

Chapitre 4

Raies spectrales

4.1 Préambule

Le rayonnement de corps noir vu au chapitre 3 présente un spectre continu, c'est-à-dire que les variations de I_ν avec la fréquence ν sont lentes. Il en va de même pour d'autres processus d'émission, comme le rayonnement cyclo-synchrotron ou le rayonnement de freinage (*Bremsstrahlung*). Il est cependant connu depuis le milieu du XVIII^e siècle que de fortes variations de I_ν sur une très petite plage de fréquences peuvent exister. Ces *raies spectrales*, en émission ou en absorption, sont observées dans le visible et en UV dans les spectres des étoiles et des nébuleuses ionisées, mais également dans le domaine radio en direction des nuages interstellaires, ou encore dans le domaine X en direction de régions très chaudes comme le gaz des amas de galaxies.

Ces raies sont liées au caractère discret des niveaux d'énergie dans les systèmes quantiques (atomes, ions et molécules). On ne discutera pas cet aspect ici, et on supposera connus les principaux résultats de la mécanique quantique sur lesquels s'appuie la spectroscopie (règles de sélection, nombres quantiques, poids statistiques). Rappelons simplement que les raies spectrales correspondent à des transitions d'un système quantique entre deux niveaux discrets (on parle de transition lié-lié), tandis que le rayonnement continu fait intervenir un continuum en énergie de ce système (transitions libre-lié et libre-libre). Pour les transitions libre-lié, on consultera les compléments de ce chapitre.

Si les niveaux d'énergie sont discrets, il n'en reste pas moins que les raies ne sont pas infiniment fines : elles présentent une distribution d'intensité, qu'on nomme *profil* de la raie, autour d'une fréquence centrale. On dit qu'elles sont élargies, et cet élargissement est le résultat de divers processus. L'objet de ce chapitre est en particulier de discuter la fonction source et le profil des raies, et de comprendre quelle information on peut en tirer sur la physique du milieu émetteur ou absorbant.

4.2 Coefficients d'Einstein

4.2.1 Absorption, émission spontanée, émission stimulée

Considérons, pour simplifier, un système à deux niveaux infiniment fins u (pour *upper*) et l (pour *lower*) d'énergies respectives E_u et E_l , avec donc $E_u > E_l$. On note g_u et g_l les poids statistiques de ces niveaux, n_u et n_l leurs populations, c'est-à-dire le nombre de particules par unité de volume dans chacun des deux niveaux possibles. La transition d'un niveau à l'autre¹ se fait via l'émission

1. On ignore ici les transitions collisionnelles discutées au chapitre 5.

(dans le cas $u \rightarrow l$) ou l'absorption (dans le cas $l \rightarrow u$) d'un photon de fréquence

$$\nu_{ul} = \frac{E_u - E_l}{h}$$

La loi de Kirchhoff $\epsilon_\nu = \kappa_\nu B_\nu(T)$, valable dans le cas particulier de l'émission thermique, implique que les processus d'émission (ϵ_ν) et d'absorption (κ_ν) sont reliés à l'échelle microscopique. Einstein a découvert cette relation en identifiant trois processus par lesquels un système atomique et un champ de rayonnement peuvent être couplés : l'absorption, l'émission spontanée, et l'émission stimulée (ou induite).

Émission spontanée

Ce processus a lieu lorsqu'un atome sur le niveau u descend spontanément sur le niveau l , en émettant un photon de fréquence ν_{ul} . Ce processus a lieu indépendamment de la présence ou non d'un champ de rayonnement, et est caractérisé par le coefficient A_{ul} , dit *coefficient d'Einstein d'émission spontanée*, défini comme étant la probabilité par unité de temps qu'un atome sur le niveau u subisse une transition d'émission spontanée. Le coefficient A_{ul} est donc exprimé en s^{-1} .

Absorption

Ce processus a lieu lorsqu'un atome sur le niveau l absorbe un photon de fréquence ν_{ul} , de sorte que l'énergie $h\nu_{ul}$ lui permette de passer sur le niveau supérieur u . Ce processus nécessite évidemment la présence d'un champ de rayonnement à ν_{ul} , et est caractérisé par un coefficient B_{lu} , dit *coefficient d'Einstein d'absorption*. La définition de ce coefficient en termes de probabilité de transition par unité de temps fait intervenir le champ de rayonnement via son intensité moyenne

$$J_{\nu_{ul}} = \frac{1}{4\pi} \int I_{\nu_{ul}} d\Omega$$

La manière la plus simple de procéder à cette définition est d'écrire que la probabilité par unité de temps qu'un atome sur le niveau l absorbe un photon est $B_{lu}J_{\nu_{ul}}$, donc proportionnelle au nombre de photons de fréquence ν_{ul} .

Émission stimulée

Comme nous allons le voir, Einstein a été amené à supposer qu'il existait un troisième processus en jeu, l'émission stimulée (appelée aussi émission induite), par le biais duquel un atome sur le niveau u descend sur le niveau l en émettant un photon de fréquence ν_{ul} , comme pour l'émission spontanée, mais dont la probabilité est cette fois proportionnelle au champ de rayonnement. Ce processus est donc caractérisé par un coefficient B_{ul} , dit *coefficient d'Einstein d'émission stimulée*, tel que la probabilité par unité de temps qu'un atome sur le niveau u subisse un processus d'émission stimulée est $B_{ul}J_{\nu_{ul}}$. Notons que le photon émis est en tous points identique à celui qui a stimulé la transition.

4.2.2 Relations d'Einstein

Les coefficients d'Einstein ainsi définis décrivent des processus élémentaires au niveau quantique. Ils ne préjugent en rien de l'état statistique macroscopique d'un système contenant un grand nombre de particules. Il est donc possible de faire une hypothèse sur cet état macroscopique et d'en tirer des relations entre les coefficients qui seront valables en toutes circonstances. Plaçons-nous donc dans le cas particulier de l'équilibre thermodynamique d'un grand nombre de systèmes quantiques identiques à celui utilisé plus haut pour définir les coefficients d'Einstein. Il est évident que le nombre de transitions $u \rightarrow l$ par unité de volume et par unité de temps doit être exactement

égal au nombre de transitions $l \rightarrow u$ par unité de volume et par unité de temps, puisqu'on est à l'équilibre statistique. On peut donc écrire

$$n_u B_{ul} J_{\nu_{ul}} + n_u A_{ul} = n_l B_{lu} J_{\nu_{ul}}$$

On en déduit l'expression de l'intensité moyenne à la fréquence de la transition en fonction des populations des niveaux et des coefficients d'Einstein :

$$J_{\nu_{ul}} = \frac{n_u A_{ul}}{n_l B_{lu} - n_u B_{ul}} = \frac{\frac{A_{ul}}{B_{ul}}}{\frac{n_l}{n_u} \frac{B_{lu}}{B_{ul}} - 1}$$

Or, à l'équilibre thermodynamique à la température T , on a la relation de Boltzmann entre les populations des niveaux :

$$\frac{n_u}{n_l} = \frac{g_u}{g_l} \exp\left(-\frac{h\nu_{ul}}{kT}\right)$$

Donc l'intensité moyenne à la fréquence ν_{ul} s'écrit

$$J_{\nu_{ul}} = \frac{\frac{A_{ul}}{B_{ul}}}{\frac{B_{lu}}{B_{ul}} \frac{g_l}{g_u} \exp\left(\frac{h\nu_{ul}}{kT}\right) - 1}$$

Mais cette intensité moyenne, dans le cas de l'équilibre thermodynamique du rayonnement à la température T s'écrit aussi

$$J_{\nu_{ul}} = \frac{1}{4\pi} \int I_{\nu_{ul}} d\Omega = I_{\nu_{ul}} = B_{\nu_{ul}}(T) = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu_{ul}}{kT}\right) - 1}$$

Considérant que ces deux écritures doivent être identiques à toutes les températures, on est amené aux *relations d'Einstein* entre les coefficients A_{ul} , B_{ul} et B_{lu} :

$$\begin{aligned} g_l B_{lu} &= g_u B_{ul} \\ \frac{A_{ul}}{B_{ul}} &= \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} \end{aligned}$$

Ces relations lient les coefficients d'Einstein entre eux et ne font aucune référence à la température T , contrairement à la loi de Kirchhoff. Ce sont des relations valables même en dehors de l'équilibre thermodynamique qui nous a servi à les établir. On peut les voir comme des extensions de la loi de Kirchhoff aux cas (fréquents en astrophysique) où l'équilibre thermodynamique n'est pas réalisé. Elles traduisent des relations d'équilibre détaillé entre processus microscopiques. Remarquons aussi qu'il suffit de connaître un seul des coefficients d'Einstein pour déterminer les deux autres. Des tables spectroscopiques² donnent les valeurs de A_{ul} , des poids statistiques et des énergies des niveaux impliqués dans de nombreuses transitions. Pour donner un ordre de grandeur, on a $A_{ul} \sim 10^8 \text{ s}^{-1}$ pour des raies dites *permises*. Pour les transitions dites *interdites*, ces valeurs sont beaucoup plus faibles (on verra l'exemple de la raie HI à 21 cm, pour laquelle $A_{ul} = 2.85 \cdot 10^{-15} \text{ s}^{-1}$).

