  $-\mathbf{n}$ .

#### Composantes de Fourier

Chacune de ces fonctions peut être décomposée en utilisant la **transformée de Fourier**,

$$\mathbf{E}_\pm(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \mp ct) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathbf{E}}_\pm(k) dk = \Re \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathcal{E}}_\pm(k) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \mp \omega t)} dk \right] \quad (8.11)$$

où  $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$  est le **vecteur d'onde** et  $\omega = ck$  est la **pulsation**. Dans cette écriture, les **amplitudes des composantes de Fourier**  $\widehat{\mathbf{E}}_\pm$  sont prises complexes. En posant  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$  pour fixer les idées, et en ne considérant que l'onde se propageant dans la direction  $+\mathbf{e}_z$ , on les écrit

$$\widehat{\mathcal{E}}_\pm(k) = \mathcal{E}_x e^{i\phi_x} \mathbf{e}_x + \mathcal{E}_y e^{i\phi_y} \mathbf{e}_y \quad (8.12)$$

Comme le champ électrique est la partie réelle de l'intégrale, ses composantes de Fourier sont alors

$$\widehat{\mathbf{E}}_\pm(k) = \mathcal{E}_x \cos(kz - \omega t + \phi_x) \mathbf{e}_x + \mathcal{E}_y \cos(kz - \omega t + \phi_y) \mathbf{e}_y \quad (8.13)$$

#### Paramètres de Stokes

À une fréquence donnée, c'est-à-dire pour chaque composante de Fourier, le champ électromagnétique est donc déterminé par quatre données, à savoir  $\mathcal{E}_x$ ,  $\phi_x$ ,  $\mathcal{E}_y$  et  $\phi_y$ . Celles-ci peuvent être remplacées par un ensemble équivalent, les **paramètres de Stokes**  $I$ ,  $Q$ ,  $U$ ,  $V$ , définis par

$$I = \mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2 \quad Q = \mathcal{E}_x^2 - \mathcal{E}_y^2 \quad U = 2\mathcal{E}_x \mathcal{E}_y \cos(\phi_y - \phi_x) \quad V = 2\mathcal{E}_x \mathcal{E}_y \sin(\phi_y - \phi_x) \quad (8.14)$$

Une onde purement monochromatique est polarisée, et la forme la plus générale de cette polarisation est elliptique. On montre alors que les paramètres de Stokes s'écrivent

$$I = \mathcal{E}_0^2 \quad Q = \mathcal{E}_0^2 \cos 2\beta \cos 2\chi \quad U = \mathcal{E}_0^2 \cos 2\beta \sin 2\chi \quad V = \mathcal{E}_0^2 \sin 2\beta \quad (8.15)$$

où  $\chi$  est l'angle que fait l'axe principal de l'ellipse avec l'axe  $x$ ,  $\beta$  est un angle caractérisant l'ellipticité ( $\tan \beta$  étant le rapport entre le petit et le grand axe de l'ellipse), et  $\mathcal{E}_0$  caractérise la taille de l'ellipse. **Le paramètre  $I$  est l'intensité totale de l'onde électromagnétique, qui est polarisée linéairement si  $V = 0$ , et circulairement si  $Q = U = 0$ .** Dans ce cas purement monochromatique, on a la relation

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2 \quad (8.16)$$

mais il convient de noter que dans les observations, qui moyennent sur une bande de fréquence finie, la polarisation n'est généralement pas totale, et on a alors [45]

$$\bar{I}^2 \geq \bar{Q}^2 + \bar{U}^2 + \bar{V}^2 \quad (8.17)$$

où la notation  $\bar{X}$  désigne la moyenne temporelle et sur les fréquences de la grandeur  $X$ .

### Exercice 119 : Démontrer la relation (8.16)

## 8.1.5 Potentiels

Le champ électrique et le champ magnétique peuvent être écrits comme dérivant d'un **potentiel scalaire**  $\phi$  et d'un **potentiel vecteur**  $\mathbf{A}$  par les relations

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (8.18)$$

Ces potentiels ne sont pas définis de manière absolue, car une transformation de ces potentiels impliquant une fonction quelconque de l'espace peut aboutir aux mêmes champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ . Il est donc usuel de fixer<sup>2</sup> les potentiels au moyen d'une **jauge**. Les deux plus utilisées sont la **jauge de Lorentz**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (8.19)$$

et la **jauge de Coulomb**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (8.20)$$

**Exercice 120 : Déterminer les transformations des potentiels laissant invariants les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ . On rappelle que le rotationnel d'un gradient est nul.**

## 8.1.6 Potentiels retardés

Les potentiels sont solutions des équations suivantes, qu'on obtient à partir des équations de Maxwell, de la définition des potentiels, et de la jauge de Lorentz,

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}_e \quad \Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (8.21)$$

et on montre, à partir des **fonctions de Green**, que les solutions de ces équations prennent la forme de **potentiels retardés**

2. Notons que la jauge de Coulomb ne fixe encore pas de manière univoque les potentiels, bien qu'elle impose une contrainte supplémentaire.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_e(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \quad V(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_e(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \quad (8.22)$$

où  $t'$  est le **temps retardé**,

$$t' = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \quad (8.23)$$

Ces équations s'interprètent en notant par exemple que le potentiel  $V$  est celui associé en théorie Coulombienne (c'est-à-dire en électrostatique) à la distribution de charge  $\rho_e$ , mais à condition de prendre celle-ci au temps  $t'$  antérieur au temps considéré, **la différence de temps étant celle mise par le signal électromagnétique émis en  $x'$  au temps  $t'$  pour être reçu en  $x$  au temps  $t$ .**

**Exercice 121 :** Établir les équations d'évolution des potentiels (8.21).

### 8.1.7 Potentiels de Liénard-Wiechert

Lorsque les potentiels (8.22) sont associés au mouvement d'une charge unique, les distributions de charge et de courant prennent la forme donnée en (8.3), avec  $N = 1$ . En notant  $\mathbf{x}'$  la position de la charge, on montre alors que les expressions (8.22) donnent les **potentiels de Liénard-Wiechert**

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v}(t')}{R(t') - \frac{\mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{v}(t')}{c}} \quad V(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R(t') - \frac{\mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{v}(t')}{c}} \quad (8.24)$$

où  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{x} - \mathbf{x}'(t)$  est le rayon vecteur séparant la charge de la position considérée,  $R = \|\mathbf{R}\|$  et  $t'$  est le temps retardé, solution de l'équation implicite

$$t' = t - \frac{R(t')}{c} \quad (8.25)$$

On note que pour une charge immobile, ces potentiels redonnent les formules de l'électrostatique

$$\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \quad (8.26)$$

et que la forme du potentiel de Liénard-Wiechert  $V$  exprime simplement l'effet du mouvement de la charge sur le potentiel Coulombien, en tenant compte du temps fini nécessaire pour propager l'information de ce mouvement jusqu'au point considéré. L'apparition d'un potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  traduit celle d'un champ magnétique lorsque le champ électrique varie au cours du temps.

**Exercice 122 :** Démontrer les relations (8.24).

## 8.2 Développement multipolaire

### 8.2.1 Écriture des potentiels et des champs en champ lointain

Pour les sources d'intérêt astrophysique, la distance  $x$  entre la source et l'observateur est très grande devant la longueur d'onde  $\lambda$ , et également devant la taille caractéristique  $L$  des zones d'émission cohérente spatialement<sup>3</sup>, soit  $x \gg \lambda$  et  $x \gg L$ . Généralement, on a aussi  $\lambda \gg L$ , ce qui va permettre

3. À ne pas confondre avec la taille physique d'une source, dont les différents points émettent la plupart du temps de manière incohérente, c'est-à-dire sans relation de phase les unes avec les autres.

ultérieurement de procéder à un **développement multipolaire** où le petit paramètre du développement est  $L/\lambda$ . Pour le moment, ces considérations permettent déjà de réécrire les potentiels retardés (8.22) sous la forme suivante, correspondant à la **zone de champ lointain**

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi x} \int \mathbf{j}_e \left( \mathbf{x}', t - \frac{x}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c} \right) d^3 \mathbf{x}' \quad (8.27)$$

$$V(\mathbf{x}, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 x} \int \rho_e \left( \mathbf{x}', t - \frac{x}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c} \right) d^3 \mathbf{x}' \quad (8.28)$$

en posant  $\mathbf{n} = \mathbf{x}/x$  le vecteur unitaire liant la source à l'observateur, en assimilant la distance au dénominateur  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'(t)| \approx x$ , et en écrivant, pour le temps retardé,

$$t' \approx t - \frac{1}{c} (x - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'). \quad (8.29)$$

Le calcul des champs à partir des potentiels dépend de dérivées spatiales et temporelles (par rapport à  $\mathbf{x}$  et  $t$ ), des potentiels écrits plus haut. On montre notamment que

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \times \mathbf{n} \quad \mathbf{E} = c \mathbf{B} \times \mathbf{n} = \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \times \mathbf{n} \right) \times \mathbf{n} \quad (8.30)$$

ce qui traduit en particulier la structure locale d'onde plane du champ électromagnétique.

**Exercice 123 :** Interpréter géométriquement l'approximation (8.29).

**Exercice 124 :** Établir les équations du champ (8.30).

## 8.2.2 Rayonnement dipolaire

### Potentiel vecteur et champ électromagnétique

La première des approximations supplémentaires qu'on peut faire à partir des équations (8.27) et (8.28) consiste à purement et simplement ignorer la dépendance du temps retardé en la position  $\mathbf{x}'$  d'émission dans la source. Cela revient à considérer que **tous les points émettent en phase**, ce qui est valable si effectivement  $L \ll \lambda$ . Ceci constitue l'**approximation dipolaire**. On a alors  $t' = t - x/c$  et le potentiel vecteur pour un ensemble de charges en mouvement non relativiste devient

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi x} \dot{\mathbf{D}}(t') \quad (8.31)$$

où le vecteur  $\mathbf{D}$  est le **moment dipolaire** de la distribution

$$\mathbf{D} = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{x}_i \quad (8.32)$$

et où l'on a utilisé la notation usuelle  $\dot{\mathbf{D}}$  pour la dérivation de  $\mathbf{D}$  par rapport au temps. Cette dérivée est bien entendu prise au temps retardé  $t' = t - x/c$ . On en déduit le champ électromagnétique

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi x c} \ddot{\mathbf{D}}(t') \times \mathbf{n} \quad \mathbf{E} = \frac{\mu_0}{4\pi x} \left[ \ddot{\mathbf{D}}(t') \times \mathbf{n} \right] \times \mathbf{n} \quad (8.33)$$

### Vecteur de Poynting et formule de Larmor

En notant  $\mathbf{u}$  le vecteur unitaire portant  $\ddot{\mathbf{D}}$ , on en déduit le vecteur de Poynting caractérisant la propagation de l'énergie du champ électromagnétique dans l'approximation dipolaire

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\mu_0}{(4\pi x)^2 c} |\ddot{\mathbf{D}}|^2 \sin^2 \theta \mathbf{n} \quad (8.34)$$

où  $\theta$  est l'angle entre le vecteur  $\mathbf{u}(t')$  et la direction  $\mathbf{n}$  de l'observateur. La puissance électromagnétique rayonnée dans un angle solide  $d\Omega$  autour de cette direction étant  $dP = \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{S} = x^2 d\Omega \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}$ , la puissance émise par unité d'angle solide a alors la distribution connue du rayonnement dipolaire, nulle dans la direction de  $\mathbf{D}$  et maximale perpendiculairement à cette direction. La puissance totale rayonnée est obtenue par intégration sur la direction, et est donnée par la **formule de Larmor**<sup>4</sup>

$$P = \frac{\mu_0}{6\pi c} |\ddot{\mathbf{D}}|^2 = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} |\ddot{\mathbf{D}}|^2 \quad (8.35)$$

**Exercice 125 :** Établir l'expression du vecteur de Poynting et la formule de Larmor.

### 8.2.3 Rayonnement quadrupolaire électrique et dipolaire magnétique

Le niveau suivant d'approximation consiste à écrire le temps retardé sous la forme (8.29), et en notant que  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}' \ll x$ , en faisant un développement de Taylor des distributions de charge  $\rho_e$  et de courant  $\mathbf{j}_e$  au voisinage du temps  $t - x/c$ . On montre alors que le potentiel vecteur s'écrit

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi x} \left[ \dot{\mathbf{D}} + \frac{1}{6c} \mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{M}} \times \mathbf{n} \right] \quad (8.36)$$

Le premier terme est bien entendu le **terme dipolaire électrique**, le deuxième est appelé **terme quadrupolaire électrique**, et le troisième est le **terme dipolaire magnétique**. Ces deux derniers termes dépendent respectivement du **moment quadrupolaire électrique**

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^N q_i [3\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{x}_i - (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i) \mathbf{1}] \quad (8.37)$$

et du **moment dipolaire magnétique**

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{2c} \mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_i \quad (8.38)$$

Les champs électrique et magnétique correspondant sont alors donnés par les relations (8.30).

*Note :* Lorsque le moment dipolaire électrique n'est pas nul, les termes dipolaire magnétique et quadrupolaire électrique sont en général de l'ordre de  $v/c$  par rapport au terme dipolaire électrique. Il convient de noter que les processus qui conservent  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{M}$ , comme les collisions entre deux électrons<sup>5</sup>, ne peuvent rayonner via les termes dipolaires électrique et magnétique.

4. On trouvera souvent cette formule avec un préfacteur  $2/3c^3$  au lieu de  $\mu_0/6\pi c$ . Cette autre écriture correspond au système d'unités CGS, au lieu du système SI comme utilisé ici.

5. Cette conservation est liée à celle de l'impulsion et du moment cinétique, pour un système de particules dont le rapport  $q_i/m_i$  est identique.

## 8.3 Modèle de Thomson

### 8.3.1 Équation du mouvement, coefficient d'amortissement

Dans le **modèle de Thomson**, aussi appelé **modèle de l'électron élastiquement lié**, les électrons dans un atome sont vu comme des "raisins dans un pudding", que l'interaction avec une onde électromagnétique incidente vient déplacer légèrement de leur position d'équilibre, et que la présence de la charge positive nucléaire rappelle. Le déplacement  $x_1(t) = x_0 e^{-i\omega t}$  étant supposé petit, on peut considérer cette force de rappel comme harmonique, et l'équation du mouvement de l'électron est

$$\ddot{x}_1 = -\omega_0^2 x_1 - \gamma \dot{x}_1 - \frac{e}{m_e} E_0 e^{-i\omega t} \quad (8.39)$$

La détermination du **coefficient d'amortissement**  $\gamma$  se fait en notant que la puissance perdue par l'électron est convertie en puissance électromagnétique par le rayonnement dipolaire et donc donnée par la formule de Larmor (8.35). On en déduit son expression

$$\gamma = \frac{\mu_0 e^2 \omega^2}{6\pi m_e c} \quad (8.40)$$

**Exercice 126 : Démontrer la relation (8.40).**

### 8.3.2 Section efficace de diffusion

L'amplitude complexe du déplacement est alors donnée par

$$x_0 = \frac{e}{m_e} \frac{E_0}{(\omega^2 - \omega_0^2) + i\gamma\omega} \quad (8.41)$$

et on peut alors écrire la puissance rayonnée comme<sup>6</sup>

$$P = \frac{\mu_0 e^4 E_0^2}{12\pi c m_e^2} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (8.42)$$

En définissant la **section efficace de diffusion**  $s_d$  comme le rapport entre cette puissance rayonnée et la puissance par unité de surface reçue par l'électron de la part de l'onde électromagnétique incidente, on montre alors que celle-ci a pour expression, qu'on a déjà vue (5.30),

$$s_d = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e c} \frac{\gamma \omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (8.43)$$

**Exercice 127 : Démontrer la relation (8.43).**

### 8.3.3 Cas limites

Quelques cas limites sont particulièrement intéressants, en notant que généralement  $\gamma \ll \omega_0$ .

► À basse fréquence  $\omega \ll \omega_0$ , on est dans le régime de la **diffusion Rayleigh**, qui intervient dans la diffusion du rayonnement par les électrons liés dans les atomes. On a alors une dépendance en  $\omega^4$

$$s_d \simeq \frac{e^4}{6\pi \epsilon_0^2 m_e^2 c^4} \frac{\omega^4}{\omega_0^4} \quad (8.44)$$

6. On rappelle que pour une grandeur complexe  $X = X_0 e^{-i\omega t}$  associée à une grandeur réelle harmonique  $x = \Re[X]$ , la moyenne temporelle du carré de  $x$  fait apparaître un facteur 1/2, soit  $\langle x^2 \rangle = (1/2) |X_0|^2$ .

► La diffusion par les électrons libres est la **diffusion Thomson**, pour laquelle  $\omega_0 = 0$ . La section efficace ne dépend alors pas de la fréquence (à condition que les électrons ne soient pas relativistes, sinon on passe dans le régime de la **diffusion Compton**)

$$s_d \simeq \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0^2 m_e^2 c^4} \quad (8.45)$$

► La **diffusion résonnante dans une raie**, si la pulsation du rayonnement est proche de la pulsation propre de l'électron lié,  $\omega \simeq \omega_0$ , ce qui redonne le profil de Lorentz déjà vu,

$$s_d \simeq \frac{e^2}{2\epsilon_0 m_e c} \frac{\gamma/2}{(\gamma/2)^2 + (\omega - \omega_0)^2} \quad (8.46)$$

**Exercice 128 :** Démontrer les relations (8.44), (8.45) et (8.46).

## 8.4 Émission free-free

L'émission **free-free**, aussi appelée **Bremsstrahlung thermique** correspond à l'émission de rayonnement associée aux interactions entre particules chargées libre, et plus particulièrement à la diffusion d'électrons par les ions<sup>7</sup>. Du fait de l'inertie beaucoup plus grande des ions, l'essentiel de la puissance rayonnée l'est par les électrons. La dénomination free-free fait référence au fait que l'électron est libre avant comme après l'interaction. La dénomination de Bremsstrahlung signifie **rayonnement de freinage** (en l'occurrence de l'électron par interaction avec l'ion).