2. Par exemple LAMDA : <http://home.strw.leidenuniv.nl/~moldata/>. À titre d'exemple, quelques lignes du fichier correspondant aux transitions rotationnelles de l'espèce $^{12}\text{C}^{16}\text{O}$ sont reproduites sur la Fig. 4.1.

```

!MOLECULE!
CO!
!MOLECULAR WEIGHT!
28.0!
!NUMBER OF ENERGY LEVELS!
41!
!LEVEL + ENERGIES (cm^-1) + WEIGHT + J!
  1      0.000000000!    1.0!    0!
  2      3.845033413!    3.0!    1!
  3     11.534919938!    5.0!    2!
  4     23.069512649!    7.0!    3!
  5     38.448164669!    9.0!    4!
  6     57.670329083!   11.0!    5!
[.....]!
!NUMBER OF RADIATIVE TRANSITIONS!
40!
!TRANS + UP + LOW + EINSTEINA (s^-1) + FREQ (GHz) + E_u (K) !
  1      2      1    7.203e-08    115.2712018    5.53!
  2      3      2    6.910e-07    230.5380000    16.60!
  3      4      3    2.497e-06    345.7959899    33.19!
  4      5      4    6.126e-06    461.0407682    55.32!
  5      6      5    1.221e-05    576.2679305    82.97!
  6      7      6    2.137e-05    691.4730763   116.16!
  7      8      7    3.422e-05    806.6518060   154.87

```

FIGURE 4.1 – Extrait d'un fichier de LAMDA (ici pour les transitions rotationnelles de $^{12}\text{C}^{16}\text{O}$) donnant notamment les niveaux d'énergie et les coefficients d'Einstein d'émission spontanée A_{ul} .

4.2.3 Remarques

Nécessité de l'émission stimulée

Imaginons qu'Einstein n'ait pas introduit le processus d'émission stimulée. Dans la même hypothèse d'équilibre thermodynamique, on serait amené à écrire l'intensité moyenne à la fréquence de transition comme

$$J_{\nu_{ul}} = \frac{n_u A_{ul}}{n_l B_{lu}} = \frac{A_{ul} g_u}{B_{lu} g_l} \exp\left(-\frac{h\nu_{ul}}{kT}\right) = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu_{ul}}{kT}\right)$$

qui n'est autre que la loi de Wien, dont Einstein savait qu'elle n'était pas correcte à toutes les fréquences. Remarquons que le fait qu'on retrouve la loi de Wien dans le cas de l'équilibre thermodynamique en négligeant l'émission stimulée correspond au fait que pour $h\nu_{ul} \gg kT$, on a $n_u \ll n_l$, de sorte que l'émission stimulée ($\propto n_u$) est effectivement négligeable devant l'absorption ($\propto n_l$). En effet, comme $g_u \sim g_l$, on a $B_{ul} \sim B_{lu}$ et donc $n_u B_{ul} \ll n_l B_{lu}$.

Prise en compte du profil de la raie

Comme on l'a déjà mentionné, les niveaux d'énergie ne sont pas infiniment étroits, de sorte que le rayonnement associé aux transitions $u \rightarrow l$ et $l \rightarrow u$ a une certaine distribution en fréquence, qu'on caractérise par un profil $\phi(\nu)$ normalisé, soit

$$\int_0^\infty \phi(\nu) d\nu = 1$$

Le profil ϕ a donc la dimension de l'inverse d'une fréquence, et sa valeur n'est sensiblement différente de zéro que sur une petite plage de fréquences $\Delta\nu$ autour de ν_{ul} . Les définitions des coefficients d'Einstein doivent en toute rigueur faire apparaître ce profil, puisqu'il représente l'efficacité relative de chaque fréquence (à l'intérieur de la raie) à participer aux processus d'absorption et d'émission stimulée. On définit alors B_{lu} et B_{ul} en écrivant que les probabilités de transitions par unité de temps associées sont

$$B_{lu}\bar{J} = B_{lu} \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu) d\nu \quad \text{et} \quad B_{ul}\bar{J} = B_{ul} \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu) d\nu$$

Remarquons que si J_ν varie peu sur la plage $\Delta\nu$, on a sensiblement

$$\bar{J} = \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu) d\nu \simeq \int_0^\infty J_\nu \delta(\nu - \nu_{ul}) d\nu = J_{\nu_{ul}}$$

La dérivation faite à l'origine par Einstein faisait d'ailleurs cette hypothèse implicitement. Cette précision ne change pas les relations d'Einstein dès lors que $B_\nu(T)$ ne varie pas appréciablement sur la plage $\Delta\nu$, car on a alors

$$\bar{J} = \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu) d\nu = \int_0^\infty B_\nu(T) \phi(\nu) d\nu \simeq \int_0^\infty B_\nu(T) \delta(\nu - \nu_{ul}) d\nu = B_{\nu_{ul}}(T)$$

à l'équilibre thermodynamique. Plus précisément, on peut écrire

$$J_\nu = B_\nu(T) \simeq B_{\nu_{ul}}(T) + (\nu - \nu_{ul}) \left. \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial \nu} \right|_{\nu=\nu_{ul}}$$

en faisant un développement de Taylor au premier ordre, ce qui donne

$$\bar{J} = \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu) d\nu = B_{\nu_{ul}}(T) + \left. \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial \nu} \right|_{\nu=\nu_{ul}} \int_0^\infty (\nu - \nu_{ul}) \phi(\nu) d\nu$$

où le second terme peut être négligé lorsque $\phi(\nu) \simeq \delta(\nu - \nu_{ul})$. Il est d'ailleurs nul dès lors que le profil ϕ est symétrique par rapport à ν_{ul} .

Définition en termes de la densité d'énergie du rayonnement

Il est également possible de définir B_{lu} et B_{ul} non pas en termes de l'intensité moyenne, mais de la densité d'énergie du rayonnement. On écrit alors les probabilités d'absorption et d'émission stimulée par unité de temps sous la forme

$$B_{lu}\bar{u} = B_{lu} \int_0^\infty u_\nu \phi(\nu) d\nu \quad \text{et} \quad B_{ul}\bar{u} = B_{ul} \int_0^\infty u_\nu \phi(\nu) d\nu$$

Comme l'intensité moyenne et la densité spectrale et volumique d'énergie sont reliées par³

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu$$

les relations d'Einstein entre coefficients ainsi définis deviennent

$$g_u B_{ul} = g_l B_{lu} \quad \text{et} \quad \frac{A_{ul}}{B_{ul}} = \frac{8\pi h \nu_{ul}^3}{c^3}$$

Certains ouvrages utilisant cette définition des coefficients d'Einstein, il est important d'être conscient de cette différence.

4.3 Emissivité, coefficient d'absorption, fonction source

4.3.1 Lien avec les coefficients d'Einstein

La variation de la population du niveau inférieur est donnée par la combinaison des processus d'absorption, d'émission induite et d'émission spontanée

$$\frac{dn_l}{dt} = A_{ul}n_u + B_{ul}n_u\bar{J} - B_{lu}n_l\bar{J}$$

On a obtenu les relations d'Einstein en commençant par écrire que le membre de droite était nul à l'équilibre, mais on peut les utiliser dans le cas général exprimé par cette équation bilan pour la matière. Pour ce qui est du rayonnement, considérons la variation de l'intensité spécifique I_ν le long d'un rayon lumineux (repéré par une abscisse s). Celle ci peut se mettre sous la forme

$$\frac{dI_\nu}{ds} = A + S + E$$

où $ds = c dt$ et où les trois termes du membre de droite correspondent respectivement à l'absorption (A), l'émission induite (S) et l'émission spontanée (E).

On se place dans le cadre d'une hypothèse d'isotropie locale du rayonnement. Dans ce cas, l'équation ci-dessus prend la forme⁴

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \frac{h\nu c}{4\pi} \frac{dn_\nu}{ds} = \frac{h\nu}{4\pi} \frac{dn_\nu}{dt} = E + A + S$$

et s'écrit donc comme un bilan sur le nombre de photons de fréquence ν à $d\nu$ près dans le champ de rayonnement. On peut alors calculer E , A et S en reliant la variation de n_ν à celles des populations des niveaux pour chacun de ces processus, qui sont liées entre elles par les coefficients d'Einstein.

Considérons tout d'abord l'émission spontanée (E) : chaque événement de ce type provoque l'apparition d'un photon et une désexcitation $u \rightarrow l$. En termes du coefficient A_{ul} , on a

$$\left. \frac{dn_l}{dt} \right|_E = A_{ul}n_u$$

3. Cette relation est valable même dans le cas anisotrope.

4. On ignore ici la diffusion, qui ne modifie pas l'état de la matière, lorsqu'elle est cohérente.

Cependant, il convient de remarquer que cette équation tient compte de *toutes* les transitions de type émission spontanée de u vers l , alors que l'énergie libérée dans cette désexcitation - et qui est celle du photon émis - n'est pas exactement $h\nu_{ul}$, mais $h\nu \simeq h\nu_{ul}$, du fait de l'élargissement des niveaux. Autrement dit, elle est intégrée sur la fréquence. C'est donc l'intégrale sur la fréquence de la variation de n_ν associée à E qui est égale à la variation de population du niveau inférieur du fait de l'émission spontanée :

$$\int d\nu \left. \frac{dn_\nu}{dt} \right|_E = \left. \frac{dn_l}{dt} \right|_E = A_{ul}n_u = A_{ul}n_u \int \phi(\nu) d\nu = \int A_{ul}\phi(\nu)n_u d\nu$$

en remarquant que ni A_{ul} ni n_u ne dépendent de la fréquence exacte ν du photon émis. On a donc l'équation bilan sous forme intégrale :

$$\int d\nu \left[\left. \frac{dn_\nu}{dt} \right|_E - A_{ul}\phi(\nu)n_u \right] = 0$$

Physiquement, cela implique également la nullité de la quantité sous l'intégrale. En effet, la dépendance en fréquence de dn_ν/dt est par définition donnée par la fonction de profil $\phi(\nu)$:

$$\left. \frac{dn_\nu}{dt} \right|_E = k_E\phi(\nu) \Rightarrow 0 = \int d\nu \left[\left. \frac{dn_\nu}{dt} \right|_E - A_{ul}\phi(\nu)n_u \right] = [k_E - A_{ul}n_u] \int \phi(\nu) d\nu = k_E - A_{ul}n_u$$

On en déduit la probabilité d'émission spontanée par intervalle de fréquence

$$\left. \frac{dn_\nu}{dt} \right|_E = A_{ul}\phi(\nu)n_u \Rightarrow \left. \frac{dI_\nu}{ds} \right|_E = \frac{h\nu}{4\pi} \left. \frac{dn_\nu}{dt} \right|_E = \frac{h\nu}{4\pi} A_{ul}\phi(\nu)n_u$$

En définitive, le coefficient d'Einstein A_{ul} est donc "pondéré" par ϕ sur le profil de la raie. On peut faire la même chose pour l'absorption (A) et pour l'émission stimulée (S) :

$$\left. \frac{dn_\nu}{dt} \right|_A = -B_{lu}\phi(\nu)J_\nu n_l \Rightarrow \left. \frac{dI_\nu}{ds} \right|_A = \frac{h\nu}{4\pi} \left. \frac{dn_\nu}{dt} \right|_A = -\frac{h\nu}{4\pi} B_{lu}\phi(\nu)J_\nu n_l$$

$$\left. \frac{dn_\nu}{dt} \right|_S = B_{ul}\phi(\nu)J_\nu n_u \Rightarrow \left. \frac{dI_\nu}{ds} \right|_S = \frac{h\nu}{4\pi} \left. \frac{dn_\nu}{dt} \right|_S = \frac{h\nu}{4\pi} B_{ul}\phi(\nu)J_\nu n_u$$

Dans ces deux expressions, il convient de remarquer que l'intensité moyenne du rayonnement qui intervient est bien entendu J_ν , et non pas \bar{J} , puisque l'on considère des transitions à la fréquence exacte ν , interne au profil de la raie.

En sommant les trois contributions, on obtient :

$$\frac{dI_\nu}{ds} = A_{ul}n_u \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu) + B_{ul}n_u \frac{h\nu}{4\pi} J_\nu \phi(\nu) - B_{lu}n_l \frac{h\nu}{4\pi} J_\nu \phi(\nu)$$

On peut vérifier que cette équation est raisonnable en intégrant sur la fréquence pour obtenir la variation de la densité n de photons liés à cette transition :

$$\frac{dn}{dt} = \int d\nu \frac{dn_\nu}{dt} = \int d\nu [A_{ul}n_u + B_{ul}n_u J_\nu - B_{lu}n_l J_\nu] \phi(\nu) = A_{ul}n_u + B_{ul}n_u \bar{J} - B_{lu}n_l \bar{J} = \frac{dn_l}{dt}$$

ce qui est cohérent puisque le passage d'un atome ou d'une molécule de l'état u vers l'état l s'accompagne de l'émission d'un photon et qu'on a donc $dn = dn_l = -dn_u$.

Pour rapprocher cette équation de l'équation de transfert sans diffusion sous la forme usuelle

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \epsilon_\nu - \kappa_\nu I_\nu$$

on utilise à nouveau l'hypothèse d'isotropie locale du rayonnement pour remplacer J_ν par I_ν dans le membre de droite, de sorte que

$$\frac{dI_\nu}{ds} = A_{ul}n_u \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu) + B_{ul}n_u \frac{h\nu}{4\pi} I_\nu \phi(\nu) - B_{lu}n_l \frac{h\nu}{4\pi} I_\nu \phi(\nu)$$

et l'on en tire que

$$\epsilon_\nu = A_{ul}n_u \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu)$$

et

$$\kappa_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu) (B_{lu}n_l - B_{ul}n_u)$$

Il faut néanmoins remarquer qu'on a fait une hypothèse implicite dans le calcul, à savoir que le profil d'émission (apparaissant avec A_{ul}) est le même que le profil d'absorption (apparaissant avec B_{ul} et B_{lu}), ce qui n'est pas toujours le cas, notamment s'il y a un changement de fréquence entre les processus d'absorption et d'émission (exemple de la fluorescence). Dans le cas le plus général, on aura un profil ψ pour l'émission spontanée, ϕ pour l'absorption, et χ pour l'émission stimulée, auquel cas

$$\epsilon_\nu = A_{ul}n_u \frac{h\nu}{4\pi} \psi(\nu) \quad \text{et} \quad \kappa_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} [B_{lu}n_l \phi(\nu) - B_{ul}n_u \chi(\nu)].$$

4.3.2 Fonction source

La fonction source dans la raie est alors

$$S_\nu = \frac{\epsilon_\nu}{\kappa_\nu} = \frac{A_{ul}n_u \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu)}{\frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu) (B_{lu}n_l - B_{ul}n_u)} = \frac{A_{ul}n_u}{(B_{lu}n_l - B_{ul}n_u)} = \frac{\frac{A_{ul}}{B_{ul}}}{\left(\frac{B_{lu}n_l}{B_{ul}n_u} - 1\right)}$$

On remarque d'ores et déjà qu'elle ne dépend pas de la fréquence exacte ν , mais uniquement des coefficients d'Einstein de la transition et des populations des niveaux impliqués. Avec les relations d'Einstein, cela donne une forme semblable à une fonction de Planck

$$S_\nu = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} \frac{1}{\left(\frac{g_u n_l}{g_l n_u} - 1\right)}$$

On peut alors introduire la température d'excitation T_x définie au chapitre 3, dont on rappelle qu'elle est la température pour laquelle les populations n_u et n_l vérifient la statistique de Boltzmann. On rappelle également que, dans des milieux non thermalisés, T_x n'a pas de raison d'être identique à la température cinétique T , qu'il peut y avoir des températures d'excitations différentes pour différentes raies, et qu'elles peuvent varier d'un point à l'autre. Néanmoins, pour une raie unique à une position donnée, il est toujours possible de définir T_x .

$$\frac{n_u}{n_l} = \frac{g_u}{g_l} \exp\left(-\frac{\Delta E}{kT_x}\right) = \frac{g_u}{g_l} \exp\left(-\frac{h\nu_{ul}}{kT_x}\right)$$

On a alors la fonction source sous la forme

$$S_\nu = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu_{ul}}{kT_x}\right) - 1} = B_{\nu_{ul}}(T_x).$$

En supposant donc que les profils en émission et en absorption sont identiques, la fonction source est constante sur le profil de la raie⁵.