### 8.4.1 Collision électron-ion

#### Cas général

Pour calculer le spectre de cette émission, il conviendrait *a priori* de commencer par considérer la diffusion d'un seul électron par un ion de charge  $Ze$ . Ce problème peut être résolu complètement de manière analytique [27]. On montre notamment que pour un potentiel d'interaction en loi de puissance

$$\phi(r) = \frac{C_\alpha}{r^\alpha}, \quad (8.47)$$

avec  $\alpha = 1$  dans le cas Coulombien, l'**angle de diffusion**, c'est-à-dire l'angle de déviation, s'écrit

$$\chi(b) = \pi - 2 \int_0^{\zeta_0} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2 - \frac{2C_\alpha}{\mu v_\infty^2} \left(\frac{\zeta}{b}\right)^\alpha}} \quad (8.48)$$

en ayant posé  $\zeta = b/r$  avec  $b$  le **paramètre d'impact**,  $\mu \simeq m_e$  étant la **masse réduite** et  $v_\infty$  la vitesse de l'électron à grande distance avant ou après la collision. La valeur  $\zeta_0 = b/r_{\min}$  est celle correspondant au point de plus petite distance entre les deux particules. Cette expression permet de calculer ensuite la **section efficace différentielle de diffusion**

$$\frac{ds_d}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \chi} \left| \frac{db}{d\chi} \right| \quad (8.49)$$

qui donne dans le cas Coulombien la **formule de Rutherford**

$$\frac{ds_d}{d\Omega} = \left( \frac{C_1}{2\mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\chi/2)} \quad (8.50)$$

**Exercice 129 :** Démontrer les relations (8.48), (8.49) et (8.50).

7. Par symétrie, les interactions entre particules identiques ne donnent pas lieu à des champs rayonnés à grande distance. Voir la note 5.

### Cas des petites déviations

En réalité, on peut montrer que **l'essentiel des collisions ion-électron à l'origine du rayonnement free-free correspondent à des grands paramètres d'impact et donc à des déviations faibles**. Un argument simple [45] consiste à comparer l'énergie d'interaction électrostatique pour un électron et un ion situés à une distance typique à l'énergie thermique caractérisant les mouvements des électrons. On montre que ce rapport s'écrit

$$\frac{Ze^2 n_e^{1/3}}{4\pi\epsilon_0 kT} = \frac{Z}{4\pi} (n_e L_D^3)^{-2/3} \simeq 0.02 \times \frac{Z}{4\pi} \left(\frac{T^3}{n_e}\right)^{-2/3} \ll 1 \quad (8.51)$$

où  $L_D$  est la longueur de Debye des électrons (4.92). La dernière égalité suppose  $T$  en K et  $n_e$  en  $\text{cm}^{-3}$ . Dans la très grande majorité des sources astrophysiques, ce rapport est très inférieur à l'unité.

Une autre manière de le voir est que **l'émission free-free est une émission radio, donc l'énergie associée est faible devant l'énergie cinétique moyenne des électrons**. Lorsque la température du plasma est  $T = 10^4$  K, l'énergie cinétique est d'environ 1 eV, alors que l'énergie d'un photon de fréquence 10 GHz est de  $4 \cdot 10^{-5}$  eV. Les interactions électron-ion correspondant à cette émission sont donc faibles, et la déviation de la trajectoire de l'électron est petite.

### 8.4.2 Puissance émise par une interaction seule

Dans un cadre non-relativiste, on fait donc l'approximation d'une trajectoire rectiligne de l'électron, ce qu'on appelle **approximation de Born**. À partir de l'expression de l'accélération Coulombienne subie par l'électron<sup>8</sup>, on tire l'expression du champ électrique rayonné dans l'approximation dipolaire via (8.33), dont on calcule les composantes de Fourier

$$\mathcal{E}_\nu = \frac{Ze^3 \sin \theta}{m_e c^2 x} \frac{\pi}{bv} \exp\left(-2\pi\nu \frac{b}{v}\right) \quad (8.52)$$

et on en déduit la densité spectrale d'énergie du champ électromagnétique rayonné

$$u_\nu = \frac{4}{3} \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3} \frac{\pi^2}{(bv)^2} \exp\left(-4\pi\nu \frac{b}{v}\right) \quad (8.53)$$

Comme cette énergie est émise en un pulse de durée  $\tau \approx b/v$ , le spectre du rayonnement associé à cette collision unique est quasi plat entre  $\nu = 0$  et  $\nu = \nu_{\text{max}} \approx v/(2\pi b)$ . Typiquement, cette fréquence maximale se situe dans l'infrarouge.

**Exercice 130 : Démontrer la relation (8.53).**

### 8.4.3 Émissivité free-free

L'étape suivante consiste à calculer l'émission associée à l'interaction d'une population d'électrons sur un ion seul, en intégrant sur la distribution de Maxwell-Boltzmann des vitesses  $v$  des électrons, et sur le paramètre d'impact  $b$ . En notant cette grandeur  $d\epsilon_\nu$ , on montre [45] que

$$d\epsilon_\nu = n_e \frac{8\pi^3 Z^2 e^6}{3m_e^2 c^3} \sqrt{\frac{2m_e}{\pi kT}} \frac{4}{\pi\sqrt{3}} g_{\text{ff}}(\nu) \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \quad (8.54)$$

8. Notons que la composante parallèle de l'accélération produit un rayonnement essentiellement infrarouge et la composante perpendiculaire produit un rayonnement aux fréquences radio.

où  $g_{\text{ff}}(\nu)$  est le **facteur de Gaunt** de l'émission free-free, qui est le plus souvent de l'ordre de l'unité et lentement variable avec la fréquence (avec typiquement  $g_{\text{ff}}(\nu) \propto \nu^{-0.1}$ ).

*Note* : L'intégration sur le paramètre d'impact ne peut se faire de 0 à  $+\infty$ , il est nécessaire d'introduire deux coupures  $b_{\text{max}}$  et  $b_{\text{min}}$  pour éviter la divergence d'une intégrale. La coupure  $b_{\text{min}}$  est nécessaire pour rester dans l'approximation des petites déviations, et la coupure  $b_{\text{max}}$  a pour origine l'écrantage de la charge de l'ion par les électrons environnants. Ces coupures apparaissant dans un logarithme, leur estimation n'a cependant pas besoin d'être très précise.

En intégrant maintenant sur la population des ions, on aboutit alors à **l'émissivité free-free**

$$\epsilon_{\nu} = n_e n_i \frac{32\pi^2 Z^2 e^6}{3\sqrt{3} m_e^2 c^3} \sqrt{\frac{2m_e}{\pi kT}} g_{\text{ff}}(\nu) \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \quad (8.55)$$

#### 8.4.4 Coefficient d'absorption free-free et profondeur optique

Pour une région ionisée à l'ETL à la température  $T$ , on utilise la loi de Kirchhoff pour obtenir le coefficient d'absorption à partir de l'émissivité, ce qui donne

$$\kappa_{\nu} = \frac{\epsilon_{\nu}}{B_{\nu}(T)} = n_e n_i \frac{16\pi^2 Z^2 e^6}{3\sqrt{3} m_e^2 c h \nu^3} \sqrt{\frac{2m_e}{\pi kT}} g_{\text{ff}}(\nu) \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right] \quad (8.56)$$

On reconnaît le facteur de correction lié à l'émission stimulée. Aux basses fréquences, on peut utiliser l'approximation de Rayleigh-Jeans. En supposant également qu'il n'y a qu'une sorte d'ions, on a  $n_e = n_i$  et la profondeur optique est alors

$$\tau_{\nu} = \int \kappa_{\nu} ds \propto \int \frac{n_e^2}{\nu^{2.1} T^{3/2}} ds \propto \frac{\text{EM}}{\nu^{2.1} T^{3/2}} \quad (8.57)$$

en faisant apparaître la **mesure d'émission** (ou **emission measure** en anglais)

$$\text{EM} = \int n_e^2 ds \quad (8.58)$$

#### 8.4.5 Densité spectrale de flux

**Aux basses fréquences, on atteint le régime optiquement épais.** L'émission free-free adopte alors un spectre de corps noir à la température cinétique des électrons (de l'ordre de  $10^4$  K) et la densité spectrale de flux devient, en accord avec la forme de Rayleigh-Jeans,  $F_{\nu} \propto \nu^2$ . **Aux plus hautes fréquences, on est en revanche dans le régime optiquement mince,** et la densité spectrale de flux devient beaucoup plus plate en fréquence,

$$F_{\nu} \propto \frac{2kT\nu^2}{c^2} \tau_{\nu} \propto \nu^{-0.1} \quad \text{pour} \quad \tau_{\nu} \gg 1 \quad \text{et} \quad F_{\nu} \propto \frac{2kT\nu^2}{c^2} \propto \nu^2 \quad \text{pour} \quad \tau_{\nu} \ll 1 \quad (8.59)$$

Aux fréquences encore plus élevées, le spectre diminue fortement du fait de la coupure exponentielle de l'émissivité (8.55).

## Réponses aux exercices du chapitre 8

### Exercice 116

En prenant la divergence de la dernière équation de Maxwell, et en utilisant la première pour remplacer  $\nabla \cdot \mathbf{E}$ , on aboutit au résultat demandé.

### Exercice 117

Voir [45], §11

### Exercice 118

Voir [45], §11

### Exercice 119

Voir [45], §12

### Exercice 120

Voir [45], §13

### Exercice 121

Voir [45], §13

### Exercice 122

Voir [45], §13

### Exercice 123

Voir [45], §14

### Exercice 124

Voir [45], §14

### Exercice 125

Voir [45], §14

### Exercice 126

Voir [45], §14

### Exercice 127

Voir [45], §14

### Exercice 128

Voir [45], §14

### Exercice 129

Voir Landau et Lifshitz "Mécanique"

### Exercice 130

Voir [45], §15

## Les méthodes numériques de résolution du transfert

Ce chapitre se fonde en grande partie sur les notes de cours<sup>1</sup> de C. Dullemond [11], auteur du code de transfert radiatif Monte Carlo 3D RADMC-3D<sup>2</sup>.

### 9.1 Cas d'école

Au cours de ce chapitre, on verra les différentes approches numériques utilisées pour résoudre le transfert radiatif, qui dans le cas le plus général est un problème tridimensionnel. Pour illustrer ces méthodes, on les appliquera à un cas très simple, unidimensionnel : celui d'une **atmosphère stellaire ou planétaire de géométrie plan-parallèle**. Dans ce modèle, toutes les variables décrivant le milieu ne dépendent que d'une variable  $z$  repérant l'altitude de la couche considérée, et on suppose que le rayonnement possède une **symétrie d'invariance par rotation** autour de l'axe  $Oz$ . On a réduit ainsi la dimensionnalité du problème de 6 (3 coordonnées d'espace, 2 directions et la fréquence) à 3 (1 coordonnée d'espace, 1 angle  $\theta$  repérant l'inclinaison d'un rayon par rapport à la verticale, et la fréquence). L'équation du transfert prend alors la forme simple<sup>3</sup>

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \mu \frac{dI_\nu}{dz} = \epsilon_\nu - \kappa_\nu I_\nu = \kappa_\nu [S_\nu - I_\nu] \quad (9.1)$$

avec  $\mu = \cos \theta$ . Dans cette équation, la dépendance des grandeurs mises en jeu est  $I_\nu(z, \mu)$ ,  $S_\nu(z)$ ,  $\epsilon_\nu(z)$  et  $\kappa_\nu(z)$ . Notons qu'on suppose ainsi que l'émissivité et le coefficient d'absorption sont isotropes.

### 9.2 Algorithme d'intégration de l'équation du transfert

#### 9.2.1 Introduction

Dans la plupart des cas, pour obtenir une solution précise de l'équation du transfert, il est nécessaire de l'intégrer numériquement, ne serait-ce que parce que les formes du coefficient d'absorption  $\kappa_\nu$  ou de la fonction source  $S_\nu$  ne sont pas connues de manière analytique, c'est-à-dire exprimées par des fonctions usuelles, mais tabulées. Cette étape d'**intégration numérique** (on parle aussi de **quadrature**) n'est pas complètement triviale, car une approche naïve, ignorant les questions de **stabilité** et de **convergence**, peut mener à des résultats notablement faux. Ce problème est résolu par l'application de méthodes telles que celles de Olson & Kunasz [31], décrites dans les sections suivantes.

1. [http://www.ita.uni-heidelberg.de/~dullemond/lectures/radtrans\\_2012/index.shtml](http://www.ita.uni-heidelberg.de/~dullemond/lectures/radtrans_2012/index.shtml)

2. <http://www.ita.uni-heidelberg.de/~dullemond/software/radmc-3d/>

3. On ignore pour l'instant la diffusion, ce qui revient à prendre  $\sigma_\nu = 0$ .



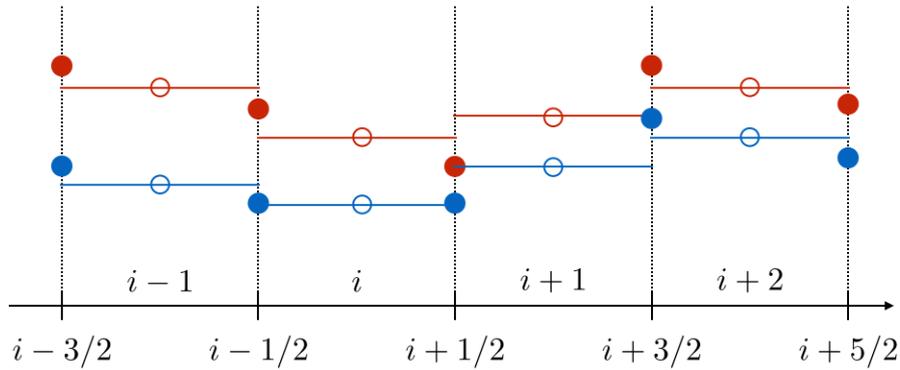


FIGURE 9.2 – **Schéma d'intégration d'ordre 1.** Les disques bleus donnent les valeurs de  $\kappa_\nu$  aux points de la grille, les cercles bleus celles de  $\kappa_\nu$  dans les cellules, les disques rouges donnent les valeurs de  $\epsilon_\nu$  aux points de la grille, et les cercles rouges celles de  $\epsilon_\nu$  dans les cellules.

où  $\Delta\tau_i$  est l'épaisseur optique correspondant au segment  $i$  du rayon considéré. Cette équation permet donc de **calculer de proche en proche l'intensité aux différents bords de cellules**. Ceci est valable pour les rayons ascendants ( $\mu > 0$ ) et peut être adapté sans difficulté pour les rayons descendants ( $\mu < 0$ ). Bien entendu, il faudra tenir compte des **conditions aux limites** (voir plus bas).

**Exercice 131 :** Démontrer la relation (9.2).

### 9.2.3 Intégration d'ordre 2

La méthode d'ordre 2 d'Olson et Kunasz est fondée sur le même genre d'approche que la méthode d'ordre 1, en ce sens que là aussi on calcule une solution analytique de l'équation du transfert à l'intérieur d'une cellule. La différence ici est que l'émissivité, le coefficient d'extinction et donc la fonction source ne sont plus définies sur les cellules, mais sur leurs bords, et qu'on fait l'**hypothèse d'une variation linéaire de  $\kappa_\nu$  et de  $S_\nu$  sur chaque segment de rayon entre deux points de la grille** (Fig. 9.3). On peut alors montrer que la solution de l'équation du transfert dans la cellule  $i$  donne

$$I_{i+1/2} = I_{i-1/2}e^{-\Delta\tau_i} + Q_i \quad (9.3)$$

avec  $Q_i$  dépendant de l'épaisseur optique  $\Delta\tau_i$  de la cellule  $i$  et des valeurs de la fonction source  $S_{i-1/2}$  et  $S_{i+1/2}$  aux bords de la cellule<sup>6</sup>.

**Exercice 132 :** Déterminer l'expression de la quantité  $Q_i$  apparaissant dans l'équation (9.3).

6. Il faut remarquer que, dans certaines circonstances, il est possible que l'intégration de second ordre aboutisse à une déviation par valeurs supérieures (on parle d'**overshoot**). Cela peut arriver si la variation de  $\kappa_\nu$  et celle de  $S_\nu$  sur la cellule considérée sont de pentes opposées, c'est-à-dire que  $(S_{i+1/2} - S_{i-1/2})(\kappa_{i+1/2} - \kappa_{i-1/2}) < 0$ . Il est alors important de mettre en place une **limitation de quadrature** [11].

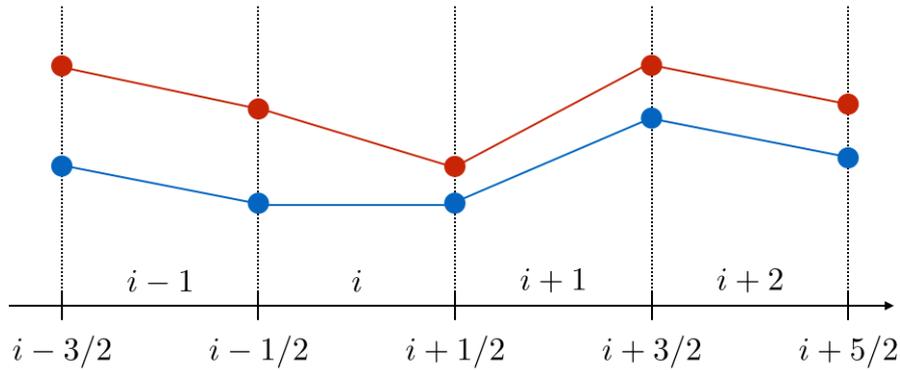


FIGURE 9.3 – **Schéma d'intégration d'ordre 2.** Les disques bleus donnent les valeurs de  $\kappa_\nu$  aux points de la grille, et les disques rouges donnent les valeurs de  $S_\nu$  aux points de la grille.

### 9.2.4 Intégration d'ordre 3

On verra plus loin qu'il est parfois nécessaire de recourir à un schéma d'intégration d'ordre encore supérieur, lorsqu'on veut traiter de manière itérative le transfert hors ETL ou avec diffusions multiples. C'est alors qu'intervient la méthode d'intégration d'ordre 3 d'Olson et Kunasz [31]. Dans cette approche, pour obtenir l'intensité  $I_{i+1/2}$  **on n'utilise plus seulement les valeurs de la fonction source aux bords de la cellule considérée, mais également sa valeur au bord "aval" de la cellule suivante**, soit  $S_{i+3/2}$ . Le modèle sous-maille de la fonction source est alors le trinôme du second degré passant par ces valeurs aux points considérés<sup>7</sup> (Fig 9.4). Pour cette forme de fonction source, on peut également intégrer analytiquement l'équation du transfert sur chaque cellule, et on aboutit à l'expression

$$I_{i+1/2} = I_{i-1/2}e^{-\Delta\tau_i} + Q_i \quad (9.4)$$

où cette fois  $Q_i$  fait intervenir les épaisseurs optiques  $\Delta\tau_i$  et  $\Delta\tau_{i+1}$  des deux cellules mises en jeu, et les valeurs  $S_{i-1/2}$ ,  $S_{i+1/2}$  et  $S_{i+3/2}$  de la fonction source<sup>8</sup>.