4.3.3 Coefficient d'absorption dans la raie

En revanche, l'émissivité monochromatique ϵ_ν et le coefficient d'absorption monochromatique κ_ν dépendent eux de la fréquence exacte ν . En particulier, on a, pour ce dernier,

$$\kappa_\nu = \frac{\epsilon_\nu}{S_\nu} = \frac{c^2}{2h\nu_{ul}^3} \left[\exp\left(\frac{h\nu_{ul}}{kT_x}\right) - 1 \right] \times A_{ul}n_u \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu) = \frac{c^2\nu}{8\pi\nu_{ul}^3} A_{ul}n_u \left[\exp\left(\frac{h\nu_{ul}}{kT_x}\right) - 1 \right] \phi(\nu)$$

qu'on met plus volontiers sous la forme suivante (car en général $n_l > n_u$ et de plus ce sont les particules sur le niveau inférieur qui sont susceptibles d'absorber.)

$$\kappa_\nu = \frac{c^2\nu}{8\pi\nu_{ul}^3} A_{ul}n_l \frac{g_u}{g_l} \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu_{ul}}{kT_x}\right) \right] \phi(\nu). \quad (4.1)$$

4.3.4 Remarques

Approximation de κ_ν

Remarquons que dans le cas de raies assez fines, ϕ n'est sensiblement différent de zéro qu'au voisinage de ν_{ul} , de sorte qu'on a

$$\kappa_\nu \simeq \frac{c^2}{8\pi\nu^2} A_{ul}n_l \frac{g_u}{g_l} \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT_x}\right) \right] \phi(\nu) \simeq \frac{c^2}{8\pi\nu_{ul}^2} A_{ul}n_l \frac{g_u}{g_l} \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu_{ul}}{kT_x}\right) \right] \phi(\nu)$$

Cette hypothèse est faite implicitement dans de nombreux ouvrages.

Effet MASER

Le coefficient d'absorption contient un terme négatif issu de l'émission stimulée. Ce terme est généralement petit dans l'UV et le visible (dans les atmosphères stellaires, par exemple, on a $T_x \sim 10^4$ K), mais il peut devenir important à basse fréquence. En particulier, la température d'excitation peut devenir négative dans certaines conditions pour lesquelles on observe une inversion de population, soit $n_u > n_l$ ⁶. Cela peut arriver s'il existe un troisième niveau, d'énergie plus élevée que les deux autres, facilement peuplé par différents mécanismes (collisions, rayonnement) et qui se désexcite plus vite sur le niveau u que sur le niveau l . Cet effet est observable dans de nombreuses sources radio, et est connu sous le nom de maser (pour *Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation*). L'effet net est que le coefficient d'absorption κ_ν devient négatif car le terme lié à l'émission induite devient plus grand que celui lié à l'absorption. Ceci traduit une amplification, parfois très forte, du signal. On observe cet effet notamment dans des raies de OH (découverte des masers astrophysiques en 1965, [43]), H₂O et SiO. Les températures de brillance observées sont souvent autour de 10^9 K et peuvent atteindre 10^{12} K voire 10^{14} K.

5. Dans le cas général de profils différents pour les différents processus, on a

$$S_\nu = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} \frac{\frac{\psi}{\phi}}{\exp\left(\frac{h\nu_{ul}}{kT_x}\right) - \frac{\chi}{\phi}}$$

qui peut dépendre fortement de la fréquence via les profils ϕ , ψ et χ .

6. Dans l'hypothèse simplificatrice $g_u = g_l$.

4.4 Profil des raies

Nous allons voir dans cette section les processus microscopiques et macroscopiques responsables de l'élargissement des raies spectrales, et comment l'étude de ces profils permet d'obtenir des informations sur les conditions physiques dans les milieux concernés.

4.4.1 Elargissement Doppler thermique

L'effet Doppler-Fizeau est le changement de fréquence apparente d'un photon émis par une particule en mouvement par rapport à l'observateur. Si l'on note ν_e la fréquence émise, mesurée dans un référentiel au repos par rapport à la particule, ν la fréquence observée et v_z la projection de la vitesse de la particule émettrice par rapport à l'observateur sur la ligne de visée ($v_z > 0$ pour une particule s'éloignant de l'observateur), on a

$$\frac{\nu}{\nu_e} = \sqrt{\frac{c - v_z}{c + v_z}}$$

Cette formule relativiste peut être simplifiée lorsque $v_z \ll c$. On a alors approximativement

$$\frac{\nu}{\nu_e} \simeq 1 - \frac{v_z}{c}$$

Faisons l'hypothèse que la raie est intrinsèquement infiniment fine, c'est-à-dire que la fréquence émise est exactement $\nu_e = \nu_{ul}$ pour toutes les particules émettrices du milieu, qu'on suppose à l'équilibre thermique à une température T . Ces particules sont donc soumises à l'agitation thermique, et leurs vitesses projetées se répartissent suivant une distribution de Maxwell :

$$f_{v_z}(v_z) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right)$$

où m est la masse des particules émettrices. La probabilité dP pour qu'une particule ait une vitesse projetée comprise entre v_z et $v_z + dv_z$ est alors $dP = f_{v_z}(v_z)dv_z$. Pour simplifier, on a supposé que la vitesse projetée est nulle en moyenne $\langle v_z \rangle = 0$. À une vitesse projetée donnée correspond une fréquence observée donnée par la formule de l'effet Doppler. Cette correspondance étant linéaire dans la limite non relativiste

$$v_z = c \left(1 - \frac{\nu}{\nu_{ul}}\right),$$

le profil $\phi(\nu)$ est donc directement lié à f_{v_z} par un changement de variable

$$\phi(\nu) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left[-\frac{mc^2}{2kT\nu_{ul}^2}(\nu - \nu_{ul})^2\right] \frac{c}{\nu_{ul}}$$

de sorte que

$$\phi(\nu)|d\nu| = f_{v_z}(v_z)|dv_z|$$

la normalisation étant ainsi assurée par celle de la distribution de Maxwell. On met habituellement ce résultat sous la forme

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} \exp\left[-\left(\frac{\nu - \nu_{ul}}{\Delta\nu_D}\right)^2\right] \quad (4.2)$$

en définissant la *largeur Doppler thermique*

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_{ul}}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

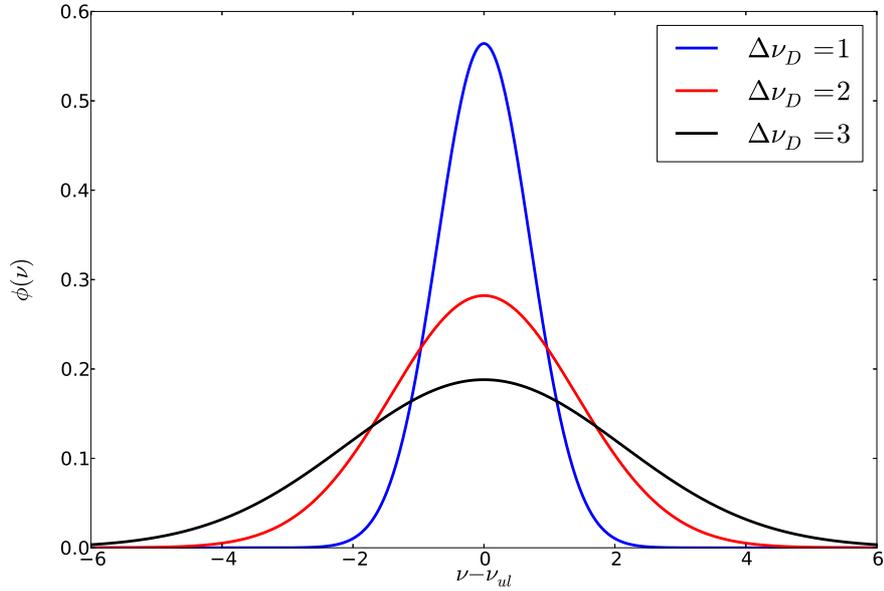


FIGURE 4.2 – Profils de Gauss (Eq. 4.2) pour $\Delta\nu_D = 1$ (bleu), $\Delta\nu_D = 2$ (rouge) et $\Delta\nu_D = 3$ (noir). Les unités de $\Delta\nu_D$ sont les mêmes que celles de l'axe $\nu - \nu_{ul}$.

Si la vitesse moyenne n'est pas nulle, $\langle v_z \rangle = v_0$, on montre sans difficulté que le profil Doppler thermique est centré sur la fréquence

$$\nu_0 = \nu_{ul} \left(1 - \frac{v_0}{c} \right)$$

et s'écrit

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} \exp \left[- \left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D} \right)^2 \right]$$

Le coefficient d'absorption s'écrit

$$\kappa_\nu = \frac{c^2\nu}{8\pi\nu_{ul}^3} A_{ul} n_l \frac{g_u}{g_l} \left[1 - \exp \left(- \frac{h\nu_{ul}}{kT_x} \right) \right] \phi(\nu) = \kappa_{\nu_0} \phi(\nu)$$

sa valeur κ_{ν_0} au centre de la raie s'écrit

$$\kappa_{\nu_0} = \frac{c^2}{8\pi\nu_0^2} A_{ul} n_l \frac{g_u}{g_l} \left[1 - \exp \left(- \frac{h\nu_0}{kT_x} \right) \right] \times \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D}$$

Il varie en $\Delta\nu_D^{-1}$. Toutes choses étant égales par ailleurs, une raie est donc d'autant plus intense en émission, ou profonde en absorption, que la distribution est étroite (ce qui correspond à un milieu froid). Voir la Fig. 4.2.

4.4.2 Elargissement Doppler turbulent

L'agitation thermique est loin d'être la seule cause d'élargissement Doppler des raies spectrales. En effet, le milieu responsable de la raie peut généralement être décrit par une approximation fluide,

et il est maintenant établi que de nombreux objets astrophysiques (le milieu interstellaire en est un exemple parfait) sont le siège de mouvements turbulents mésoscopiques.

Cela signifie que sur une ligne de visée donnée, chaque élément de longueur ds possède sa propre vitesse moyenne projetée $\langle v_z(s) \rangle = v_0(s)$, et le profil de la raie associé à cet élément est une Gaussienne centrée sur la fréquence

$$\nu_0(s) = \nu_{ul} \left[1 - \frac{v_0(s)}{c} \right]$$

On écrit ce profil sous la forme

$$\phi_t[\nu - \nu_0(s)] = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} \exp \left\{ - \left[\frac{\nu - \nu_0(s)}{\Delta\nu_D} \right]^2 \right\}$$

A priori, l'élargissement Doppler thermique $\Delta\nu_D$ est une fonction de la position s , via la température, qui peut être différente en différents points de la ligne de visée. Mais si l'on fait l'hypothèse que cette température est la même quelle que soit s , alors le profil résultant s'écrit

$$\phi(\nu) = \int_0^\infty \phi_t(\nu - \nu_0) f(\nu_0) d\nu_0$$

où $f(\nu_0)$ est la densité de probabilité des fréquences centrales associées aux mouvements turbulents, c'est-à-dire que $f(\nu_0)d\nu_0$ est la probabilité que la fréquence centrale en un point donné de la ligne de visée soit comprise entre ν_0 et $\nu_0 + d\nu_0$. On a donc un produit de convolution $\phi = \phi_t * f$. Ce résultat général prend une forme simple dans le cas où l'on fait l'hypothèse que la distribution des vitesses turbulentes est Maxwellienne⁷,

$$g(v_t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}b_t} \exp \left[- \left(\frac{v_t - v_0}{b_t} \right)^2 \right].$$

Dans ce cas, le profil ϕ est également une Gaussienne, de largeur

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_{ul}}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m} + b_t^2}$$

Cette formule permet, via la comparaison des largeurs de raies correspondant à différentes espèces sur une même ligne de visée, de déterminer si l'élargissement est dominé par l'agitation thermique ou par les mouvements turbulents. En effet, dans le premier cas, on a

$$\frac{\Delta\nu_D}{\nu_{ul}} \propto \frac{1}{\sqrt{m}}$$

alors que dans le second cas $\Delta\nu_D/\nu_{ul}$ est indépendant de la raie. En pratique, on constate qu'on est la plupart du temps dans ce second cas de figure, ce qui montre que l'élargissement turbulent est prépondérant.

Notons aussi que les mouvements d'ensemble du gaz provoquent eux aussi un élargissement des raies, comme on le verra plus tard.

Notons enfin qu'on parle souvent de la largeur à mi-hauteur (FWHM pour *Full-Width at Half-Maximum*), et on note que pour la forme Gaussienne, on a la relation (la démontrer en exercice)

$$\text{FWHM} = 2\sqrt{\ln 2}\Delta\nu_D \simeq 1.66\Delta\nu_D = \frac{\nu_{ul}}{c} \sqrt{8 \ln 2} \sigma_{v_z}$$

On rappelle que

$$\sigma_{v_z} = \sqrt{\frac{kT}{m}}.$$

7. On peut faire cette hypothèse lorsqu'il y a un grand nombre de cellules turbulentes sur la ligne de visée.

4.4.3 Elargissement naturel

Temps de vie des niveaux

Le principe d'incertitude d'Heisenberg indique que la largeur finie d'un niveau excité u est liée à la durée finie qu'une particule peut passer dans cet état. En notant δE_u la largeur du niveau u et τ_u son temps de vie, on a $\delta E_u \tau_u \simeq \hbar$. Or le temps de vie est relié aux coefficients d'Einstein. Imaginons en effet que nous placions une assemblée de particules sur l'état u , sans champ de rayonnement. La désexcitation des particules ne peut se faire que via le processus d'émission spontanée⁸. On a donc la variation de la population du niveau u sous la forme

$$\frac{dn_u}{dt} = - \sum_{l < u} A_{ul} n_u$$

en tenant compte de tous les niveaux l d'énergie inférieure à E_u . On en déduit une décroissance exponentielle de cette population

$$n_u(t) = n_u(0) e^{-t/\tau_u}$$

avec le temps caractéristique

$$\tau_u = \frac{1}{\sum_{l < u} A_{ul}}$$

Lorsqu'un champ de rayonnement est présent, ce temps caractéristique diminue⁹

$$\tau_u = \frac{1}{\sum_{l < u} (A_{ul} + B_{ul} \bar{J})} < \frac{1}{\sum_{l < u} A_{ul}}$$

Notons que ces écritures négligent le fait qu'en réalité, il peut y avoir des particules dans des états d'énergie $E_{u'}$ supérieure à E_u , ce qui complique l'analyse car la variation de n_u dépend des populations de ces niveaux (via l'émission spontanée et l'émission stimulée $u' \rightarrow u$).

Pour les transitions permises, A_{ul} est très grand (de l'ordre de 10^8 s^{-1}), de sorte que le temps de vie des niveaux supérieurs impliqués dans ces transitions sont très courts, et leur élargissement très important, de l'ordre de 10 MHz. Inversement, pour les transitions interdites, l'élargissement des niveaux supérieurs est très faible. On parle à leur propos de *niveaux métastables*.

Forces d'oscillateur

Dans une approche classique¹⁰ de l'interaction entre matière et rayonnement, on traite l'électron lié dans l'atome comme un oscillateur harmonique amorti soumis à une force excitatrice correspondant au rayonnement (modèle de Thomson). On montre alors que la section efficace d'interaction prend la forme

$$\sigma_\omega = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e c} \frac{\gamma \omega^2}{(\omega^2 - \omega_{ul}^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}$$

où γ est le coefficient d'amortissement

$$\gamma = \frac{e^2 \omega^2}{6\pi \epsilon_0 m_e c^3}$$

8. On suppose que la densité est suffisamment faible pour qu'il n'y ait pas de désexcitations collisionnelles.

9. L'absorption n'est pas à prendre en compte - au moins aux temps courts - puisqu'elle ne concerne pas les atomes sur le niveau excité.

10. En particulier, on ignore les transitions stimulées.

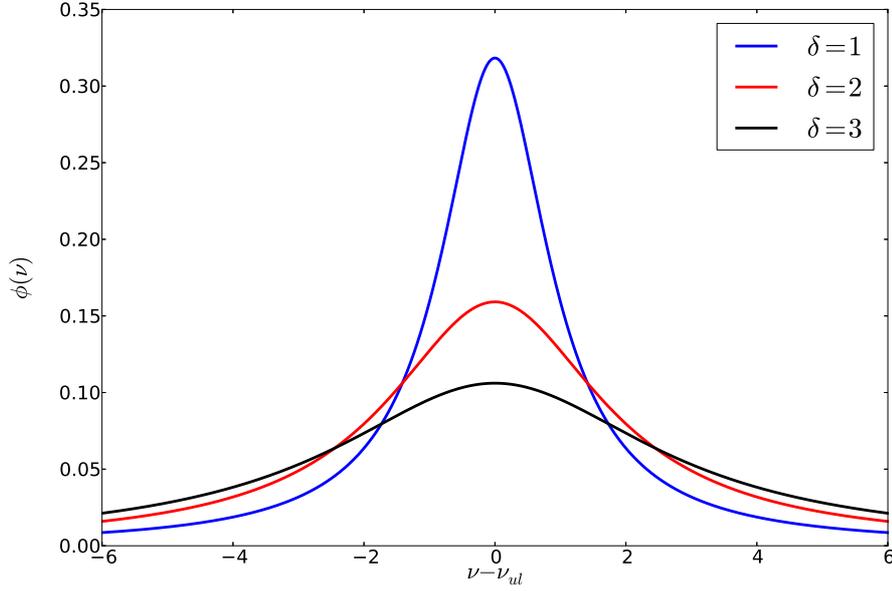


FIGURE 4.3 – Profils de Lorentz pour $\delta = 1$ (bleu), $\delta = 2$ (rouge) et $\delta = 3$ (noir). Les unités de δ sont les mêmes que celles de l'axe $\nu - \nu_{ul}$.