**Exercice 133 :** Déterminer l'expression de la quantité  $Q_i$  apparaissant dans l'équation (9.4).

### 9.2.5 Conditions de bord

Comme on l'a dit plus haut, l'intégration décrite ici permet de **déterminer l'intensité spécifique de proche en proche sur la grille** : étant donnée  $I_{i-1/2}$  on en tire  $I_{i+1/2}$ . Il est donc nécessaire de commencer par se donner une **condition de bord**, c'est-à-dire l'intensité en bas de l'atmosphère pour

7. La méthode prend comme variable indépendante l'épaisseur optique  $\tau$ , ce qui permet d'éliminer la question du modèle sous-maille pour le coefficient d'absorption.

8. L'intégration d'ordre 3 peut non seulement amener un **overshoot**, mais aussi un **undershoot**, car la forme quadratique de la fonction source peut conduire à des valeurs négatives de  $S_\nu$ . Il est même possible d'obtenir des résultats négatifs pour  $I_{i+1/2}$ , donc non-physiques. Par conséquent, une limitation inférieure de quadrature est nécessaire en sus de la limitation supérieure déjà mentionnée.

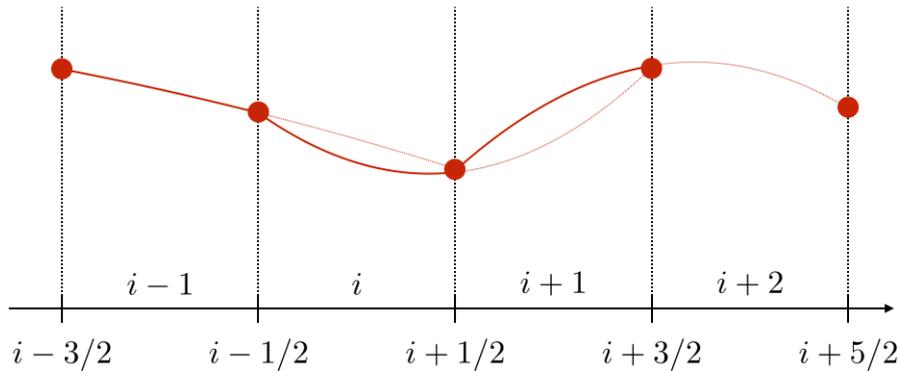


FIGURE 9.4 – **Schéma d'intégration d'ordre 3.** Les disques rouges donnent les valeurs de  $S_\nu$  aux points de la grille.

les rayons ascendants ( $\mu > 0$ ) et en haut de l'atmosphère pour les rayons descendants ( $\mu < 0$ ). Le choix de cette condition dépend évidemment du problème considéré.

Exemple : Pour traiter le transfert de rayonnement en infrarouge moyen à partir du sol terrestre et au travers de l'atmosphère, on prendra  $I_{1/2} = B_\nu(T)$  avec  $T$  la température du sol. En revanche, si on se place dans le domaine visible, l'intensité du rayonnement vers le ciel à  $z = 0$  dépend entièrement de la radiation qui atteint le sol et y est réfléchi (donc de l'albédo). La condition de bord est donc liée au calcul du transfert dans le sens inverse  $\mu < 0$ , et donc au choix de la condition de bord  $I_{N+1/2}(\mu < 0)$ .

### 9.2.6 Cas 2D et 3D

La discussion précédente a porté sur le transfert dans le cas unidimensionnel, mais elle peut être généralisée aux cas 2D et 3D. Dans ce cas, il convient de découper l'espace en cellules, et de constater qu'un rayon passant au travers de cette grille est là aussi constitué d'une succession de segments terminés par des intersections du rayon avec les bords des cellules. Les longueurs  $\Delta s_i$  de ces segments peuvent être diverses, même avec une grille régulière : un segment court peut succéder à un long, suivant les emplacements des intersections avec les bords des cellules. D'autre part l'indice  $i$  n'est plus lié à celui des cellules, bien entendu.

**L'intégration le long du rayon est identique au cas 1D** décrit dans ce qui précède, mais il faut néanmoins noter qu'en 2D et 3D, on peut choisir de définir la fonction source et le coefficient d'extinction **soit au centre des cellules** (auquel cas on travaille avec un schéma d'ordre 1, soit des fonctions uniformes dans chaque cellule) **soit sur les coins des cellules**. Dans ce second cas, il faut d'abord les interpoler pour obtenir leurs valeurs aux points où le rayon traverse la frontière de la cellule, avant d'utiliser les schémas d'ordre 2 ou 3. **Cette interpolation préalable peut être bilinéaire ou bi-cubique.**

## 9.2.7 Résolution spatiale

Dans tout ce qui précède, on n'a pas fait d'hypothèse sur la discrétisation du milieu, c'est-à-dire sur la **résolution spatiale** utilisée. Il est parfois supposé que la résolution adéquate est celle qui assure que pour chaque cellule on a  $\Delta\tau_i \lesssim 1$ . En réalité, si l'intégration est faite correctement, ce n'est pas une condition strictement nécessaire. Elle peut même être contre-productive en termes de temps de calcul, en particulier dans les problèmes 3D, car elle oblige à raffiner fortement la grille. En réalité, les règles empiriques pour l'intégration numérique de l'équation de transfert sont les suivantes :

- ▶ Utiliser un **algorithme d'intégration stable** qui fonctionne également bien lorsque les pas en épaisseur optique  $\Delta\tau_i$  sont grands.
- ▶ Pour les grandes épaisseurs optiques, utiliser un **schéma du second ordre** si possible.
- ▶ **Résoudre spatialement la photosphère** (là où l'essentiel des photons subissent leur dernière diffusion) avec une grille suffisamment fine, car c'est là que se forme le spectre de l'objet.
- ▶ **Les régions optiquement épaisses** à toutes les fréquences d'intérêt (c'est-à-dire au voisinage du pic de la fonction de Planck aux températures concernées) **peuvent être traitées avec une grille grossière**, dont les cellules sont optiquement épaisses.
- ▶ Faire une **vérification a posteriori** des variations de l'intensité d'un point de la grille à un autre. S'il apparaît des discontinuités, la grille doit être raffinée au voisinage de ces points.

## 9.3 La difficulté du transfert radiatif

La description des schémas d'intégration dans la section précédente serait suffisante à résoudre le problème du transfert radiatif si l'on était en mesure de connaître, à chaque instant et en chaque point, les valeurs de l'émissivité  $\epsilon_\nu(\mathbf{x})$  et du coefficient d'extinction  $\kappa_\nu(\mathbf{x})$ . En réalité, ce n'est pas le cas, et la difficulté du transfert radiatif est notamment que le champ de radiation  $I_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{k})$  peut affecter les valeurs de  $\epsilon_\nu$  et  $\kappa_\nu$  à distance. On est donc confronté à un problème circulaire : **pour calculer  $I_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{k})$  il nous faut connaître  $\epsilon_\nu(\mathbf{x})$  et  $\kappa_\nu(\mathbf{x})$ , mais ceux-ci dépendent de  $I_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ .**

Pour ne rien arranger, la résolution du problème ne peut se faire indépendamment pour chaque rayon, car un changement de  $\epsilon_\nu(\mathbf{x})$  par exemple affecte le transfert sur tous les rayons passant par  $\mathbf{x}$ . Ainsi, le rayonnement observé le long du rayon A dépend de l'émissivité en  $\mathbf{x}$ , qui est influencée par le transfert le long des autres rayons passant par le même point. On a donc un **couplage des rayons qui impose une résolution simultanée** pour tous les rayons<sup>9</sup>.

### 9.3.1 Diffusions multiples

On peut formuler ce problème circulaire d'une autre manière, en considérant les photons qui sortent du nuage avec une direction qui les amènera à être observés. Ces photons peuvent avoir été diffusés dans le nuage et donc venir en réalité d'une autre direction. Ils peuvent en fait avoir subi des **diffusions**

9. À titre d'exemple de ce couplage des rayons, on peut considérer le cas de la **diffusion isotrope pure**, pour lequel on suppose qu'il n'y a pas d'absorption ni d'émission propre, mais une diffusion équiprobable dans toutes les directions  $\mathbf{k}$ . On fait aussi l'hypothèse qu'il y a, dans le nuage ou en dehors, une source de rayonnement qui impose une "condition initiale" pour les rayons qui en sont issus. L'équation du transfert prend la forme

$$\mathbf{k} \cdot \nabla I_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \sigma_\nu(\mathbf{x}) [J_\nu(\mathbf{x}) - I_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{k})] \quad (9.5)$$

L'émissivité n'est due qu'à la diffusion du rayonnement dans le faisceau considéré en provenance des autres directions. On voit donc bien que la résolution de cette équation nécessite de connaître l'intensité moyenne  $J_\nu(\mathbf{x})$ , laquelle ne peut être calculée que si l'on connaît  $I_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{k})$  pour toutes les directions.

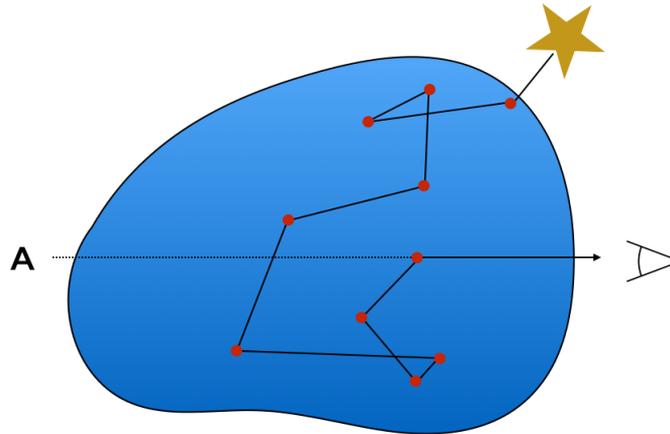


FIGURE 9.5 – Diffusions multiples.

**multiples** lors de leur pérégrination dans le nuage (Fig. 9.5). **Chacune de ces diffusions peut être associée à un cycle**  $I_\nu \longleftrightarrow J_\nu$  : pour calculer  $J_\nu$  en un certain point  $x_0$  sur la ligne de visée, il faut intégrer l'équation du transfert le long de tous les rayons  $k$  passant par ce point. Mais pour faire ce calcul, il faut connaître  $J_\nu$  en chaque point  $x$  le long de ces rayons, ce qui implique de résoudre le transfert le long des rayons passant par ce nouveau point, etc...

De manière générale, il n'y a pas, à quelques exceptions près, de solution analytique à ce problème. C'est pourquoi une approche numérique doit être mise en place, et on décrit plus bas les trois classes de méthodes existantes : les **méthodes Monte-Carlo**, les **méthodes à discrétisation des coordonnées** et les **méthodes de moments**.

### 9.3.2 Approximation de diffusion unique

Avant de décrire ces méthodes, il est néanmoins utile de discuter l'**approximation de diffusion unique**, valable dans le cas où l'épaisseur optique du nuage est faible  $\tau \ll 1$ . Il est alors possible de supposer qu'un photon observé sur la ligne de visée a subi au plus une diffusion depuis son émission par la source initiale<sup>10</sup> (Fig. 9.6). D'après la description faite plus haut en termes de cycles de calcul  $I_\nu \longleftrightarrow J_\nu$ , l'approximation de diffusion unique peut donc être traitée de la manière suivante :

- ▶ On intègre l'équation du transfert depuis la source sur tous les rayons interceptant la ligne de visée considérée.
- ▶ On en déduit l'intensité moyenne en chacun de ces points, en prenant  $I_\nu$  non nulle uniquement dans l'angle solide  $\Delta\Omega$  sous lequel on voit la source primaire depuis le point considéré.
- ▶ On intègre l'équation du transfert le long de la ligne de visée grâce à la valeur de  $J_\nu$  calculée.

Le problème de la diffusion unique ne pose donc pas de difficulté conceptuelle et représente un effort raisonnable en termes de temps de calcul.

10. Cette approximation est évidemment d'autant meilleure que l'épaisseur optique est faible.

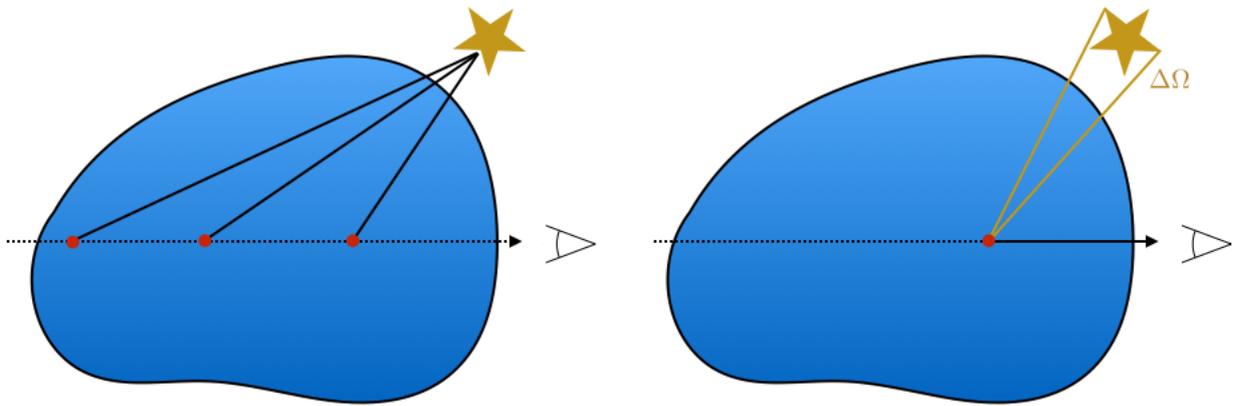


FIGURE 9.6 – Approximation de diffusion unique.

### 9.3.3 Prise en compte de l'absorption et de l'émission

Dans le cas considéré ici, on n'a tenu compte que de la diffusion. En réalité, le milieu peut être également absorbant et émetteur propre de rayonnement. On a alors plus généralement, en introduisant l'albédo  $\omega_\nu$  (3.56) et la **probabilité de destruction d'un photon**  $\eta_\nu = 1 - \omega_\nu$ , et en supposant que l'émission propre est thermique, soit  $S_\nu = B_\nu(T)$ ,

$$\frac{dI_\nu}{ds} = (\kappa_\nu + \sigma_\nu) [(1 - \eta_\nu) J_\nu + \eta_\nu B_\nu(T) - I_\nu] \quad (9.6)$$

Cette forme permet de constater que si  $\eta_\nu = 1$ , on est ramené à un problème simple (à condition de connaître  $T$ ) puisque la diffusion n'intervient plus

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \kappa_\nu [B_\nu(T) - I_\nu] \quad (9.7)$$

et que la difficulté est la plus aiguë dans le cas  $\eta_\nu = 0$  (diffusion pure)

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \sigma_\nu [J_\nu - I_\nu] \quad (9.8)$$

Dans les cas intermédiaires, la difficulté est intermédiaire : par exemple, pour  $\eta_\nu = 1/2$ , le photon ne peut être diffusé qu'un nombre limité de fois avant d'être absorbé : l'information ne peut être transportée que sur quelques libres parcours moyens avant d'être "oubliée". Plus  $\eta_\nu$  s'approche de 0, plus complexe est le problème du transfert.

## 9.4 Méthodes Monte-Carlo

### 9.4.1 Principe

Ces méthodes sont fondées sur des **tirages de nombres aléatoires**<sup>11</sup>. L'idée consiste à suivre simplement le trajet des photons, en utilisant le hasard pour déterminer la distance sur laquelle se déplace un photon avant d'interagir, puis si cette interaction est une diffusion ou une absorption, et enfin, si c'est une diffusion, dans quelle direction repart le photon. **Il faut bien entendu procéder ainsi pour un (très) grand nombre de photons, pour obtenir une statistique satisfaisante.**

L'avantage de ces méthodes est qu'elles sont **simples à comprendre** puisqu'on suit littéralement les photons, et **simples à implémenter**, même dans les cas où il faut tenir compte de nombreux processus microphysiques et d'une géométrie complexe (Fig. 9.7). Leur inconvénient majeur, sur lequel on reviendra, est qu'elles sont **nécessairement bruitées**, le rapport signal-sur-bruit ne tendant vers zéro que pour une infinité de photons lancés dans la simulation.

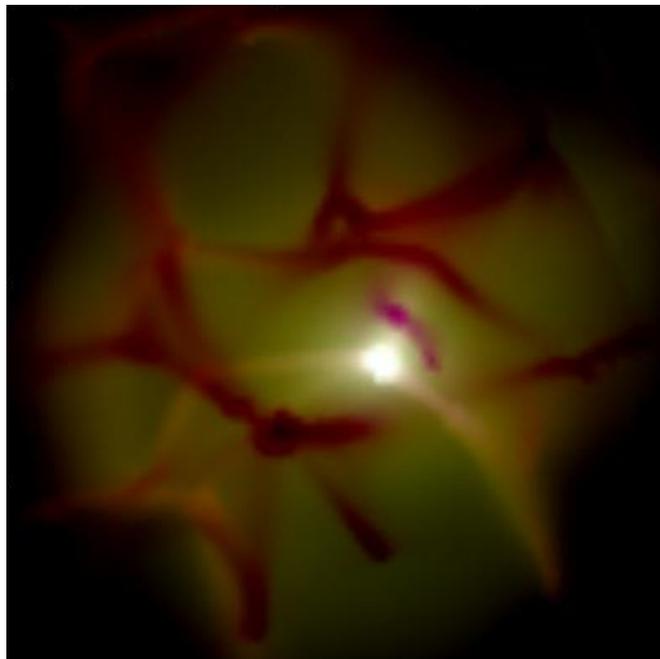


FIGURE 9.7 – Emission thermique des poussières dans un nuage en effondrement gravitationnel calculé avec le code de transfert radiatif Monte Carlo RADMC-3D (C. Dullemond, MPIA Heidelberg)

### 9.4.2 Libre parcours

Le cœur des méthodes Monte-Carlo en transfert radiatif consiste à trouver la position de la prochaine interaction photon-matière, étant donné un photon situé en  $x$  et dirigé selon le vecteur  $k$ . On sait que **l'épaisseur optique traversée par le photon jusqu'à sa prochaine diffusion suit une loi de Poisson**, dont la densité de probabilité est  $p(\tau) = e^{-\tau}$  (voir la section 3.2.4). On peut obtenir un nombre aléatoire

11. Elles se nomment ainsi en référence aux fameux casinos de la Principauté.

ayant cette distribution en tirant un nombre aléatoire  $\xi$  uniformément distribué sur  $[0, 1[$  et en posant

$$\tau = -\ln(1 - \xi) \quad (9.9)$$

Une fois cette épaisseur optique déterminée, on suit le photon cellule par cellule, en comptabilisant l'épaisseur optique traversée  $\Delta\tau_i$  dans chacune d'elles, et on détermine ainsi la cellule dans laquelle se produit l'interaction<sup>12</sup>.