Dans ces expressions, m_e est la masse de l'électron et ω_{ul} est la pulsation de la transition considérée, autrement dit $\omega_{ul} = 2\pi\nu_{ul}$. Lorsqu'on se place au voisinage de la résonance, on a

$$\sigma_\omega = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e c} \frac{\gamma \omega^2}{[(\omega - \omega_{ul})(\omega + \omega_{ul})]^2 + \omega^2 \gamma^2} \simeq \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e c} \frac{\gamma \omega_{ul}^2}{[(\omega - \omega_{ul})2\omega_{ul}]^2 + \omega_{ul}^2 \gamma^2} = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e c} \frac{\gamma}{4(\omega - \omega_{ul})^2 + \gamma^2}$$

En fonction de la fréquence ν , la section efficace prend la forme suivante

$$\sigma_{\nu,a} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c} \frac{\delta}{\delta^2 + (\nu - \nu_{ul})^2}$$

où l'on a introduit $\delta = \gamma/(4\pi)$. Comme le coefficient d'absorption est lié à la section efficace par $\kappa_\nu = n_l \sigma_{\nu,a}$, on en déduit qu'il s'écrit alors sous la forme

$$\kappa_\nu = n_l \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c} \frac{\delta}{\delta^2 + (\nu - \nu_{ul})^2} = n_l \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} \phi(\nu)$$

où l'on a introduit le *profil Lorentzien* normalisé (représenté pour différentes valeurs de δ sur la Fig. 4.3)

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\pi} \frac{\delta}{\delta^2 + (\nu - \nu_{ul})^2} \quad \text{avec} \quad \int_0^\infty \phi(\nu) d\nu = 1$$

Il convient maintenant de rapprocher cette équation de (4.1), qu'on rappelle ici :

$$\kappa_\nu = \frac{c^2 \nu}{8\pi \nu_{ul}^3} A_{ul} n_l \frac{g_u}{g_l} \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu_{ul}}{kT_x}\right) \right] \phi(\nu)$$

Le terme entre crochet se réduit à l'unité lorsqu'on néglige l'émission stimulée (comme c'est le cas ici). On peut donc faire l'identification suivante

$$n_l \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} = \frac{c^2 \nu}{8\pi \nu_{ul}^3} A_{ul} n_l \frac{g_u}{g_l}$$

et en déduire l'expression classique du coefficient d'Einstein d'absorption

$$B_{lu} = \frac{g_u}{g_l} B_{ul} = \frac{g_u}{g_l} A_{ul} \frac{c^2}{2h\nu_{ul}^3} = \frac{\pi}{h\nu} \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e c}$$

Un calcul quantique donne un résultat identique, à un facteur correctif près appelé *force d'oscillateur* f_{ul} . On a alors

$$B_{lu} = \frac{\pi}{h\nu} \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e c} f_{ul}$$

Les forces d'oscillateurs sont $f_{ul} < 1$ et représentent le nombre d'oscillateurs classiques auquel on peut associer la transition considérée.

Profil naturel

Le profil Lorentzien mis en évidence ici s'écrit

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\pi} \frac{\delta}{\delta^2 + (\nu - \nu_{ul})^2} \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{1}{4\pi\tau_u} = \frac{\gamma_u}{4\pi}$$

où $\gamma_u = 1/\tau_u$ est la constante d'amortissement du niveau supérieur. Ce profil est donc lié au temps de vie fini du niveau supérieur de la transition, et très différent du profil Gaussien lié à l'effet Doppler : il décroît rapidement au centre de la raie, mais a des ailes beaucoup plus importantes, en $(\nu - \nu_{ul})^{-2}$. Sa largeur à mi-hauteur est 2δ , et il tend vers une distribution de Dirac lorsque $\delta \rightarrow 0$.

Remarquons que le profil Lorentzien en fonction de la pulsation s'écrit

$$\phi(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{\gamma_u}{2}}{\left(\frac{\gamma_u}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_{ul})^2}$$

et que cette écriture est la transformée de Fourier d'une fonction temporelle de la forme $e^{-\gamma_u t/2}$. Cela correspond à la décroissance du champ électrique rayonné. La décroissance de l'énergie rayonnée est alors en $e^{-\gamma_u t}$, ce qui correspond à l'évolution de la population du niveau supérieur n_u décrite au début de cette section.

4.4.4 Elargissement par collisions

Les interactions et collisions entre particules ont pour effet de provoquer des désexcitations supplémentaires, donc de réduire la durée de vie du niveau supérieur u . Cela implique un élargissement Lorentzien accru des raies faisant intervenir ce niveau. On peut traiter ces interactions suivant deux approches, dont la validité dépend des conditions physiques du milieu :

- Soit on considère les collisions individuellement, en supposant que la particule rayonnante n'est pas perturbée entre deux interactions, et que la durée d'une interaction est courte devant le temps moyen entre deux interactions.

- Soit on associe aux interactions un potentiel global effectif, fluctuant au cours du temps.

Pour obtenir un ordre de grandeur de la constante d'amortissement γ_{coll} liée aux collisions, on la relie à la durée moyenne τ_{coll} entre deux collisions

$$\gamma_{\text{coll}} \sim \frac{1}{\tau_{\text{coll}}} \sim n_p \pi r_p^2 v$$

en notant n_p la densité des particules perturbatrices, v leur vitesse relative par rapport à l'atome rayonnant, et r_p le rayon de l'interaction mise en jeu. La vitesse relative fait intervenir la température du milieu

$$v \sim \sqrt{kT \left(\frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_a} \right)}$$

avec m_p et m_a les masses respectives des particules perturbatrices et de l'atome rayonnant. Le potentiel d'interaction mis en jeu dépend de la nature des particules perturbatrices : on aura un potentiel de Van der Waals s'il s'agit par exemple d'atomes d'hydrogène neutre créant un potentiel dipolaire, et on aura un potentiel Coulombien dans le cas d'électrons ou d'ions.

Il est essentiel de noter que, contrairement à l'élargissement naturel, l'élargissement par collisions dépend donc de la densité des particules, de la température et du taux d'ionisation du milieu. On pourra donc utiliser la largeur des raies pour contraindre ces paramètres.

L'élargissement par collisions intervient notamment dans les atmosphères planétaires, mais également dans les atmosphères stellaires. Par exemple, on observe des raies très intenses du calcium ionisé, à 393,3 nm dans le spectre des étoiles de type F, G, et K. Ces raies se forment en présence d'hydrogène neutre, donc dans un potentiel de Van der Waals, pour lequel le rayon d'interaction est de l'ordre de la taille de l'atome de calcium $r_p \sim 5 \cdot 10^{-8}$ cm. En prenant $T = 5700$ K comme à la surface du Soleil, on trouve $v \sim 10^6$ cm.s $^{-1}$. Sachant que la densité des atomes d'hydrogène dans la région où se forment ces raies est $n_p \sim 10^{17}$ cm $^{-3}$, on en déduit $\gamma_{\text{coll}} \sim 10^9$ s $^{-1}$.

On peut maintenant expliquer pourquoi certaines transitions sont dites *permises* et d'autres *interdites*, en remarquant que dans les conditions terrestres, on a un taux de collisions γ_{coll} de l'ordre de 10^9 s $^{-1}$. En effet, la vitesse caractéristique des molécules de diazote à 300 K est

$$v \sim 0.1 \sqrt{\frac{300}{14}} \simeq 0.46 \text{ km s}^{-1} = 460 \text{ m s}^{-1}$$

leur rayon est typiquement $r_p \sim 10^{-10}$ m et leur densité $n_p \sim 3 \times 10^{25}$ m $^{-3}$. Comme le taux de désexcitations radiatives est donné par A_{ul} , il y en aura une fraction non négligeable uniquement si A_{ul} est au moins de l'ordre de γ_{coll} . On pourra alors observer ces raies dans ces conditions. Inversement, on n'observera pas de transitions interdites, car elles sont beaucoup moins probables qu'une désexcitation collisionnelle dans les conditions terrestres.

4.4.5 Causes multiples d'élargissement, profil de Voigt

Combinaison des profils

Chacun des processus discutés ci-dessus provoque un élargissement $\phi_p(\nu)$, où l'indice p fait référence au processus considéré. Lorsque plusieurs causes d'élargissement sont à prendre en compte, le profil résultant est la convolution des profils de chaque processus¹¹. Pour s'en convaincre, prenons une raie élargie par deux processus i et j . Le profil ϕ_i peut être vu comme la superposition de raies infiniment fines centrées sur des fréquences discrètes ν_k infiniment rapprochées les unes des autres, et dont les intensités sont données par $\phi_i(\nu_k)$

$$\phi_i(\nu) = \sum_k \phi_i(\nu_k) \delta(\nu - \nu_k) \delta\nu_k$$

où $\delta\nu_k \rightarrow 0$ est la largeur asymptotiquement nulle de chaque raie. Chacune est élargie par le processus j , de sorte que chaque composante de la somme ci-dessus doit être remplacée par

$$\phi_i(\nu_k) \delta(\nu - \nu_k) \longrightarrow \phi_i(\nu_k) \phi_j(\nu - \nu_k)$$

L'argument de ϕ_j est bien $\nu - \nu_k$, parce que le profil de cette composante est centré sur ν_k . On en déduit que le profil résultant des deux processus a la forme

$$\Psi(\nu) = \sum_k \phi_i(\nu_k) \phi_j(\nu - \nu_k) \delta\nu_k$$

soit, en passant à la limite continue,

$$\Psi(\nu) = \int \phi_i(\nu') \phi_j(\nu - \nu') d\nu'$$

11. Il faut supposer pour cela que les processus sont indépendants.

On a vu que les fonctions ϕ_p pouvaient prendre la forme d'une Gaussienne ou d'une Lorentzienne. Or la convolution de deux Gaussiennes de largeurs respectives σ_1 et σ_2 est également une Gaussienne, de largeur $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. De même, la convolution de deux Lorentziennes, de paramètres respectifs δ_1 et δ_2 , est aussi une Lorentzienne, de paramètre $\delta = \delta_1 + \delta_2$, ce qui peut se montrer en passant par la transformée de Fourier (la convolution devenant une multiplication).

Profil de Voigt

On a donc deux types de profils élémentaires : des profils Gaussiens (élargissement Doppler thermique et turbulent) et des profils Lorentziens (élargissement naturel et élargissement par collisions). Si l'on suppose la présence d'une seule composante avec une distribution de vitesse Gaussienne (que celle-ci soit d'origine thermique ou turbulente, ou une combinaison des deux), l'élargissement Doppler et l'élargissement naturel vont se combiner. Le profil résultant est appelé *profil de Voigt*, et est la convolution d'une Gaussienne et d'une Lorentzienne. Le coefficient d'absorption est alors, en négligeant le facteur lié à l'émission stimulée, et en plaçant le centre de la raie en $\nu_0 = 0$

$$\kappa_\nu = n_l \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} f_{ul} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\delta}{\delta^2 + (\nu - \nu')^2} \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D} \exp \left[- \left(\frac{\nu'}{\Delta\nu_D} \right)^2 \right] d\nu'$$

On pose alors

$$a = \frac{\delta}{\Delta\nu_D} \quad u = \frac{\nu}{\Delta\nu_D} \quad y = \frac{\nu'}{\Delta\nu_D}$$

ce qui permet d'écrire κ_ν sous la forme

$$\kappa_\nu = n_l \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} f_{ul} \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D} H(a, u) = \kappa_{\nu,0} H(a, u)$$

en faisant apparaître la *fonction de Voigt*

$$H(a, u) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{a^2 + (u - y)^2} dy$$

En tenant compte de la fréquence centrale ν_0 , on a la même forme en posant

$$u = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D}$$

Le profil est donc une fonction de u , et son allure est dictée par la valeur du paramètre a , rapport de la largeur naturelle et collisionnelle à la largeur Doppler. Dans la pratique, a est toujours très petit devant 1 ($a \approx 10^{-3}$ pour les raies permises, et $a \ll 1$ pour les raies interdites - leur largeur naturelle est très faible puisque le temps de vie sur le niveau excité est long, et de plus ces raies se forment dans des milieux très dilués de sorte que l'amortissement par collision est lui aussi très faible). La fonction de Voigt est donc la convolution d'une Gaussienne avec une Lorentzienne beaucoup plus piquée.

Pour obtenir le comportement au centre du profil ($u \rightarrow 0$) on a recours à un développement de Taylor de la fonction, donné par [15], puisque $a \ll 1$,

$$H(a, u) = H_0(u) + aH_1(u) + a^2H_2(u) + \dots = \sum_{n \geq 0} a^n H_n(u)$$

avec notamment

$$\begin{aligned} H_0(u) &= e^{-u^2} \\ H_1(u) &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} [1 - 2uF(u)] \\ H_2(u) &= (1 - 2u^2) e^{-u^2} \\ H_3(u) &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{2}{3} (1 - 2u^2) - 2u \left(1 - \frac{2}{3}u^2 \right) F(u) \right] \end{aligned}$$

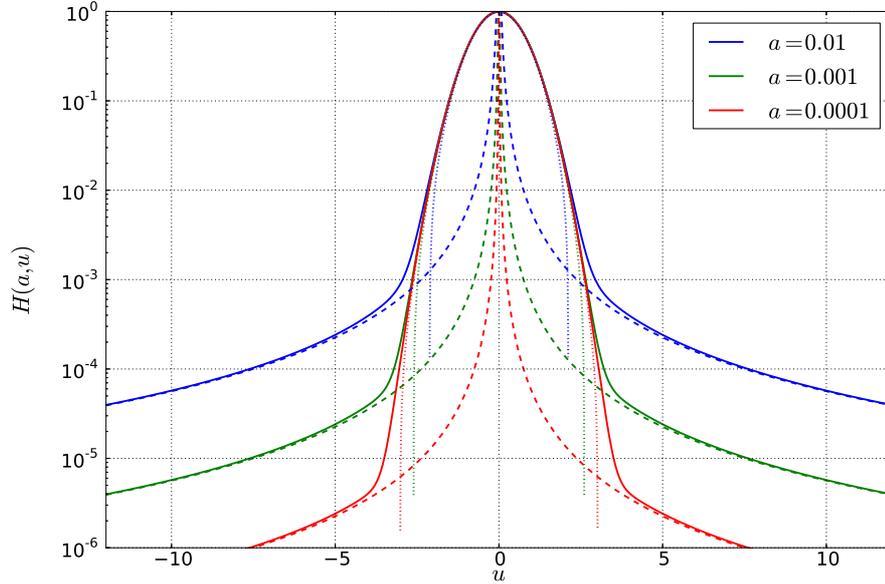


FIGURE 4.4 – Profils de Voigt en traits pleins pour $a = 10^{-2}$ (bleu), $a = 10^{-3}$ (vert) et $a = 10^{-4}$ (rouge). Les courbes en pointillés représentent les approximations Gaussiennes au centre de chaque profil, et les courbes en tirets les approximations Lorentziennes dans les ailes. Noter que l’axe des ordonnées est en échelle logarithmique.

où l’on utilise la notation

$$F(u) = e^{-u^2} \int_0^u e^{t^2} dt$$

On peut alors montrer que le cœur du profil est dominé par la partie Doppler, et les ailes par la composante Lorentzienne. En effet, pour $u \rightarrow 0$, et en se limitant au premier ordre en a , on a

$$H(u) \simeq e^{-u^2} - \frac{2a}{\sqrt{\pi}} (1 - 2u^2) \quad \text{car} \quad F(u) \simeq u$$

donc le terme dominant pour $a \ll 1$ et $u \rightarrow 0$ est bien e^{-u^2} . C’est cette forme qui est représentée par les pointillés sur la Fig. 4.4

Inversement, lorsque $u \gg 1$, toujours avec $a \ll 1$,

$$\frac{1}{a^2 + (u - y)^2} \simeq \frac{1}{u^2}$$

et donc

$$H(a, u) \simeq \frac{1}{u^2} \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{a}{\sqrt{\pi} u^2}$$

ce qui est représenté par les courbes en tirets sur la Fig. 4.4. En résumé, le profil de Voigt présente un cœur dominé par la partie Doppler et des ailes Lorentziennes.

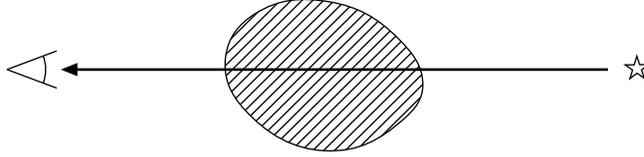


FIGURE 4.5 – Modèle de la couche absorbante

4.5 Courbes de croissance

4.5.1 Modèle de la couche absorbante

L'étude des raies d'absorption (profils, intensité) dans les spectres de sources astrophysiques brillantes permet d'obtenir des diagnostics puissants sur les conditions physiques du milieu absorbant (densité de colonne, température, état d'ionisation, degré d'excitation, rapports d'abondances, ...). Nous allons montrer comment l'on s'y prend, dans un cadre extrêmement simplifié, qui est celui d'un milieu homogène purement absorbant dans une raie (c'est-à-dire non émissif et n'absorbant pas le continu), placé en avant-plan d'une source ponctuelle (c'est-à-dire non résolue spatialement) de rayonnement continu (Fig. 4.5). Ce modèle peut s'appliquer notamment aux nuages interstellaires devant les étoiles lointaines, et aux nuages intergalactiques devant les quasars. Il a également été utilisé par le passé pour décrire les atmosphères stellaires, avant le développement de modèles beaucoup plus sophistiqués.