*Note :* Il est également possible que l'épaisseur optique  $\tau$  amène le photon au-delà du bord du nuage, auquel cas il s'échappe et un autre photon est créé dont on suit le destin. Notons également que, si en plus de la diffusion il existe absorption et émission (i.e.  $\eta_\nu > 0$ ), il faut en tenir compte et permettre d'une part aux photons de pouvoir être absorbés lors d'une interaction, et d'autre part au gaz d'émettre des photons thermiques.

### 9.4.3 Diffusion

La diffusion du photon se fait de manière **isotrope ou anisotrope**. Dans le premier cas, qu'on supposera ici<sup>13</sup>, il faut donc tirer au hasard une nouvelle direction de propagation. En 2D, on tire un nombre  $\xi$  au hasard uniformément dans  $[0, 1[$  et on pose  $\theta = 2\pi\xi_1$ . En 3D, il faut tenir compte du fait que ce qui importe c'est l'angle solide, et que tirer uniformément au hasard une valeur de  $\theta$  et une valeur de  $\phi$  ne donne pas une distribution uniforme de directions (car pour  $\theta = 0$ , toutes les valeurs de  $\phi$  correspondent à la même direction). Posant

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi = -d(\cos\theta) d\phi = -d\mu d\phi \quad (9.11)$$

on constate que **le tirage uniforme doit porter sur  $\mu$  et  $\phi$** . On tire donc deux nombres aléatoires  $\xi_1$  et  $\xi_2$  uniformément répartis respectivement sur  $[0, 1[$  et sur  $[0, 1[$  et on pose  $\phi = 2\pi\xi_2$  et  $\theta = \arccos(2\xi_1 - 1) = \arccos\mu$ .

### 9.4.4 Paquets de photons

Une étoile émet un nombre colossal de photons par seconde<sup>14</sup>. Il est bien entendu hors de question de suivre ces photons individuellement dans une simulation Monte-Carlo! C'est pourquoi on les groupe par **paquets de photons**, et on fait l'hypothèse que tous les photons d'un même paquet suivent le même chemin et subissent le même sort<sup>15</sup>. Les ordinateurs actuels permettent de lancer un nombre de photons suffisant pour estimer précisément le champ de rayonnement (on montre aisément que les grandeurs photométriques  $I_\nu$ ,  $F_\nu$ ,  $u_\nu$  ... peuvent être calculées assez facilement une fois connus les trajets des photons).

12. Tant que  $\sum_i \Delta\tau_i < \tau$ , le photon se propage sans interagir avec le milieu. Il arrive alors dans une cellule  $p$  telle que l'épaisseur optique  $\tau$  est atteinte à l'intérieur de la cellule, c'est-à-dire que  $\sum_{i < p} \Delta\tau_i < \tau < \sum_{i \leq p} \Delta\tau_i$ . Le lieu exact de la diffusion est donné par la fraction de la longueur du segment contenu dans la cellule  $p$ .

13. Une diffusion anisotrope est simple à implémenter, un exemple classique étant la **fonction de Henyey-Greenstein** (avec  $\mu = \cos\theta$  et  $g$  un paramètre d'anisotropie)

$$\Phi(\mu) = \frac{1}{2} \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g\mu)^{3/2}} \quad (9.10)$$

14. Par exemple, pour le Soleil, on a typiquement  $N_{\text{ph}} \sim (L_\odot \lambda)/(hc) \sim 10^{45} \text{ s}^{-1}$ .

15. Notons que dans un problème indépendant du temps, ces paquets de photons représentent un nombre de photons par unité de temps, et qu'ils transportent non pas une énergie mais une puissance (ou luminosité). Dans les problèmes dépendant du temps, on retrouve une interprétation en termes d'énergie.

## 9.4.5 Comment faire une image ?

### Problème du petit observateur

On sait maintenant propager les photons dans un nuage via une méthode Monte-Carlo. Mais l'histoire ne s'arrête pas là, car ce qui intéresse l'observateur c'est ce qu'il peut voir, c'est-à-dire les photons qui, lorsqu'ils quittent le nuage, ont une **direction de dernière diffusion adéquate pour être observés**, donc sur la ligne de visée, à un certain petit angle solide près. On touche là au **problème du petit observateur** : la probabilité qu'un paquet de photons soit justement diffusé *in fine* dans la direction de l'observateur est très faible (de l'ordre de  $d\Omega_{\text{obs}}/4\pi$ ). La plupart des photons seront perdus et pour tout dire inutiles, sauf à déterminer l'état du gaz. Le petit nombre de paquets de photons collectés implique également que le résultat sera d'autant plus bruité, comme on l'a déjà mentionné.

### Méthode de type peeling

Pour résoudre ce problème, il est possible d'**augmenter artificiellement la taille de l'observateur**, ce qui augmente proportionnellement les chances d'observer les photons Monte-Carlo, mais au détriment de la résolution, puisqu'effectivement on moyenne sur un plus grand nombre de directions. On peut aussi augmenter le nombre de paquets de photons, en diminuant le nombre de photons que chacun d'eux représente. Une méthode similaire dite de **peeling**, consiste à enlever du paquet de photons une partie de la radiation lors de son passage dans le nuage, et d'en tirer ce que voit l'observateur en tenant compte de l'extinction depuis chacun des points sur le passage du paquet de photons.

### Méthode par renversement du temps

On peut également inverser le problème en remontant le temps : les photons observés ont été diffusés dans le nuage et on tire au hasard la position de cette dernière diffusion, la direction d'où venaient les photons, et on recommence. Bien entendu, on est maintenant confronté à un **problème similaire si la source primaire des photons est petite**. On peut s'en tirer en forçant les photons à venir de la source lorsqu'on traite la première diffusion, mais cela implique qu'on sait que cette diffusion est la première, et rien ne le permet ! Donc il faut calculer, à chaque diffusion, la probabilité qu'un photon venant de la source soit diffusé dans le faisceau considéré, et on poursuit cette procédure jusqu'à ce que la diffusion calculée se trouve en dehors du nuage<sup>16</sup>.

### Méthode de la fonction source de diffusion

Une dernière possibilité est la suivante (**méthode de la fonction source de diffusion**) : On suit chaque paquet de photons dans leur marche au hasard dans le nuage, et à chaque cellule traversée, on attribue une fraction de l'énergie du paquet de photons à la fonction source de diffusion, i.e.  $J_\nu$ , proportionnellement à la longueur du segment du rayon à l'intérieur de cette cellule. Une fois lancé tous les paquets de photons, la fonction  $J_\nu$  est connue partout dans le nuage, et on calcule le transfert de rayonnement au travers du nuage sur un ensemble de rayons aboutissant à l'observateur.

## 9.5 Itération Lambda (LI) et itération Lambda accélérée (ALI)

Les méthodes LI et ALI constituent une partie importante des **méthodes à discrétisation des coordonnées**, dont le principe consiste à discrétiser non seulement l'espace et les fréquences, mais également les directions. D'une certaine manière, ces méthodes sont plus propres que les méthodes Monte-Carlo car elles n'introduisent pas de bruit statistique. Cependant, il faut se méfier des résultats apparemment corrects - car non bruités - des méthodes à discrétisation des coordonnées, parce que les

16. Notons que s'il y a une émission thermique non négligeable ( $\eta_\nu > 0$ ) alors le problème de la petite source n'est pas aussi grave car le nuage entier est la source principale du rayonnement. D'autre part, dans ce cas, il n'est pas nécessaire de retracer le chemin des photons jusqu'à sortir du nuage, car ceux-ci peuvent avoir été émis thermiquement.

erreurs qui peuvent les entacher sont d'autant plus difficiles à détecter. Il faut donc une certaine dose d'expérience pour savoir si un résultat donné par une méthode de ce type est fiable ou non.

### 9.5.1 Principe

La méthode de l'**itération Lambda (LI)** est l'un des fondements du transfert radiatif numérique. Son principe est le suivant :

- ▶ On part d'une estimation très grossière (voire nulle partout) de l'intensité moyenne  $J_\nu(\mathbf{x})$ .
- ▶ On intègre l'équation du transfert le long d'un certain nombre de rayons, de sorte que l'on puisse calculer, pour chaque position  $\mathbf{x}$ , une estimation raisonnable de l'intensité moyenne, c'est-à-dire qu'il faut suffisamment de rayons passant suffisamment près de tous les points.
- ▶ On calcule l'intensité moyenne  $J_\nu(\mathbf{x})$  en chaque point.
- ▶ On revient à la deuxième étape (résolution de l'équation du transfert), et ce jusqu'à ce que la convergence de  $J_\nu(\mathbf{x})$  soit établie.

Cet algorithme extrêmement simple alterne un **calcul global** (résolution de l'équation du transfert) et un **calcul local** (calcul de l'intensité moyenne), et il a été utilisé sous divers noms dans de nombreux domaines de la physique qui traitent de problèmes couplés de cette manière. En transfert radiatif, l'algorithme est appelé itération Lambda, pour une raison qu'on explicitera plus loin.

*Note :* Chacune de ces itérations correspond à l'un des cycles  $I_\nu \longleftrightarrow J_\nu$  mentionnés plus haut, de sorte qu'on peut voir l'application de l'algorithme comme le traitement successif de la diffusion simple, de la diffusion double, de la diffusion triple, etc... Après  $N$  itérations, on a effectivement traité toutes les trajectoires contenant au plus  $N$  diffusions.

### 9.5.2 Convergence

Par conséquent, on en tire une prédiction grossière de la **convergence de la méthode** : Si l'on n'a que de la diffusion  $\eta_\nu = 0$  et que la profondeur optique du nuage est grande  $\tau \gg 1$ , on peut s'attendre à ce qu'un photon subisse  $\tau^2$  diffusions lors de sa traversée du nuage (marche au hasard) - en supposant que la source primaire de photons est au sein du nuage. Il faut donc au moins  $N_{\text{iter}} = \tau^2$  itérations pour s'assurer de la convergence. Ceci montre que **la méthode LI peut être extrêmement lente à converger**, car une épaisseur optique même peu importante impose un grand nombre d'itérations. Heureusement, il est possible, comme on le verra plus tard, d'accélérer la convergence.

### 9.5.3 Opérateur $\Lambda$

L'**opérateur Lambda** est simplement une manière quelque peu pédante de décrire le calcul de l'intensité moyenne  $J_\nu$  en un point  $\mathbf{x}$ , étant donnée la fonction source complète  $\mathcal{S}_\nu$  (ainsi que les propriétés du milieu) en tous points  $\mathbf{x}'$ . On écrit ainsi de manière formelle

$$J_\nu(\mathbf{x}) = \Lambda_{\mathbf{x}}[\mathcal{S}_\nu(\mathbf{x}')] \quad (9.12)$$

ce qui correspond aux étapes 2 et 3 de chaque cycle de l'itération Lambda<sup>17</sup>. Cette fonctionnelle  $\Lambda_{\mathbf{x}}$  dépend de la position  $\mathbf{x}$ , mais on peut définir un opérateur  $\Lambda : \mathbf{x} \mapsto \Lambda_{\mathbf{x}}$  qui permet d'écrire la fonction source sous une forme fermée

$$\mathcal{S}_\nu = \eta_\nu B_\nu(T) + (1 - \eta_\nu) \Lambda[\mathcal{S}_\nu] \quad (9.13)$$

17. Il est entendu que dans cette écriture  $\Lambda_{\mathbf{x}}$  n'est pas une fonction, mais une **fonctionnelle**, c'est-à-dire une application qui à une fonction complète, ici  $\mathbf{x}' \mapsto \mathcal{S}_\nu(\mathbf{x}')$ , associe un réel  $J_\nu(\mathbf{x})$ .

Avec cette forme, on a une **manière simple d'exprimer l'itération Lambda** :

$$\mathcal{S}_\nu^{(n+1)} = \eta_\nu B_\nu(T) + (1 - \eta_\nu) \Lambda \left[ \mathcal{S}_\nu^{(n)} \right] \quad (9.14)$$

où  $n$  est l'indice d'itération et  $\mathcal{S}_\nu^{(n)}$  est l'approximation de  $\mathcal{S}_\nu$  à cette étape de l'itération.

#### 9.5.4 Exemple LI à une dimension

À titre d'exemple pratique, considérons le cas de l'atmosphère en géométrie plan-parallèle découpées en couches, comme décrit au début du chapitre. Pour ce qui est des directions des rayons, on fait une **approximation à deux faisceaux** (voir la section 2.6.4) avec  $\mu_\pm = \pm 1/\sqrt{3}$ , qui peut sembler très grossière, mais est en réalité étonnamment précise, comme on va le voir.

L'itération Lambda prend alors la forme suivante : On commence par se donner une condition ascendante à  $z = 0$ , et on intègre l'équation du transfert sur le rayon  $\mu = \mu_+$  jusqu'en haut de l'atmosphère, tout en gardant en mémoire les valeurs de l'intensité aux différents points de la grille, soit  $I_{+,i+1/2}^{(1)}$ . Puis on se donne une condition descendante en haut de l'atmosphère, on intègre l'équation du transfert sur le rayon  $\mu = \mu_-$  depuis le haut de l'atmosphère jusqu'au sol, et on garde en mémoire les valeurs de l'intensité aux différents points de la grille, soit  $I_{-,i+1/2}^{(1)}$ . On en déduit l'intensité moyenne à cette étape de l'itération

$$J_{i+1.2}^{(1)} = \frac{1}{2} \left[ I_{+,i+1/2}^{(1)} + I_{-,i+1/2}^{(1)} \right] \quad (9.15)$$

Cette valeur permet de reprendre l'intégration de l'équation du transfert sur les deux rayons, et ainsi de suite, jusqu'à convergence.

*Exemple* : On considère une atmosphère plan parallèle entre  $z = 0$  et  $z = 1$ , dont le coefficient d'extinction total est donné par la loi  $\kappa_\nu(z) + \sigma_\nu(z) = 10^{5-6z}$ , de sorte qu'il varie de  $10^5$  en bas de l'atmosphère à 0.1 en haut. On suppose que la température est uniforme et on choisit des unités telles que  $B_\nu(T) = 1$ . On suppose également que la probabilité de destruction  $\eta_\nu$  est uniforme, et on impose comme conditions de bord que  $I_+ = 1$  en  $z = 0$  et  $I_- = 0$  en  $z = 1$  (pas de radiation entrant dans l'atmosphère par le haut). La Fig. 9.8 montre à gauche le cas  $\eta_\nu = 0.1$  et à droite le cas  $\eta_\nu = 0.01$ . On constate que dans le premier cas, il faut  $N_{\text{iter}} \gg 1/\eta_\nu = 10$  pour atteindre la convergence, et que dans le second, même après  $1/\eta_\nu = 100$  itérations, la solution est loin d'avoir convergé. **Il faudrait en réalité plusieurs milliers d'itérations pour atteindre la solution correcte.**

#### 9.5.5 Écriture matricielle de l'itération Lambda

L'opérateur Lambda peut être écrit sous une forme matricielle. En effet, **l'équation du transfert est linéaire vis-à-vis de la fonction source**<sup>18</sup>. Il en va donc de même de l'intensité moyenne vis-à-vis de la fonction source et on peut écrire l'équation définissant l'opérateur  $\Lambda_x$  sous la forme

$$J_i = \sum_j \Lambda_{ij} \mathcal{S}_j \quad \text{ou encore} \quad \mathbf{J} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{S} \quad (9.16)$$

où les indices  $i$  et  $j$  portent sur les  $N$  points de la grille.

*Note* : En pratique on ne calcule pas les coefficients de la matrice  $\mathbf{\Lambda}$  explicitement, on intègre l'équation du transfert le long des rayons puis on intègre sur les directions en chaque point de la

18. Cela signifie que si  $I_1$  et  $I_2$  sont les solutions du même problème (l'objet modélisé est identique) pour lequel les fonctions sources sont respectivement  $S_1$  et  $S_2$ , alors  $I_1 + I_2$  est la solution au problème du transfert dans ce système si la fonction source est  $S_1 + S_2$ .

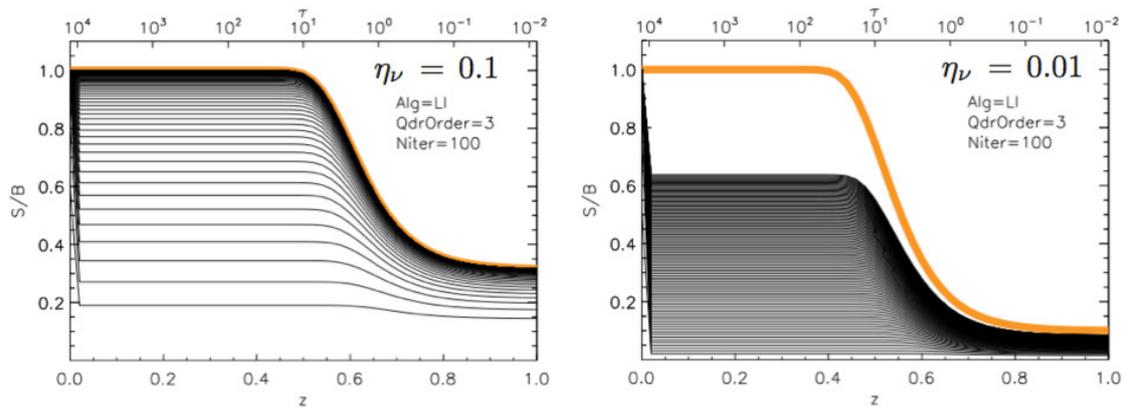


FIGURE 9.8 – **Convergence de l'algorithme LI** : Pour  $\eta_\nu = 0.1$  (à gauche) et  $\eta_\nu = 0.01$  (à droite). Figures issues de [11].

grille<sup>19</sup>. Cependant **l'opération mathématique sous-jacente est bien matricielle** et elle permet de comprendre la méthode d'accélération décrite dans la suite.

### 9.5.6 Itération Lambda accélérée (ALI)

Avec une puissance de calcul infinie, il ne serait pas utile de procéder à l'itération Lambda. En effet, on peut montrer que la résolution de l'équation du transfert est équivalent à trouver la fonction source satisfaisant à l'équation matricielle<sup>20</sup>

$$\mathbf{M}\mathbf{S} = \eta\mathbf{B} \quad \text{avec} \quad \mathbf{M} = \mathbf{1} - (1 - \eta)\mathbf{\Lambda} \quad (9.17)$$

où  $\mathbf{S}$  est un vecteur regroupant les valeurs de la fonction source  $S_\nu$  aux différents points de la grille,  $\mathbf{B}$  est le vecteur regroupant l'émission thermique aux mêmes points, et  $\mathbf{1}$  est la matrice identité  $N \times N$ .

**Exercice 134** : Montrer que la solution convergée de l'itération Lambda est effectivement solution de l'équation matricielle (9.17).

On pourrait imaginer résoudre cette équation par une inversion matricielle. Bien entendu, comme on l'a déjà dit, c'est en pratique hors de question, mais l'idée de **l'itération Lambda accélérée** (ou **ALI** pour **Accelerated Lambda Iteration**), décrite par Cannon [7], est de trouver une matrice  $\mathbf{\Lambda}^*$  qui serait une **approximation de la matrice  $\mathbf{\Lambda}$ , facile à stocker**, et telles que **les équations matricielles  $[\mathbf{1} - (1 - \eta)\mathbf{\Lambda}^*]\mathbf{S} = \eta\mathbf{B}$  sont simples à résoudre**.

19. On ne garderait d'ailleurs pas cette matrice en mémoire : imaginons une grille 3D, avec 100 points sur chaque axe, on aurait  $N = 10^6$  et la matrice  $\mathbf{\Lambda}$  contiendrait  $10^{12}$  éléments. Autrement dit, si ses coefficients sont des réels simple précision, on a besoin de près de 4 To de disque ! Il est évidemment illusoire de vouloir la stocker, et encore plus de compter faire des calculs avec !

20. Pour alléger les notations, on a supprimé la référence à la fréquence  $\nu$ .

La deuxième condition implique que  $\Lambda^*$  doit être une **matrice creuse** (en anglais **sparse matrix**) c'est-à-dire que la plupart de ses éléments sont nuls. D'autre part, contrairement à l'opérateur  $\Lambda$ , l'opérateur approché  $\Lambda^*$  est vraiment utilisé en tant que matrice. On montre alors qu'un nouveau schéma itératif est possible

$$\mathcal{S}^{(n+1)} = \eta \mathbb{M}^{*-1} \mathbf{B} + (1 - \eta) \mathbb{M}^{*-1} (\Lambda - \Lambda^*) \mathcal{S}^{(n)} \quad \text{avec} \quad \mathbb{M}^* = \mathbf{1} - (1 - \eta) \Lambda^* \quad (9.18)$$

Remarquons qu'une itération implique le calcul de  $\Lambda \mathcal{S}^{(n)}$ , qu'on fait via l'intégration formelle de l'équation du transfert, et également celui de  $\Lambda^* \mathcal{S}^{(n)}$  qui lui est fait matriciellement.

**Exercice 135 :** Établir le nouveau schéma itératif (9.18).

### 9.5.7 Choix de l'opérateur approché

#### Opérateur diagonal

Le choix le plus simple pour  $\Lambda^*$  est simplement de prendre la diagonale de l'opérateur complet [30]

$$\Lambda^* = \text{diag}(\Lambda) \quad (9.19)$$

C'est la partie **purement locale** de l'opérateur, celle qui décrit le couplage de chaque point de la grille avec lui-même. Bien entendu, cela permet d'inverser trivialement l'équation matricielle, mais semble un peu décevant puisqu'on souhaite traiter le caractère non-local du transfert et qu'on isole ici la partie locale, c'est-à-dire **celle qui traite des photons subissant plusieurs diffusions à l'intérieur d'une seule cellule**. En réalité, c'est justement la puissance de cette approximation, car la lenteur de la convergence de l'algorithme LI est due au fait qu'il traite explicitement toutes les diffusions, y compris celles sous-maille, qui ne nous intéressent pas et sont par ailleurs très nombreuses lorsque l'épaisseur optique est grande devant 1. En traitant cette partie du transfert directement via une inversion de matrice, on évite d'y passer une fraction importante du temps de calcul. **L'opérateur restant  $\Lambda - \Lambda^*$  traite le transport des photons sur au moins un élément de résolution spatiale.**

De manière plus précise, on peut montrer que dans la limite où l'épaisseur optique d'une cellule est  $\Delta\tau \gg 1$ , on a un **facteur d'accélération de convergence** donné par

$$a = \frac{1}{\eta + \frac{2}{\Delta\tau^2}} \gg 1 \quad (9.20)$$

**Exercice 136 :** Établir le facteur d'accélération de convergence (9.20).

#### Opérateur tridiagonal

Il convient de remarquer que cette accélération devient **moins efficace si la grille est trop raffinée**, car alors  $\Delta\tau$  devient plus petit et  $a$  également. Physiquement, cela revient en effet à traiter une fraction moindre de diffusions de façon approchée, et donc une fraction plus importante avec une méthode LI. Pour surmonter cette limitation, on peut introduire l'**opérateur approché  $\Lambda^*$  tridiagonal, qui traite le couplage interne à chaque cellule, mais aussi le couplage entre voisins**. Cet opérateur nécessite l'utilisation de routines dédiées aux matrices creuses.

### 9.5.8 Exemple ALI à une dimension

Revenons sur l'exemple de l'atmosphère plan-parallèle dans l'approximation des deux faisceaux. L'opérateur approché local nécessite de calculer la manière dont chaque point de la grille s'affecte lui-même, et pour cela, il faut écrire explicitement l'intégration de l'équation du transfert telle que le fait le schéma choisi. Il est nécessaire d'utiliser une quadrature d'ordre 3 sous peine d'obtenir une solution erronée. On peut montrer alors que les éléments de matrice de l'opérateur tridiagonal sont, dans le cas de cellules de même épaisseur optique  $\Delta\tau \gg 1$ ,

$$\Lambda_{i+1/2, i-1/2}^* = \frac{1}{\Delta\tau^2} \quad \Lambda_{i+1/2, i+1/2}^* = 1 - \frac{2}{\Delta\tau^2} \quad \Lambda_{i+1/2, i+3/2}^* = \frac{1}{\Delta\tau^2} \quad (9.21)$$

**Exercice 137 :** Établir les expressions (9.21) des éléments de l'opérateur tridiagonal.

On verra que la partie hors-diagonale en  $1/\Delta\tau^2$  est fondamentalement équivalente à un **opérateur de diffusion**<sup>21</sup>, qui est l'approche correcte à grande épaisseur optique. C'est la raison pour laquelle l'opérateur tridiagonal fonctionne si bien dans cette limite. En d'autres termes, ALI avec un opérateur tridiagonal sépare le problème en deux : une partie diffusive traitée analytiquement et une partie à grande portée (deux éléments de résolution spatiale au moins) traitée itérativement.

*Exemple :* La Fig. 9.9 reprend le cas traité précédemment mais cette fois pour  $\eta = 0.001$ , avec l'algorithme ALI et un opérateur diagonal (à gauche) ou tridiagonal (à droite), en prenant  $N_{\text{iter}} = 100$ . Pour cette valeur de  $\eta$ , l'algorithme LI est loin d'avoir convergé après 100 itérations, mais ALI oui, et ce d'autant plus vite si l'opérateur approché est tridiagonal.

### 9.5.9 Convergence des algorithmes LI et ALI

Malgré l'accélération de la convergence en passant de LI à ALI, cette convergence reste **linéaire**, ce qui signifie que l'écart entre une approximation à l'ordre  $n$  et la solution est une fonction linéaire de l'écart à l'ordre précédent, soit

$$\| \mathcal{S}^{(n)} - \mathcal{S} \| = \Psi^n \| \mathcal{S}^{(0)} - \mathcal{S} \| \quad (9.23)$$

où  $\Psi$  dépend du schéma (LI ou ALI) de l'itération.

**Exercice 138 :** Montrer que LI et ALI présentent effectivement une convergence linéaire.

Le danger des algorithmes convergeant linéairement est que la vitesse de convergence peut diminuer au fur et à mesure qu'on s'approche de la solution. Il peut donc sembler que la solution a convergé car l'écart entre deux itérations successives est faible, alors qu'en réalité la convergence n'est pas encore atteinte<sup>22</sup>. Ce phénomène est appelé **fausse convergence**. Il faut donc être prudent quant à l'inter-

21. Ici diffusion est entendu au sens de l'équation de diffusion, de la forme

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla X) \quad (9.22)$$

22. Pour le comprendre, notons  $\lambda_i$  les valeurs propres de la matrice  $\Psi$ . La convergence est rapide si  $\forall i \lambda_i \ll 1$ , mais si l'une au moins des valeurs propres est proche de 1, alors le long du vecteur propre qui lui est associé la convergence sera beaucoup plus lente, et le nombre d'itérations nécessaire est

$$N_{\text{iter}} \gg \frac{1}{\min_i (1 - \lambda_i)} \quad (9.24)$$

On voit alors pourquoi une solution peut sembler avoir convergé sans que ce soit vrai : si l'une des valeurs propres est proche de 1, et toutes les autres petites devant 1, la convergence sera rapide selon les vecteurs propres associés à ces

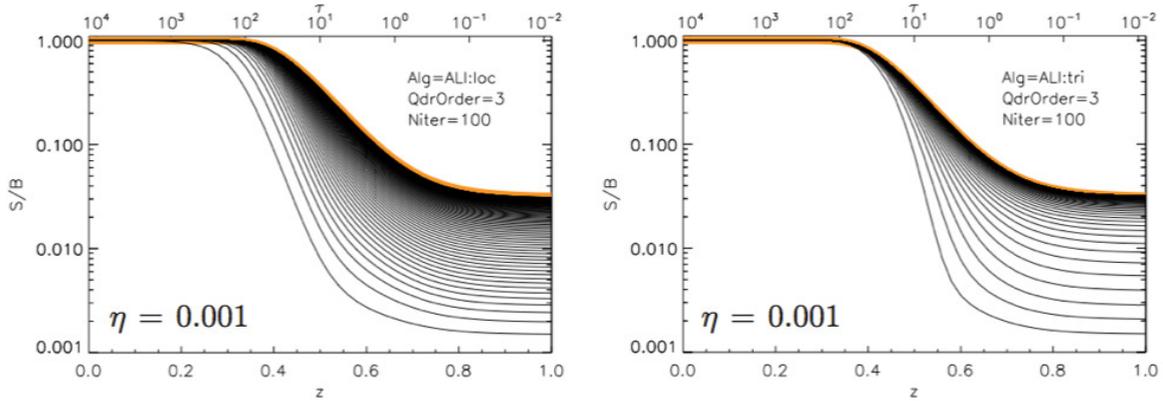


FIGURE 9.9 – **Convergence de l’algorithme ALI** : Pour  $\eta_\nu = 0.001$  avec l’opérateur approché diagonal (à gauche) et tridiagonal (à droite). Figures issues de [11].

préparation des résultats, et s’assurer de la réalité de la convergence.

*Exemple* : Imaginons que toutes les valeurs propres de  $\Psi$  soient égales à 0.1, sauf une qui vaut 0.999999. Après 4 itérations, l’écart entre  $\mathcal{S}^{(4)}$  et  $\mathcal{S}^{(3)}$  est  $\leq 10^{-4}$  mais en réalité il faut au moins  $1/(1 - 0.999999) = 10^6$  itérations pour converger le long du dernier axe propre.

### 9.5.10 Accélération Ng

Il est possible d’accélérer encore notablement la convergence de l’algorithme ALI, en lui adjoignant une méthode due à Ng [29], qui consiste à supposer qu’on ait effectué trois itérations (on dispose donc de  $\mathcal{S}^{(n-3)}$ ,  $\mathcal{S}^{(n-2)}$ ,  $\mathcal{S}^{(n-1)}$  et  $\mathcal{S}^{(n)}$ ) et à prendre comme itération suivante

$$\mathcal{S}^{(n+1)} = (1 - a_m - b_m) \mathcal{S}^{(n)} + a_m \mathcal{S}^{(n-1)} + b_m \mathcal{S}^{(n-2)} \quad (9.25)$$

où  $a_m$  et  $b_m$  sont des réels issus d’une procédure d’optimisation [11]. On constate que la convergence est drastiquement accélérée<sup>23</sup>, comme le montre la Fig. 9.10.

### 9.5.11 De la nécessité de l’intégration d’ordre 3

Reprenant notre exemple sans dimension avec cette fois  $\eta = 10^{-5}$ , on montre sur la Fig. 9.11 la solution obtenue dans le cas des schémas d’ordre 1, 2 et 3. Il apparaît clairement que **les deux premiers ne donnent pas la solution correcte**, et ce n’est pas ici un problème de fausse convergence.

dernières et une fois cette convergence partielle atteinte, la vitesse de convergence va diminuer drastiquement, sans que la solution soit pour autant correcte.

23. En réalité, cette méthode est applicable à tout algorithme linéairement convergent. Bien entendu, avant de pouvoir la réappliquer, il faut faire trois nouvelles itérations classiques. Notons également que la méthode s’applique au vecteur  $\mathcal{S}$  entier, pas aux points de la grille indépendamment les uns des autres.

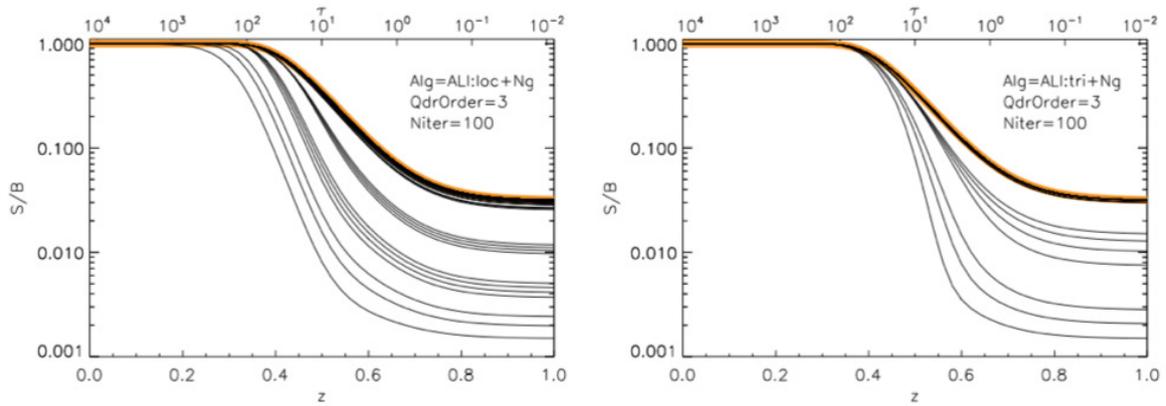


FIGURE 9.10 – **Convergence de l’algorithme ALI avec accélération Ng** : Pour  $\eta_\nu = 0.001$  avec l’opérateur approché diagonal (à gauche) et tridiagonal (à droite). Figures issues de [11].

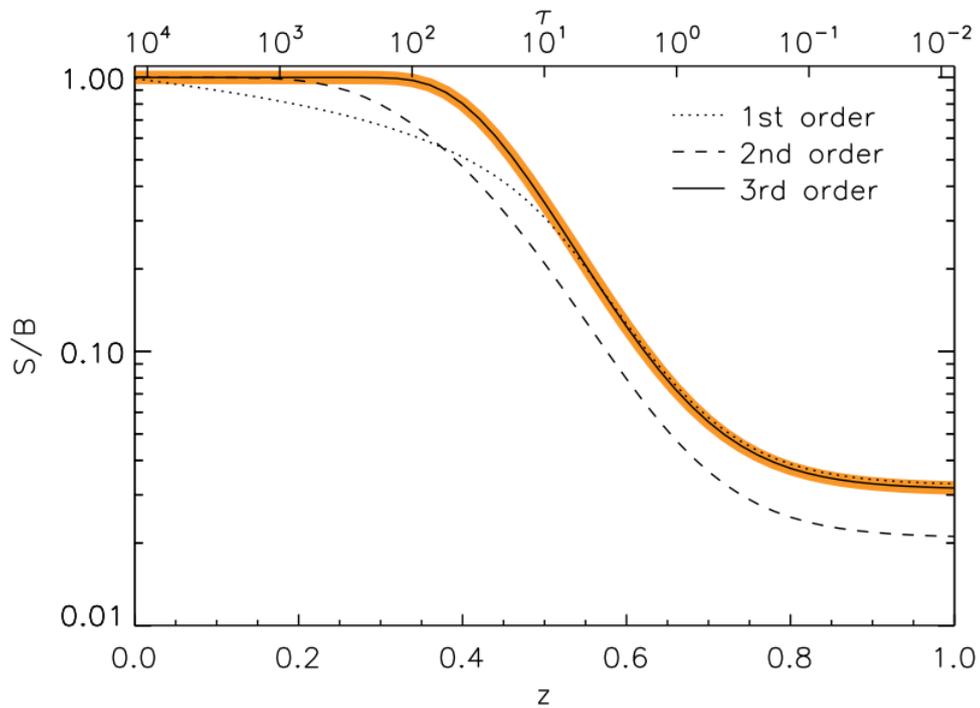


FIGURE 9.11 – **Nécessité de l’intégration d’ordre 3**. Figure issue de [11].

La raison profonde est que les schémas d'ordre 1 et 2 ne possèdent pas les bonnes propriétés pour les algorithmes (A)LI dans le cas des grandes épaisseurs optiques : **ils ne reproduisent pas le régime diffusif et ne conservent pas correctement le flux radiatif**. De l'énergie est ainsi perdue dans la diffusion du rayonnement vers le haut de l'atmosphère. On peut s'en rendre compte en calculant les termes de l'opérateur approché dans le cas du schéma d'ordre 2 pour l'approximation à deux rayons. Dans la limite  $\Delta\tau \gg 1$ , on montre en effet que

$$\Lambda_{i+1/2,i-1/2}^* = \frac{1}{2\Delta\tau} \quad \Lambda_{i+1/2,i+1/2}^* = 1 - \frac{1}{\Delta\tau} \quad \Lambda_{i+1/2,i+3/2}^* = \frac{1}{2\Delta\tau} \quad (9.26)$$

### **Exercice 139 : Établir les expressions (9.26).**

L'opérateur de diffusion n'est pas reproduit, ce qui explique pourquoi le schéma d'ordre 2 ne fonctionne pas correctement dans cette limite. On a la même conclusion quant au schéma d'ordre 1. Notons qu'il existe une méthode alternative à l'intégration d'ordre 3, appelée **méthode de Feautrier** [13], couramment utilisée dans le cas des atmosphères stellaires. On ne la détaillera pas ici.

## 9.5.12 Le cas des raies spectrales

### **Algorithme LI pour les raies**

L'approche (A)LI peut également être appliquée au transfert dans les raies spectrales. Dans ce cas, l'opérateur Lambda prend la forme<sup>24</sup>

$$\Lambda_{ij} [\cdot] = \frac{1}{4\pi} \int d\nu \int d\Omega \phi(\nu, \mathbf{x}, \mathbf{k}) \Lambda_{\nu, \mathbf{k}} [\cdot] \quad (9.27)$$

où  $\phi(\nu, \mathbf{x}, \mathbf{k})$  est le profil de la raie entre les niveaux  $i$  et  $j$  à la position  $\mathbf{x}$  et dans la direction  $\mathbf{k}$ <sup>25</sup>, et  $\Lambda_{\nu, \mathbf{k}}$  est l'opérateur Lambda dépendant de l'angle, c'est-à-dire celui qui donne l'intensité  $I_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{k})$  étant donnée la fonction source  $S_\nu(\mathbf{x}')$  en tous points  $\mathbf{x}'$ . L'équation d'équilibre statistique du niveau  $i$  s'écrit alors en chaque point  $\mathbf{x}$

$$\sum_{j>i} [n_j A_{ji} + (n_j B_{ji} - n_i B_{ij}) J_{ji}] + \sum_{j \neq i} n_j n_p C_{ji} = \sum_{j<i} [n_i A_{ij} + (n_i B_{ij} - n_j B_{ji}) J_{ij}] + \sum_{j \neq i} n_i n_p C_{ij} \quad (9.28)$$

avec  $J_{ij} = \Lambda_{ij} [S_{ij}]$  (évalué au point  $\mathbf{x}$  considéré) et

$$S_{ij} = \frac{n_i A_{ij}}{n_j B_{ji} - n_i B_{ij}} \quad (9.29)$$

la fonction source dans la raie  $i \rightarrow j$  en ce même point. La notation  $S_{ij}$  fait référence à l'ensemble des points de la grille. On a ainsi une **formulation du problème du transfert radiatif hors-ETL complet sous la forme d'un opérateur Lambda**.

*Note :* Il faut remarquer néanmoins que l'écriture  $J_{ij} = \Lambda_{ij} [S_{ij}]$  **suppose implicitement que les raies ne se superposent pas**. En effet l'équation définissant l'opérateur  $\Lambda_{ij}$  contient une intégrale sur la fréquence qui prend en compte la fonction source  $S_\nu$  partout où le profil de la raie est non nul. Si une autre raie  $k \rightarrow l$  est présente à une fréquence proche, sa fonction source  $S_{kl}$  intervient dans  $\Lambda_{ij}$ , rendant l'écriture  $J_{ij} = \Lambda_{ij} [S_{ij}]$  incorrecte.

24. Les indices  $ij$  se rapportent ici aux niveaux mis en jeu dans la raie, et non aux éléments de la matrice !

25. Cette dépendance est liée à la vitesse locale  $\mathbf{u}$  du gaz, dont la projection  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{k}$  sur la ligne de visée modifie la fréquence centrale de la raie.

*Note* : Une autre hypothèse implicite faite ici est celle de la **redistribution complète**, qui consiste à supposer que la vitesse d'un atome ou d'une molécule participant au rayonnement dans la raie voit sa vitesse varier de manière aléatoire, via les collisions, entre absorption et émission d'un photon. Si ce n'était pas le cas il faudrait résoudre une équation d'équilibre statistique de ce type pour chaque vitesse  $u$ , ce qui rend le problème intractable en 3D. Malheureusement, l'hypothèse de redistribution complète n'est pas toujours assurée, en particulier dans le milieu interstellaire, lorsqu'on utilise un modèle sous-maille de la turbulence : le temps de retournement des tourbillons n'est alors pas nécessairement plus court que certains des temps radiatifs  $1/A_{ij}...$

L'écriture du problème du transfert hors ETL dans les raies sous la forme précédente indique comment il faut procéder pour adapter l'algorithme LI au cas des raies spectrales. À chaque étape  $m$ , on a un système d'équations de la forme

$$\begin{aligned} \sum_{j>i} \left\{ n_j^{(m+1)} A_{ji} + \left[ n_j^{(m+1)} B_{ji} - n_i^{(m+1)} B_{ij} \right] \Lambda_{ji} \left[ \mathbf{S}_{ji}^{(m)} \right] (\mathbf{x}) \right\} + \sum_{j \neq i} n_j^{(m+1)} n_p C_{ji} &= \\ \sum_{j<i} \left\{ n_i^{(m+1)} A_{ij} + \left[ n_i^{(m+1)} B_{ij} - n_j^{(m+1)} B_{ji} \right] \Lambda_{ij} \left[ \mathbf{S}_{ij}^{(m)} \right] (\mathbf{x}) \right\} + \sum_{j \neq i} n_i^{(m+1)} n_p C_{ij} & \quad (9.30) \end{aligned}$$

qui permet de déterminer les populations et donc la fonction source à l'itération  $m + 1$

$$S_{ij}^{(m+1)} = \frac{n_i^{(m+1)} A_{ij}}{n_j^{(m+1)} B_{ji} - n_i^{(m+1)} B_{ij}} \quad (9.31)$$

*Note* : L'intégration sur la fréquence dans la définition de l'opérateur  $\Lambda_{ij}$  est faite sur une plage finie  $\Delta\nu$  devant couvrir toute la raie, en tenant compte des décalages Doppler dus à la vitesse du gaz, mais il ne faut pas que  $\Delta\nu$  soit trop grand, car pour résoudre le profil de la raie, l'échantillonnage en fréquence  $\delta\nu$  doit être suffisant. Si  $\Delta\nu$  est trop grand, sachant qu'on doit résoudre le transfert formellement pour  $\Delta\nu/\delta\nu$  fréquences, pour chaque rayon, pour chaque raie, et à chaque itération Lambda, le coût numérique devient prohibitif. **Il apparaît donc qu'un problème hors ETL dans lequel de forts gradients de vitesse sont présents est difficile à traiter avec l'algorithme LI.**

### Algorithme MALI

Pour accélérer l'itération Lambda dans le cas des raies spectrales, on peut également utiliser une méthode d'opérateur approché en introduisant  $\Lambda_{ij} = \Lambda_{ij}^* + (\Lambda_{ij} - \Lambda_{ij}^*)$  avec

$$\Lambda_{ij}^* [\cdot] = \frac{1}{4\pi} \int d\nu \int d\Omega \phi(\nu, \mathbf{x}, \mathbf{k}) \Lambda_{\nu, \mathbf{k}}^* [\cdot] \quad (9.32)$$

et où  $\Lambda_{\nu, \mathbf{k}}^*$  est un opérateur Lambda approché comme décrit plus haut, par exemple la partie diagonale de  $\Lambda_{\nu, \mathbf{k}}$ . On montre alors qu'on peut obtenir un schéma d'itération ALI pour les raies, appelé **Multi-level Accelerated Lambda Iteration (MALI)** [42], et qui s'écrit

$$\begin{aligned} \sum_{j>i} \left\{ n_j^{(m+1)} A_{ji} [1 - \Lambda_{ji}^*(\mathbf{x})] + \left[ n_j^{(m+1)} B_{ji} - n_i^{(m+1)} B_{ij} \right] (\Lambda_{ji} - \Lambda_{ji}^*) \left[ \mathbf{S}_{ji}^{(m)} \right] (\mathbf{x}) \right\} \\ + \sum_{j \neq i} n_j^{(m+1)} n_p C_{ji} \\ = \\ \sum_{j<i} \left\{ n_i^{(m+1)} A_{ij} [1 - \Lambda_{ij}^*(\mathbf{x})] + \left[ n_i^{(m+1)} B_{ij} - n_j^{(m+1)} B_{ji} \right] (\Lambda_{ij} - \Lambda_{ij}^*) \left[ \mathbf{S}_{ij}^{(m)} \right] (\mathbf{x}) \right\} \\ + \sum_{j \neq i} n_i^{(m+1)} n_p C_{ij} \quad (9.33) \end{aligned}$$

### **Exercice 140 : Établir le schéma d'itération MALI (9.33).**

*Note :* L'écriture (9.33) n'est valable que pour un opérateur approché local (autrement dit diagonal), des raies non superposées, et en l'absence de rayonnement continu. Il est aisé de lui appliquer une accélération Ng. Il faut aussi remarquer que **le fait que les équations d'équilibre statistique restent linéaires vis-à-vis des populations est un cas très particulier**, car en toute généralité, dans le transfert radiatif des raies spectrales, l'épaisseur optique varie à chaque itération puisque les populations varient. Or la méthode ALI telle qu'elle a été présentée plus haut fait l'hypothèse que l'épaisseur optique est une donnée du problème, et donc constante. Ici, la non-linéarité disparaît car les facteurs  $n_i^{(m+1)} B_{ij} - n_j^{(m+1)} B_{ji}$  se simplifient avec leurs inverses venant de la fonction source.

## **9.6 Méthode de moments**

La troisième classe de méthodes numériques permettant de résoudre le transfert radiatif est fondée sur le calcul des **moments de l'intensité spécifique**, introduits au chapitre 2. Contrairement aux méthodes Monte-Carlo et aux méthodes à discrétisation des coordonnées, on ne traite plus ici "indépendamment" les différentes directions possibles pour les photons, mais on effectue des moyennes angulaires. On réduit ainsi la dimensionnalité du problème.

### **9.6.1 Principe**

On rappelle l'expression des trois premiers moments de l'intensité spécifique :

$$J_\nu(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{k}) d\Omega \quad \mathbf{H}_\nu(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \mathbf{k} d\Omega \quad \mathbf{K}_\nu(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} d\Omega \quad (9.34)$$

**Par rapport aux expressions écrites au chapitre 2, il faut remarquer qu'ici on considère des quantités plus générales** en ce qui concerne les moments d'ordre 1 et 2, qui sont ici respectivement un vecteur et un tenseur d'ordre 2. Les expressions du chapitre 2 faisaient l'hypothèse que seule une composante était non nulle, et respectivement proportionnelle à ce qu'on a nommé densité spectrale de flux  $F_\nu$  et densité spectrale de pression de radiation  $p_\nu$ . Celles-ci ne sont par ailleurs pas égales à  $\mathbf{H}_\nu$  et  $\mathbf{K}_\nu$ , respectivement, mais elles leurs sont proportionnelles.

À partir de l'équation du transfert  $\mathbf{k} \cdot \nabla I_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \alpha_\nu(\mathbf{x}) [S_\nu(\mathbf{x}) - I_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{k})]$ , où l'on a posé le coefficient d'extinction  $\alpha_\nu = \kappa_\nu + \sigma_\nu$ , on montre que les équations des moments s'écrivent

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_\nu(\mathbf{x}) = \alpha_\nu(\mathbf{x}) [S_\nu(\mathbf{x}) - J_\nu(\mathbf{x})] \quad \nabla \cdot \mathbf{K}_\nu = -\alpha_\nu(\mathbf{x}) \mathbf{H}_\nu(\mathbf{x}) \quad (9.35)$$

### **Exercice 141 : Établir les équations des moments (9.35).**

Ces équations ne forment pas un système fermé<sup>26</sup> et on pourrait continuer ainsi indéfiniment qu'on n'en obtiendrait pas. **Seul l'ensemble de toutes les équations de moments l'est, car il est équivalent à l'équation du transfert elle-même.** Les moments correspondent à la décomposition en harmoniques sphériques  $Y_{\ell,m}$  de la dépendance angulaire de  $I_\nu$ , et plus on s'élève dans les ordres, plus on considère des composantes de  $\ell$  élevé, donc des échelles angulaires petites. Pour avoir une idée générale de la dépendance angulaire, il peut suffire de s'arrêter aux premiers moments.

<sup>26</sup> La première est scalaire et la seconde vectorielle, on a donc 4 équations, qui portent sur 10 variables ( $J_\nu$ , les trois composantes de  $\mathbf{H}_\nu$ , et les six composantes indépendantes du tenseur symétrique  $\mathbf{K}_\nu$ ).

## 9.6.2 Approximation d'Eddington

La question qui se pose alors est de savoir comment tronquer le système. L'hypothèse la plus simple qu'on peut faire est **l'approximation d'Eddington**, qui consiste à supposer que

$$\mathbf{K}_\nu = \frac{1}{3} J_\nu \mathbf{1} \quad (9.36)$$

où  $\mathbf{1}$  est le tenseur unité dont les éléments sont  $\delta_{ij}$ . Cette approximation est valable, comme on l'a déjà vu, dans le cas d'un champ de rayonnement isotrope, et est en fait assez raisonnable, même si le champ de rayonnement dévie légèrement du cas isotrope. Mathématiquement, elle correspond à la troncature du développement en harmoniques sphériques au delà de  $l = 2$ . Avec cette approximation, on montre qu'on obtient une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre, qui constitue **l'approximation de diffusion du transfert radiatif**

$$\frac{1}{3} \nabla \cdot \left[ \frac{1}{\alpha_\nu(\mathbf{x})} \nabla J_\nu \right] = \alpha_\nu(\mathbf{x}) [J_\nu(\mathbf{x}) - \mathcal{S}_\nu(\mathbf{x})] \quad (9.37)$$

Cette dénomination prend tout son sens lorsqu'on écrit le flux radiatif

$$\mathbf{F}_\nu(\mathbf{x}) = 4\pi \mathbf{H}_\nu(\mathbf{x}) = -\frac{4\pi}{3\alpha_\nu(\mathbf{x})} \nabla J_\nu = -\frac{c}{3\alpha_\nu(\mathbf{x})} \nabla u_\nu \quad (9.38)$$

qui fait apparaître la densité d'énergie  $u_\nu(\mathbf{x})$  et le coefficient de diffusion  $c/(3\alpha_\nu)$ .

**Exercice 142 : Démontrer la relation (9.37).**

## 9.6.3 Méthode VET

L'avantage de cette approximation est qu'elle réduit le problème du transfert radiatif à la résolution d'une équation de diffusion pour laquelle des méthodes standard existent dans la littérature. Elle rend les approches Monte-Carlo ou itératives inutiles. Bien qu'elle ne soit cependant qu'une approximation, **on peut la combiner à une approche dépendant de l'angle** qui peut s'avérer plus précise. L'une de ces méthodes est celle dite **Variable Eddington Tensor (VET)**. L'idée consiste à écrire

$$\mathbf{K}_\nu = J_\nu \mathbf{f}_\nu \quad (9.39)$$

où  $\mathbf{f}_\nu$  est donc une version adimensionnée du tenseur  $\mathbf{K}_\nu$ , et constitue ce **tenseur variable d'Eddington**. En passant par les mêmes étapes que dans le cas de l'approximation d'Eddington, on obtient

$$\nabla \cdot \left[ \frac{1}{\alpha_\nu} \nabla (J_\nu \mathbf{f}_\nu) \right] = \alpha_\nu [J_\nu - \mathcal{S}_\nu]$$

qu'on met sous la forme suivante

$$\nabla \cdot \left[ \frac{1}{\alpha_\nu} \nabla (J_\nu \mathbf{f}_\nu) \right] = \kappa_\nu [J_\nu - B_\nu] \quad (9.40)$$

qui peut être résolue (i.e. on peut déterminer  $J_\nu$ ), en tenant  $\mathbf{f}_\nu$  constant et en utilisant les mêmes techniques que pour l'approximation d'Eddington. Reste maintenant à déterminer  $\mathbf{f}_\nu$ , ce qu'on fait par une méthode itérative :

- ▶ On part de l'approximation d'Eddington  $\mathbf{f}_\nu = (1/3)\mathbf{1}$ .
- ▶ On obtient  $J_\nu$  à partir de l'équation de diffusion 9.40.
- ▶ On en déduit la fonction source  $\mathcal{S}_\nu = \eta_\nu B_\nu(T) + (1 - \eta_\nu)J_\nu$ .
- ▶ On intègre formellement l'équation du transfert pour en tirer une nouvelle valeur de  $\mathbf{f}_\nu$ . Cette étape est similaire au schéma de l'opérateur Lambda.
- ▶ On revient à la deuxième étape, jusqu'à convergence de  $J_\nu$ .

Cette méthode converge parfois extrêmement vite, à condition de l'appliquer à la forme (9.40) de l'équation, qui ne fait pas apparaître de terme de diffusion (en  $\sigma_\nu$ ) dans le membre de droite. Cependant, il faut voir qu'on ne peut pas toujours établir cette méthode dans le cas où la diffusion n'est pas isotrope, ou si on se place en trois dimensions.

## Réponses aux exercices du chapitre 9

### **Exercice 131**

L'épaisseur optique est alors

$$\Delta\tau_i = \kappa_i (s_{i+1/2} - s_{i-1/2})$$

Dans notre exemple 1D, elle peut aussi s'écrire

$$\Delta\tau_i = \kappa_i \frac{z_{i+1/2} - z_{i-1/2}}{\mu} = \frac{\Delta\tau_{i,\perp}}{\mu}$$

La fonction source sur chaque segment est évidemment constante

$$S_i = S_\nu(z_i) = \frac{\epsilon_i}{\kappa_i}$$

et on peut intégrer analytiquement l'équation du transfert sur le segment en question, ce qui donne

$$I_{i+1/2}(\mu) = I_{i-1/2}(\mu)e^{-\Delta\tau_i} + S_i(1 - e^{-\Delta\tau_i})$$

où  $I_{i-1/2}(\mu) = I_\nu(z_{i-1/2}, \mu)$  est la valeur de l'intensité spécifique au point  $z_{i-1/2}$  de la grille sur le rayon repéré par  $\mu$ . Dès lors qu'on suppose que  $\kappa_\nu$  et  $\epsilon_\nu$  sont constants à l'intérieur de la cellule, ce résultat est exact, quelle que soit l'épaisseur optique.

### **Exercice 132**

$$Q_i = \left[ \frac{1 - (1 + \Delta\tau_i)e^{-\Delta\tau_i}}{\Delta\tau_i} \right] S_{i-1/2} + \left( \frac{\Delta\tau_i - 1 + e^{-\Delta\tau_i}}{\Delta\tau_i} \right) S_{i+1/2}$$

### **Exercice 133**

$$Q_i = uS_{i-1/2} + vS_{i+1/2} + wS_{i+3/2}$$

avec

$$u = e_0 + \frac{e_2 - (2\Delta\tau_i + \Delta\tau_{i+1})e_1}{\Delta\tau_i(\Delta\tau_i + \Delta\tau_{i+1})} \quad v = \frac{(\Delta\tau_i + \Delta\tau_{i+1})e_1 - e_2}{\Delta\tau_i\Delta\tau_{i+1}} \quad w = \frac{e_2 - \Delta\tau_i e_1}{\Delta\tau_{i+1}(\Delta\tau_i + \Delta\tau_{i+1})}$$

expressions qui font intervenir les coefficients suivants

$$e_0 = 1 - e^{-\Delta\tau_i} \quad e_1 = \Delta\tau_i - e_0 \quad e_2 = \Delta\tau_i^2 - 2e_1$$

### **Exercice 134**

La solution convergée de l'itération Lambda est solution de

$$S_\nu = \eta_\nu B_\nu(T) + (1 - \eta_\nu) \Lambda[S_\nu]$$

Une fois connue  $S_\nu$ , en effet, il suffit d'intégrer formellement l'équation du transfert sur n'importe quel rayon pour en tirer l'intensité. Avec la notation matricielle introduite précédemment, et en se passant des indices  $\nu$  superflus, il s'agit donc de résoudre

$$\mathbf{S} = \eta \mathbf{B} + (1 - \eta) \Lambda \mathbf{S}$$

où  $\mathbf{B}$  est le vecteur regroupant l'émission thermique en chaque point de la grille. Avec l'itération Lambda, on part d'une évaluation initiale  $\mathbf{S}^{(0)}$  et on itère selon

$$\mathbf{S}^{(n+1)} = \eta \mathbf{B} + (1 - \eta) \Lambda \mathbf{S}^{(n)}$$

mais avec une puissance de calcul infinie, autant procéder directement à la résolution de l'équation matricielle qu'on met sous la forme

$$\mathbb{M}\mathcal{S} = \eta\mathcal{B} \quad \text{avec} \quad \mathbb{M} = \mathbf{1} - (1 - \eta)\mathbf{\Lambda}$$

où  $\mathbf{1}$  est la matrice identité  $N \times N$ .

### Exercice 135

On commence par séparer l'opérateur  $\mathbf{\Lambda}$  en deux :

$$\mathcal{S} = \eta\mathcal{B} + (1 - \eta)[\mathbf{\Lambda}^* + (\mathbf{\Lambda} - \mathbf{\Lambda}^*)]\mathcal{S}$$

et on met cette équation sous la forme

$$\mathbb{M}^*\mathcal{S} = \eta\mathcal{B} + (1 - \eta)(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{\Lambda}^*)\mathcal{S} \quad \text{avec} \quad \mathbb{M}^* = \mathbf{1} - (1 - \eta)\mathbf{\Lambda}^*$$

De la sorte, on a la matrice facile à résoudre à gauche et la difficile à droite. On ne peut évidemment résoudre l'équation directement, mais on peut introduire un nouveau schéma itératif en posant

$$\mathbb{M}^*\mathcal{S}^{(n+1)} = \eta\mathcal{B} + (1 - \eta)(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{\Lambda}^*)\mathcal{S}^{(n)}$$

Comme  $\mathbb{M}^*$  est une matrice creuse, on peut facilement la stocker et résoudre l'équation matricielle ci-dessus à chaque étape de l'itération, soit

$$\mathcal{S}^{(n+1)} = \eta\mathbb{M}^{*-1}\mathcal{B} + (1 - \eta)\mathbb{M}^{*-1}(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{\Lambda}^*)\mathcal{S}^{(n)}$$

### Exercice 136

Dans la limite  $\Delta\tau \gg 1$ , on a

$$\text{diag}(\mathbf{\Lambda}) \simeq \left(1 - \frac{2}{\Delta\tau^2}\right)\mathbf{1}$$

Prenant alors  $\mathbf{\Lambda}^* = \text{diag}(\mathbf{\Lambda})$ , on a, dans la limite  $\eta \ll 1$  qui est celle pour laquelle l'algorithme LI devient trop lent

$$\mathbb{M}^* = \mathbf{1} - (1 - \eta)\left(1 - \frac{2}{\Delta\tau^2}\right)\mathbf{1} \simeq \left(\eta + \frac{2}{\Delta\tau^2}\right)\mathbf{1}$$

Le schéma d'itération est alors

$$\mathcal{S}^{(n+1)} = \frac{1}{\eta + \frac{2}{\Delta\tau^2}} \left[ \eta\mathcal{B} + (1 - \eta)(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{\Lambda}^*)\mathcal{S}^{(n)} \right]$$

ce qui montre, par comparaison avec le schéma LI, qu'on a un facteur d'accélération de convergence donné par

$$a = \frac{1}{\eta + \frac{2}{\Delta\tau^2}} \gg 1$$

### Exercice 137

Concentrons nous sur le point de la grille noté  $i + 1/2$  et ses voisins  $i - 1/2$  et  $i + 3/2$ . L'application des formules donne, pour les deux rayons

$$I_{+,i+1/2} = I_{+,i-1/2}e^{-\Delta\tau_i} + u_{+,i+1/2}S_{i-1/2} + v_{+,i+1/2}S_{i+1/2} + w_{+,i+1/2}S_{i+3/2}$$

et

$$I_{-,i+1/2} = I_{-,i+3/2}e^{-\Delta\tau_{i+1}} + u_{-,i+1/2}S_{i+3/2} + v_{-,i+1/2}S_{i+1/2} + w_{-,i+1/2}S_{i-1/2}$$

où les coefficients  $u_{+,i+1/2}$ ,  $u_{-,i+1/2}$ ,  $v_{+,i+1/2}$ ,  $v_{-,i+1/2}$ ,  $w_{+,i+1/2}$  et  $w_{-,i+1/2}$  sont exprimés en fonction de

$$\Delta\tau_i = \sqrt{3}\alpha_i (z_{i+1/2} - z_{i-1/2}) \quad \text{et} \quad \Delta\tau_{i+1} = \sqrt{3}\alpha_{i+1} (z_{i+3/2} - z_{i+1/2})$$

avec  $\alpha_i = \kappa_i + \sigma_i$ . On en déduit l'intensité moyenne

$$J_{i+1/2} = \frac{1}{2} (I_{+,i+1/2} + I_{-,i+1/2})$$

ce qui donne

$$J_{i+1/2} = \frac{I_{+,i-1/2}e^{-\Delta\tau_i}}{2} + \frac{I_{-,i+3/2}e^{-\Delta\tau_{i+1}}}{2} + \Lambda_{i+1/2,i-1/2}^* S_{i-1/2} + \Lambda_{i+1/2,i+1/2}^* S_{i+1/2} + \Lambda_{i+1/2,i+3/2}^* S_{i+3/2}$$

avec

$$\Lambda_{i+1/2,i-1/2}^* = \frac{u_{+,i+1/2} + w_{-,i+1/2}}{2}$$

$$\Lambda_{i+1/2,i+1/2}^* = \frac{v_{+,i+1/2} + v_{-,i+1/2}}{2}$$

$$\Lambda_{i+1/2,i+3/2}^* = \frac{w_{+,i+1/2} + u_{-,i+1/2}}{2}$$

En principe, il faudrait continuer en développant les intensités  $I_{+,i-1/2}$  en fonction de  $I_{+,i-3/2}$ ,  $S_{i-3/2}$ ,  $S_{i-1/2}$  et  $S_{i+1/2}$  et développer  $I_{-,i+3/2}$  en fonction de  $I_{-,i+5/2}$ ,  $S_{i+5/2}$ ,  $S_{i+3/2}$  et  $S_{i+1/2}$ , mais dans le cas qui nous intéresse  $\Delta\tau \gg 1$ , ces termes disparaissent car proportionnels à  $e^{-\Delta\tau}$ . On voit donc que les coefficients de l'opérateur approché tridiagonal sont donnés par les équations ci-dessus.

Remarquons que si l'on se limite à l'opérateur approché local, on prend

$$\Lambda_{i+1/2,i-1/2}^* = 0 \quad \Lambda_{i+1/2,i+1/2}^* = \frac{v_{+,i+1/2} + v_{-,i+1/2}}{2} \quad \Lambda_{i+1/2,i+3/2}^* = 0$$

Ces éléments de matrice sont faciles à obtenir puisqu'on calcule les coefficients  $u$ ,  $v$  et  $w$  lors de l'intégration de l'équation du transfert. Dans le cas limite de cellules de même épaisseur optique tendant vers l'infini  $\Delta\tau_i = \Delta\tau_{i+1} = \Delta\tau \rightarrow \infty$ , on peut les calculer simplement puisque

$$e_0 = 1 \quad e_1 = \Delta\tau - 1 \quad e_2 = \Delta\tau^2 - 2\Delta\tau + 2$$

ce qui donne, en utilisant les formules pour  $u$ ,  $v$  et  $w$  avec  $\Delta\tau_i = \Delta\tau_{i+1} = \Delta\tau$ , soit

$$u = e_0 + \frac{e_2 - 3\Delta\tau e_1}{2\Delta\tau^2} \quad v = \frac{2\Delta\tau e_1 - e_2}{\Delta\tau^2} \quad w = \frac{e_2 - \Delta\tau e_1}{2\Delta\tau^2}$$

les expressions suivantes de  $u$ ,  $v$  et  $w$ ,

$$u = \frac{1}{\Delta\tau^2} + \frac{1}{2\Delta\tau} \quad v = 1 - \frac{2}{\Delta\tau^2} \quad w = \frac{1}{\Delta\tau^2} - \frac{1}{2\Delta\tau}$$

et donc pour l'opérateur approché tridiagonal

$$\Lambda_{i+1/2,i-1/2}^* = \frac{u+w}{2} = \frac{1}{\Delta\tau^2} \quad \Lambda_{i+1/2,i+1/2}^* = v = 1 - \frac{2}{\Delta\tau^2} \quad \Lambda_{i+1/2,i+3/2}^* = \frac{w+u}{2} = \frac{1}{\Delta\tau^2}$$

### Exercice 138

Pour obtenir l'estimation suivante  $\mathcal{S}^{(n+1)}$ , on peut utiliser ces approximations successives pour essayer de "deviner" vers où se dirige la solution. Mathématiquement, les pointes des trois vecteurs  $\mathcal{S}^{(n-3)}$ ,  $\mathcal{S}^{(n-2)}$  et  $\mathcal{S}^{(n-1)}$  définissent trois points et donc un plan dans un espace à  $N$  dimensions<sup>27</sup>. Ce plan est celui qui contient les extrémités de tous les vecteurs de la forme

$$\mathcal{S}^* = (1 - a - b)\mathcal{S}^{(n-1)} + a\mathcal{S}^{(n-2)} + b\mathcal{S}^{(n-3)}$$

27. On rappelle que  $N$  est le nombre de points de la grille.

avec  $a$  et  $b$  des réels quelconques. Si l'on insère cette forme dans l'équation matricielle écrite plus haut en écrivant  $1 = 1 - a - b + a + b$ , on obtient un nouveau vecteur  $\mathcal{S}^{**}$  avec

$$\mathcal{S}^{**} = \mathbf{A} + \Psi \mathcal{S}^* = (1 - a - b + a + b) \mathbf{A} + \Psi \left[ (1 - a - b) \mathcal{S}^{(n-1)} + a \mathcal{S}^{(n-2)} + b \mathcal{S}^{(n-3)} \right]$$

on fait ainsi apparaître les expressions des itérations  $\mathcal{S}^{(n-1)} \rightarrow \mathcal{S}^{(n)}$ ,  $\mathcal{S}^{(n-2)} \rightarrow \mathcal{S}^{(n-1)}$  et  $\mathcal{S}^{(n-3)} \rightarrow \mathcal{S}^{(n-2)}$  et donc

$$\mathcal{S}^{**} = \mathbf{A} + \Psi \mathcal{S}^* = (1 - a - b) \mathcal{S}^{(n)} + a \mathcal{S}^{(n-1)} + b \mathcal{S}^{(n-2)}$$

Il se trouve qu'il existe des valeurs  $a_m$  et  $b_m$  de  $a$  et  $b$  telles que la distance

$$|\mathcal{S}^{**} - \mathcal{S}^*|^2$$

est minimale<sup>28</sup>. En choisissant alors pour l'itération suivante

$$\mathcal{S}^{(n+1)} = (1 - a_m - b_m) \mathcal{S}^{(n)} + a_m \mathcal{S}^{(n-1)} + b_m \mathcal{S}^{(n-2)}$$

### Exercice 139

Les intensités des deux rayons au point considéré sont données par

$$I_{+,i+1/2} = I_{+,i-1/2} e^{-\Delta\tau_i} + \left[ \frac{1 - (1 + \Delta\tau_i) e^{-\Delta\tau_i}}{\Delta\tau_i} \right] S_{i-1/2} + \left( \frac{\Delta\tau_i - 1 + e^{-\Delta\tau_i}}{\Delta\tau_i} \right) S_{i+1/2}$$

et

$$I_{-,i+1/2} = I_{-,i+3/2} e^{-\Delta\tau_{i+1}} + \left[ \frac{1 - (1 + \Delta\tau_{i+1}) e^{-\Delta\tau_{i+1}}}{\Delta\tau_{i+1}} \right] S_{i+3/2} + \left( \frac{\Delta\tau_{i+1} - 1 + e^{-\Delta\tau_{i+1}}}{\Delta\tau_{i+1}} \right) S_{i+1/2}$$

ce qui donne

$$J_{i+1/2} = \frac{I_{+,i-1/2} e^{-\Delta\tau_i}}{2} + \frac{I_{-,i+3/2} e^{-\Delta\tau_{i+1}}}{2} + \Lambda_{i+1/2,i-1/2}^* S_{i-1/2} + \Lambda_{i+1/2,i+1/2}^* S_{i+1/2} + \Lambda_{i+1/2,i+3/2}^* S_{i+3/2}$$

avec

$$\begin{aligned} \Lambda_{i+1/2,i-1/2}^* &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - (1 + \Delta\tau_i) e^{-\Delta\tau_i}}{\Delta\tau_i} \right] \\ \Lambda_{i+1/2,i+1/2}^* &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\Delta\tau_i - 1 + e^{-\Delta\tau_i}}{\Delta\tau_i} \right) + \left( \frac{\Delta\tau_{i+1} - 1 + e^{-\Delta\tau_{i+1}}}{\Delta\tau_{i+1}} \right) \right] \\ \Lambda_{i+1/2,i+3/2}^* &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - (1 + \Delta\tau_{i+1}) e^{-\Delta\tau_{i+1}}}{\Delta\tau_{i+1}} \right] \end{aligned}$$

Dans le cas limite de cellules de même épaisseur optique tendant vers l'infini  $\Delta\tau_i = \Delta\tau_{i+1} = \Delta\tau \rightarrow \infty$ , on a

$$\Lambda_{i+1/2,i-1/2}^* = \frac{1}{2\Delta\tau} \quad \Lambda_{i+1/2,i+1/2}^* = 1 - \frac{1}{\Delta\tau} \quad \Lambda_{i+1/2,i+3/2}^* = \frac{1}{2\Delta\tau}$$

### Exercice 140

Supposons ici pour simplifier qu'il s'agisse de la partie diagonale de l'opérateur complet. On a alors une application purement locale

$$\Lambda_{ij}^* [S_{ij}] = \Lambda_{ij}^*(\mathbf{x}) \left[ \frac{n_i A_{ij}}{n_j B_{ji} - n_i B_{ij}} \right] \quad (9.41)$$

28. On cherche ce minimum car cette distance est nulle pour la solution de  $\mathcal{S} = \mathbf{A} + \Psi \mathcal{S}$ .

On introduit cette expression dans celle de l'équilibre statistique :

$$\sum_{j>i} \{n_j A_{ji} + (n_j B_{ji} - n_i B_{ij}) [\Lambda_{ji}^* + (\Lambda_{ji} - \Lambda_{ji}^*)] [\mathcal{S}_{ji}(\mathbf{x})]\} + \sum_{j \neq i} n_j n_p C_{ji} =$$

$$\sum_{j<i} \{n_i A_{ij} + (n_i B_{ij} - n_j B_{ji}) [\Lambda_{ij}^* + (\Lambda_{ij} - \Lambda_{ij}^*)] [\mathcal{S}_{ij}(\mathbf{x})]\} + \sum_{j \neq i} n_i n_p C_{ij}$$

soit

$$\sum_{j>i} \{n_j A_{ji} - \Lambda_{ji}^*(\mathbf{x}) n_j A_{ji} + (n_j B_{ji} - n_i B_{ij}) (\Lambda_{ji} - \Lambda_{ji}^*) [\mathcal{S}_{ji}(\mathbf{x})]\} + \sum_{j \neq i} n_j n_p C_{ji} =$$

$$\sum_{j<i} \{n_i A_{ij} - \Lambda_{ij}^*(\mathbf{x}) n_i A_{ij} + (n_i B_{ij} - n_j B_{ji}) (\Lambda_{ij} - \Lambda_{ij}^*) [\mathcal{S}_{ij}(\mathbf{x})]\} + \sum_{j \neq i} n_i n_p C_{ij}$$

On a donc une équation sensiblement identique à celle écrite plus haut, aux changements  $A_{ij} \rightarrow A_{ij} (1 - \Lambda_{ij}^*)$  et  $\Lambda_{ij} \rightarrow \Lambda_{ij} - \Lambda_{ij}^*$  près, de sorte que le schéma d'itération ALL pour les raies s'écrit

$$\sum_{j>i} \left\{ n_j^{(m+1)} A_{ji} [1 - \Lambda_{ji}^*(\mathbf{x})] + [n_j^{(m+1)} B_{ji} - n_i^{(m+1)} B_{ij}] (\Lambda_{ji} - \Lambda_{ji}^*) [\mathcal{S}_{ji}^{(m)}(\mathbf{x})] \right\}$$

$$+ \sum_{j \neq i} n_j^{(m+1)} n_p C_{ji} =$$

$$\sum_{j<i} \left\{ n_i^{(m+1)} A_{ij} [1 - \Lambda_{ij}^*(\mathbf{x})] + [n_i^{(m+1)} B_{ij} - n_j^{(m+1)} B_{ji}] (\Lambda_{ij} - \Lambda_{ij}^*) [\mathcal{S}_{ij}^{(m)}(\mathbf{x})] \right\}$$

$$+ \sum_{j \neq i} n_i^{(m+1)} n_p C_{ij}$$

#### **Exercice 141**

L'intégration de l'équation du transfert sur toutes les directions donne

$$\frac{1}{4\pi} \int \mathbf{k} \cdot \nabla I_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{k}) d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int \alpha_\nu(\mathbf{x}) [\mathcal{S}_\nu(\mathbf{x}) - I_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{k})] d\Omega$$

soit

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_\nu(\mathbf{x}) = \alpha_\nu(\mathbf{x}) [\mathcal{S}_\nu(\mathbf{x}) - J_\nu(\mathbf{x})]$$

Cette équation de conservation n'est pas fermée, puisqu'à elle seule elle introduit 4 inconnues ( $J_\nu$  et les trois composantes de  $\mathbf{H}_\nu$ ). Si maintenant on applique à l'équation du transfert l'opérateur

$$\frac{1}{4\pi} \int \mathbf{k} d\Omega$$

alors on obtient

$$\frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \int \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} I_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{k}) d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int \alpha_\nu(\mathbf{x}) \mathbf{k} [\mathcal{S}_\nu(\mathbf{x}) - I_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{k})] d\Omega$$

soit

$$\nabla \cdot \mathbf{K}_\nu = -\alpha_\nu(\mathbf{x}) \mathbf{H}_\nu(\mathbf{x})$$

#### **Exercice 142**

L'équation portant sur  $\mathbf{K}_\nu$  devient

$$\frac{1}{3} \nabla J_\nu = -\alpha_\nu(\mathbf{x}) \mathbf{H}_\nu(\mathbf{x})$$

qu'on peut combiner avec celle portant sur  $\mathbf{H}_\nu$  pour donner

$$\frac{1}{3} \nabla \cdot \left[ \frac{1}{\alpha_\nu(\mathbf{x})} \nabla J_\nu \right] = \alpha_\nu(\mathbf{x}) [J_\nu(\mathbf{x}) - \mathcal{S}_\nu(\mathbf{x})]$$

## Bibliographie

- [1] Alpher, R. A., *On the Origin and Relative Abundance of the Elements*, doctoral dissertation, The George Washington University
- [2] Alpher, R. A., & Herman, R. C. 1948, *Nature*, 162, 774
- [3] Balakrishnan N., Yan M., & Dalgarno A.. 2002, *ApJ*, 568, 443
- [4] Bergin, E. A., Phillips, T. G., Comito, C., et al. 2010, *A&A*, 521, L20
- [5] Bernard-Salas, J., PhD Thesis, Rijksuniversiteit Groningen, 2003
- [6] Bicep2/Keck and Planck Collaborations, 2015, *PRL*, 114, 101301
- [7] Cannon, C. J. 1973, *ApJ*, 185, 621
- [8] Chandrasekhar, S., *Radiative transfer*, Oxford University Press, 1950
- [9] Draine, B. T., 2011, *Physics of the Interstellar and Intergalactic Medium*, Princeton University Press
- [10] Dubernet, M.-L., et al, 2012, *A&A*, 553, 50
- [11] Dullemond, C., *Radiative Transfer in Astrophysics : Theory, Numerical Methods and Applications*, 2012
- [12] Emerson, D., *Interpreting astronomical spectra*, Wiley-Blackwell, 1998
- [13] Feautrier, P., 1964, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* 258, 3189
- [14] Gamow, G. 1948, *Physical Review*, 74, 505
- [15] Górski, K. M., Hivon, E., Banday, A. J., et al. 2005, *ApJ*, 622, 759
- [16] Haffner, L.M., et al., 2009, *Reviews of Modern Physics*, 81, 969
- [17] Harris, D. L., 1948, *ApJ*, 108, 112
- [18] Hermes, J.J. et al., 2012, *ApJL*, 750, 28
- [19] Jackson, J. D. 1975, *Classical Electrodynamics*, New York : Wiley, 1975
- [20] Krügel, E., *The Physics of Interstellar Dust*, 2007, Taylor & Francis
- [21] Lena, P., *Astrophysique : Méthodes physiques de l'observation*, 1996, InterEditions, Paris
- [22] Lequeux, J., Falgarone, E., & Ryter, C. *Le milieu interstellaire*, EDP sciences, CNRS éditions, 2002
- [23] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, *PRL*, 116, 061102, 2016
- [24] Mangum, J. L. & Shirley, Y. L., 2015, *PASP*, 127, 266
- [25] Mather, J. C., Cheng, E. S., Eplee, R. E., Jr., et al. 1990, *ApJL*, 354, L37

- [26] Mihalas, D., *Stellar Atmospheres*, Freeman & Co., 1971
- [27] Mihalas, D., & Mihalas, B., *Foundations of Radiation Hydrodynamics*, Oxford University Press, 1984
- [28] Muller, S., Beelen, A., Black, J. H., et al. 2013, A&A, 551, A109
- [29] Ng, K.C. 1974, J. Chem. Phys., 61, 2680
- [30] Olson, G. L., Auer, L. H., & Buchler, J. R. 1986, JSQRT, 35, 431
- [31] Olson, G. L., & Kunasz, P. B. 1987, JSQRT, 38, 325
- [32] Osterbrock, D.E., & Ferland, G.J., *Astrophysics of Gaseous Nebulae and Active Galactic Nuclei*, University Science Books, 2005
- [33] Peebles, P. J. E., & Wilkinson, D. T., 1968, Physical Review, 174, 2168
- [34] Peebles, P. J. E. <http://arxiv.org/pdf/1310.2146.pdf>
- [35] Penzias, A. A., & Wilson, R. W., 1965, ApJ, 142, 419
- [36] Peraiah, A., *An introduction to radiative transfer*, Cambridge University Press, 2012
- [37] Pettini, M., Smith, L. J., Hunstead, R. W., & King, D. L. 1994, ApJ, 426, 79
- [38] Pierrard, V., & Lazar, M., 2010, Solar Physics, 267, 153
- [39] Planck Collaboration, 2011, A&A, 536, 6
- [40] Planck Collaboration, 2015, A&A, 576, 106
- [41] Planck Collaboration, 2015, arXiv :1502.01582
- [42] Rybicki, G. B., & Hummer, D. G. 1991, A&A, 245, 171
- [43] Rybicki, G. B., Lightman, A. P., *Radiative Processes in Astrophysics*, New York : Wiley, 1985
- [44] Schödel, R., Ott, T., Genzel, R., et al. 2002, Nature, 419, 694
- [45] Shu, F. H., *The Physics of Astrophysics. Volume I : Radiation*, USB, 2010
- [46] Sing, D. K. et al., 2009, A&A, 505, 891
- [47] Spitzer, L., *Physical Processes in the Interstellar Medium*, New York : Wiley, 1978
- [48] Tielens, A.G.G.M, *The Physics and Chemistry of the Interstellar Medium*, Cambridge University Press, 2012
- [49] Van der Tak, F., et al., 2007, A&A468, 627
- [50] Weaver H., Dieter N.H., Williams D.R.W., Lum W.T., 1965, Nature, 208, 29
- [51] Westmeier, T., Jurek, R., Obreschkow, D., Koribalski, B.S., & Staveley-Smith, L., 2014, MNRAS, 438, 1176

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Le spectre électromagnétique . . . . .	3
1.2	L'information portée par le rayonnement . . . . .	7
1.2.1	Distribution spatiale . . . . .	7
1.2.2	Distribution spectrale . . . . .	7
1.2.3	Polarisation . . . . .	8
1.2.4	Variabilité temporelle . . . . .	9
1.3	Pourquoi s'intéresser au transfert de rayonnement ? . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Les grandeurs photométriques</b>	<b>14</b>
2.1	L'intensité spécifique . . . . .	14
2.1.1	Définition . . . . .	14
2.1.2	Polarisation et variabilité temporelle . . . . .	15
2.1.3	Unités et grandeurs associées . . . . .	15
2.1.4	Description corpusculaire . . . . .	16
2.1.5	Relation entre $I_\lambda$ et $I_\nu$ . . . . .	17
2.1.6	Conservation de l'intensité spécifique dans le vide . . . . .	18
2.1.7	Écriture différentielle de la conservation de l'intensité dans le vide . . . . .	19
2.1.8	Exemples . . . . .	19
2.1.9	Champ de rayonnement présentant la symétrie axiale . . . . .	20
2.2	L'intensité moyenne . . . . .	20
2.3	La densité spectrale et volumique d'énergie . . . . .	21
2.4	La densité spectrale de flux et grandeurs associées . . . . .	21
2.4.1	Densité spectrale de flux . . . . .	21
2.4.2	Flux total . . . . .	22
2.4.3	Flux entrant et flux sortant . . . . .	22
2.4.4	Éclairement, émittance, exitance . . . . .	23
2.4.5	Décroissance du flux avec la distance . . . . .	23
2.5	La pression de radiation . . . . .	24
2.5.1	Tenseur de densité spectrale de pression radiative . . . . .	26
2.6	Modèles de la distribution angulaire du rayonnement . . . . .	26
2.6.1	Modèle isotrope . . . . .	26
2.6.2	Modèle semi-isotrope . . . . .	27
2.6.3	Modèle linéaire en $\mu$ . . . . .	27

2.6.4	Modèle à deux faisceaux . . . . .	28
2.7	Information contenue dans les moments . . . . .	29
2.8	Magnitudes . . . . .	30
2.8.1	Magnitude monochromatique . . . . .	30
2.8.2	Magnitude bolométrique . . . . .	30
2.8.3	Couleur et extinction . . . . .	31
<b>3</b>	<b>L'équation du transfert</b> . . . . .	<b>32</b>
3.1	Transfert de rayonnement sans diffusion . . . . .	32
3.1.1	Section efficace, coefficient d'absorption, épaisseur optique . . . . .	32
3.1.2	Émissivité . . . . .	33
3.1.3	Équation du transfert sans diffusion . . . . .	34
3.1.4	Résolution de l'équation du transfert . . . . .	34
3.1.5	Fonction source . . . . .	35
3.1.6	Solution formelle dans un milieu purement absorbant . . . . .	36
3.1.7	Solution formelle dans un milieu absorbant et émissif . . . . .	36
3.1.8	Convention "observateur" et convention "modélisateur" . . . . .	37
3.1.9	Équation du transfert en géométrie plan-parallèle . . . . .	38
3.1.10	Équation du transfert en géométrie sphérique . . . . .	43
3.2	Transfert de rayonnement avec diffusion . . . . .	44
3.2.1	Phénomènes de diffusion . . . . .	44
3.2.2	Équation du transfert en présence de diffusion . . . . .	45
3.2.3	Approximation d'Eddington . . . . .	47
3.2.4	Interprétation probabiliste de la diffusion . . . . .	48
<b>4</b>	<b>L'équilibre thermodynamique</b> . . . . .	<b>50</b>
4.1	Rayonnement de corps noir . . . . .	50
4.1.1	Loi de Kirchhoff . . . . .	50
4.1.2	Loi de Planck . . . . .	52
4.1.3	Loi de déplacement de Wien . . . . .	54
4.1.4	Loi de Stefan . . . . .	58
4.1.5	Loi de Rayleigh-Jeans et loi de Wien . . . . .	59
4.1.6	Températures caractéristiques . . . . .	60
4.2	Exemples de corps noir et d'émissions thermiques . . . . .	61
4.2.1	Rayonnement du fond diffus cosmologique . . . . .	61
4.2.2	Émission thermique et température des grains interstellaires . . . . .	63
4.2.3	Planètes ou objets interplanétaires. Effet de serre . . . . .	65
4.3	Lois relatives à la matière . . . . .	67
4.3.1	Distribution de Maxwell . . . . .	67
4.3.2	Distribution de Boltzmann . . . . .	68
4.3.3	Loi de Saha . . . . .	69
4.3.4	Application de la loi de Saha à un plasma d'hydrogène . . . . .	70
4.4	Thermodynamique d'un mélange gaz-rayonnement . . . . .	73
4.4.1	Cas d'un gaz parfait neutre . . . . .	73
4.4.2	Cas d'un gaz d'hydrogène ionisé . . . . .	75
4.5	Développements au voisinage de l'équilibre . . . . .	75
4.5.1	Approximation de diffusion pour le rayonnement . . . . .	75
4.5.2	Méthode de Chapman-Enskog pour la matière . . . . .	78

<b>5</b>	<b>Les raies spectrales</b>	<b>81</b>
5.1	Coefficients d'Einstein	81
5.1.1	Absorption, émission spontanée, émission stimulée	81
5.1.2	Relations d'Einstein	82
5.1.3	Remarques	83
5.2	Emissivité, coefficient d'absorption, fonction source	84
5.2.1	Lien avec les coefficients d'Einstein	84
5.2.2	Fonction source	85
5.2.3	Coefficient d'absorption dans la raie	85
5.2.4	Remarques	86
5.3	Profil des raies	86
5.3.1	Élargissement Doppler thermique	87
5.3.2	Élargissement Doppler turbulent	87
5.3.3	Élargissement naturel	89
5.3.4	Élargissement par collisions	91
5.3.5	Causes multiples d'élargissement	92
5.3.6	Profil de Voigt	93
5.4	Courbes de croissance	94
5.4.1	Modèle de la couche absorbante	94
5.4.2	Observation d'une raie	95
5.4.3	Largeur équivalente	96
5.4.4	Profils d'absorption	98
5.4.5	Courbes de croissance	99
5.5	Exemples de raies d'origine astrophysique	101
5.5.1	La raie à 21 cm de l'hydrogène atomique neutre en émission	101
5.5.2	Les raies moléculaires en absorption	103
<b>6</b>	<b>Les transitions collisionnelles et les écarts à l'ETL</b>	<b>108</b>
6.1	Transitions collisionnelles	108
6.2	Coefficients d'excitation et désexcitation collisionnelles	109
6.2.1	Définition des coefficients	109
6.2.2	Remarques	109
6.2.3	Lien avec les sections efficaces	110
6.2.4	Relation entre $C_{lu}$ et $C_{ul}$	112
6.2.5	Bilan détaillé	112
6.3	Équilibre statistique des niveaux	113
6.3.1	Équilibre statistique d'un système à deux niveaux	113
6.3.2	Fonction source	113
6.3.3	Influence des autres niveaux et du continuum	114
6.3.4	Écriture aux basses fréquences	114
6.4	Exemple : retour sur la raie à 21 cm du gaz HI	114
6.4.1	Raie formée à l'ETL	114
6.4.2	Raie en absorption et en émission	115
6.5	Probabilité d'échappement et approximation de Sobolev	116
6.5.1	Échappement dans l'espace des vitesses	116
6.5.2	Approximation LVG	117
6.5.3	Rayonnement émergent	118
6.5.4	Probabilité d'échappement	119
6.5.5	Conditions d'établissement de l'ETL	119

<b>7</b>	<b>Les processus de photo-ionisation et de recombinaison</b>	<b>121</b>
7.1	Absorption et émission libre-lié	121
7.1.1	Les relations d'Einstein-Milne	121
7.1.2	Section efficace, coefficient d'absorption et émissivité	122
7.2	Équilibre d'ionisation d'une région HII	123
7.2.1	Rappels sur les états électroniques de l'hydrogène	124
7.2.2	Photo-ionisation de l'hydrogène neutre, limite de Lyman	124
7.2.3	Recombinaison	127
7.2.4	Libre parcours moyen des photons	128
7.2.5	Rayon de Strömgren	128
7.2.6	Structure d'ionisation de la région HII	129
7.2.7	Coefficient de recombinaison	130
7.2.8	Température et pression de la région HII	131
7.3	Raies des nébuleuses ionisées	131
7.3.1	Raies permises	132
7.3.2	Raies interdites	135
<b>8</b>	<b>Le rayonnement d'une charge en mouvement</b>	<b>136</b>
8.1	Rappels d'électrodynamique classique	136
8.1.1	Équations de Maxwell	136
8.1.2	Force de Lorentz	137
8.1.3	Théorème de Poynting	137
8.1.4	Ondes électromagnétiques dans le vide	137
8.1.5	Potentiels	139
8.1.6	Potentiels retardés	139
8.1.7	Potentiels de Liénard-Wiechert	140
8.2	Développement multipolaire	140
8.2.1	Écriture des potentiels et des champs en champ lointain	140
8.2.2	Rayonnement dipolaire	141
8.2.3	Rayonnement quadrupolaire électrique et dipolaire magnétique	142
8.3	Modèle de Thomson	143
8.3.1	Équation du mouvement, coefficient d'amortissement	143
8.3.2	Section efficace de diffusion	143
8.3.3	Cas limites	143
8.4	Émission free-free	144
8.4.1	Collision électron-ion	144
8.4.2	Puissance émise par une interaction seule	145
8.4.3	Émissivité free-free	145
8.4.4	Coefficient d'absorption free-free et profondeur optique	146
8.4.5	Densité spectrale de flux	146
<b>9</b>	<b>Les méthodes numériques de résolution du transfert</b>	<b>147</b>
9.1	Cas d'école	147
9.2	Algorithme d'intégration de l'équation du transfert	147
9.2.1	Introduction	147
9.2.2	Intégration d'ordre 1	148
9.2.3	Intégration d'ordre 2	149
9.2.4	Intégration d'ordre 3	150
9.2.5	Conditions de bord	150
9.2.6	Cas 2D et 3D	151
9.2.7	Résolution spatiale	152
9.3	La difficulté du transfert radiatif	152

9.3.1	Diffusions multiples . . . . .	152
9.3.2	Approximation de diffusion unique . . . . .	153
9.3.3	Prise en compte de l'absorption et de l'émission . . . . .	154
9.4	Méthodes Monte-Carlo . . . . .	155
9.4.1	Principe . . . . .	155
9.4.2	Libre parcours . . . . .	155
9.4.3	Diffusion . . . . .	156
9.4.4	Paquets de photons . . . . .	156
9.4.5	Comment faire une image? . . . . .	157
9.5	Itération Lambda (LI) et itération Lambda accélérée (ALI) . . . . .	157
9.5.1	Principe . . . . .	158
9.5.2	Convergence . . . . .	158
9.5.3	Opérateur $\Lambda$ . . . . .	158
9.5.4	Exemple LI à une dimension . . . . .	159
9.5.5	Écriture matricielle de l'itération Lambda . . . . .	159
9.5.6	Itération Lambda accélérée (ALI) . . . . .	160
9.5.7	Choix de l'opérateur approché . . . . .	161
9.5.8	Exemple ALI à une dimension . . . . .	162
9.5.9	Convergence des algorithmes LI et ALI . . . . .	162
9.5.10	Accélération Ng . . . . .	163
9.5.11	De la nécessité de l'intégration d'ordre 3 . . . . .	163
9.5.12	Le cas des raies spectrales . . . . .	165
9.6	Méthode de moments . . . . .	167
9.6.1	Principe . . . . .	167
9.6.2	Approximation d'Eddington . . . . .	168
9.6.3	Méthode VET . . . . .	168