Dans le modèle simple considéré ici, la solution de l'équation du transfert est

$$I_\nu = I_{\nu,c} e^{-\tau_\nu}$$

où $I_{\nu,c}$ désigne le continuum (intensité qu'on observerait en l'absence de nuage absorbant sur la ligne de visée). Au niveau d'une raie, τ_ν varie rapidement avec la fréquence : c'est le profil de la raie. Le spectre *normalisé* (indiqué à droite de la Fig. 4.6) est

$$\mathcal{I}_\nu = \frac{I_\nu}{I_{\nu,c}} = e^{-\tau_\nu}$$

On peut aussi faire cette analyse en longueur d'onde, en définissant alors le spectre normalisé par

$$\mathcal{I}_\lambda = \frac{I_\lambda}{I_{\lambda,c}} = e^{-\tau_\lambda}$$

avec $I_{\lambda,c}$ l'intensité du continuum et τ_λ l'épaisseur optique.

4.5.2 Observation d'une raie

Il est important de réaliser qu'en général, les raies sont trop étroites pour être résolues par les spectroscopes utilisés. La résolution de ceux-ci est caractérisée par le paramètre

$$\mathcal{R}_\lambda = \frac{\lambda}{\delta\lambda_{\text{inst}}}$$

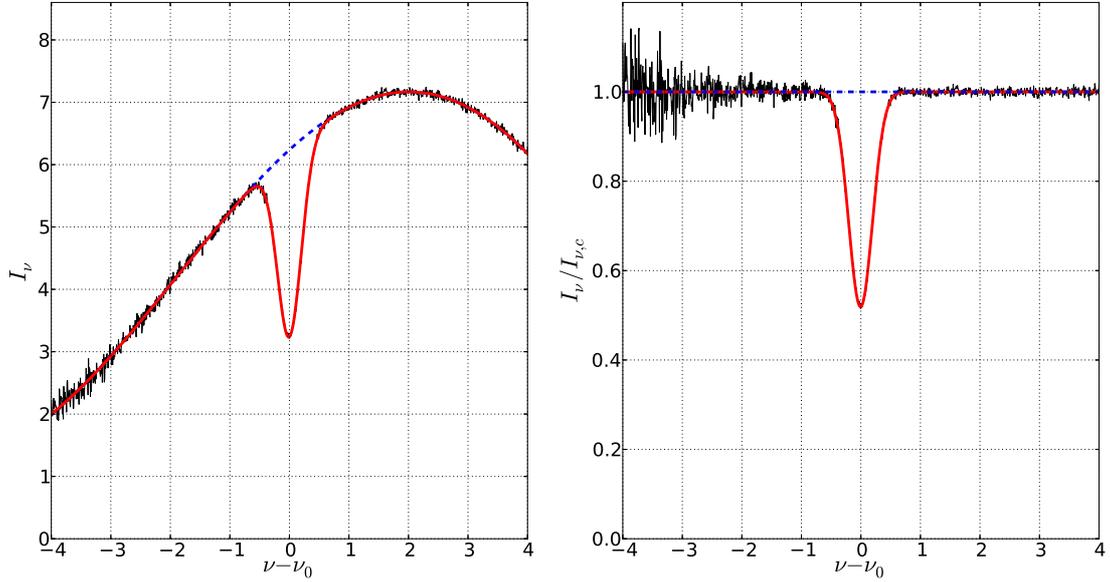


FIGURE 4.6 – Raie d’absorption devant une source de rayonnement continu (à gauche) et spectre normalisé $I_\nu/I_{\nu,c}$ (à droite). Sur chaque figure, le signal complet (incluant du bruit de mesure) est tracé en traits noirs, le signal débruité en traits rouges, et le continu sous-jacent en tirets bleus. L’axe des fréquences est centré sur la raie, et les unités de ν et I_ν sont arbitraires.

qu’on appelle *pouvoir de résolution*, où $\delta\lambda_{\text{inst}}$ est la largeur à mi-hauteur observée pour une raie qui serait intrinsèquement infiniment fine. C’est la réponse impulsionnelle de l’instrument (ou “LSF” pour *Line Spread Function*, l’équivalent de ce qu’est la PSF pour des images). Par exemple, avec un spectroscopie à réseau, on a

$$\mathcal{R}_\lambda = mN$$

avec m l’ordre d’interférence considéré et N le nombre total de traits (éclairés) du réseau. Pour avoir un ordre de grandeur, prenons un réseau de 2 cm gravé à 500 traits par mm, et blazé dans l’ordre $m = 2$. On a alors $\mathcal{R}_\lambda = 20000$. En observant une raie jaune $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$, on a une résolution spectrale $\delta\lambda_{\text{inst}} = 0.025 \text{ nm}$, soit environ dix fois meilleure qu’un prisme de même taille. De manière générale, les spectroscopes ont un pouvoir de résolution de l’ordre de 10^3 à 10^6 .

On exprime fréquemment cette résolution en termes de vitesse, soit

$$\delta v = c \frac{\delta\lambda_{\text{inst}}}{\lambda} = \frac{c}{\mathcal{R}_\lambda}$$

C’est alors la plus petite séparation entre deux composantes en vitesse qui peuvent être distinguées par le spectroscopie. De manière générale, le profil observé des raies est convolué par la réponse instrumentale (supposée Gaussienne pour simplifier). Ainsi, si la raie a un profil Gaussien avec une largeur intrinsèque $\delta\lambda_0$, on observera en pratique une raie Gaussienne de largeur

$$\delta\lambda_{\text{obs}} = \sqrt{\delta\lambda_0^2 + \delta\lambda_{\text{inst}}^2}$$

Les deux cas de figure (raies résolues et non-résolues) sont présentés sur la Fig. 4.7.

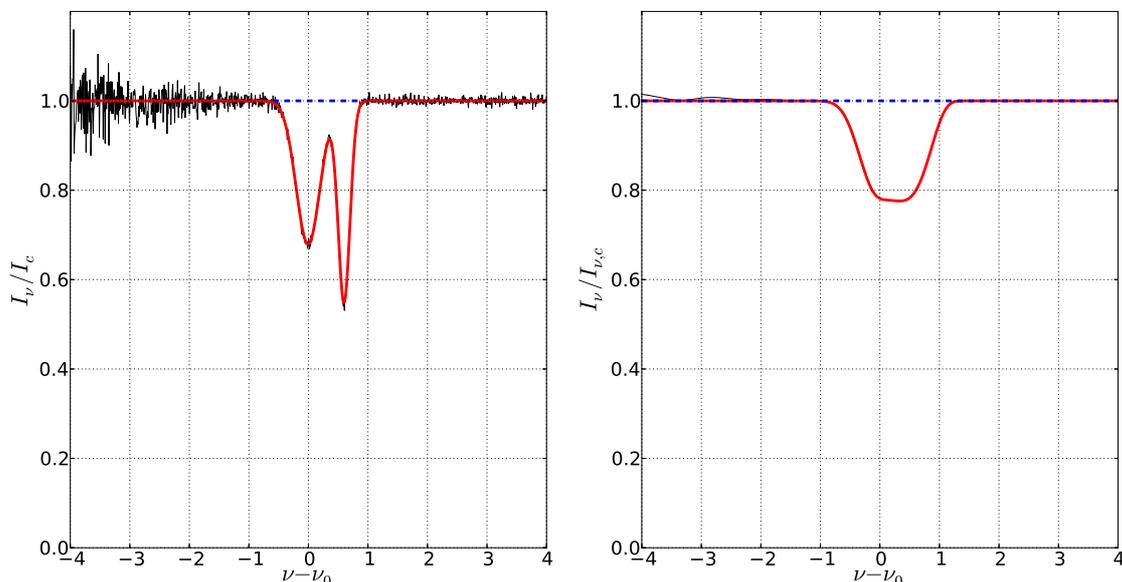


FIGURE 4.7 – Raies d’absorption résolues (à gauche) et non-résolues (à droite). Sur chaque figure, le signal complet (incluant du bruit de mesure) est tracé en traits noirs, le signal débruité en traits rouges, et le continu sous-jacent en tirets bleus. Les unités de ν sont arbitraires.

4.5.3 Largeur équivalente

La *largeur équivalente* d’une raie d’absorption peut être définie de différentes manières, soit en longueur d’onde, soit en fréquence, à partir de l’intensité spécifique

$$W_\lambda = \int_0^\infty \frac{I_{\lambda,c} - I_\lambda}{I_{\lambda,c}} d\lambda = \int_0^\infty (1 - \mathcal{I}_\lambda) d\lambda \quad \text{ou} \quad W_\nu = \int_0^\infty \frac{I_{\nu,c} - I_\nu}{I_{\nu,c}} d\nu = \int_0^\infty (1 - \mathcal{I}_\nu) d\nu,$$

mais également à partir du flux pour des sources non résolues

$$W_\lambda = \int_0^\infty \frac{F_{\lambda,c} - F_\lambda}{F_{\lambda,c}} d\lambda = \int_0^\infty (1 - \mathcal{F}_\lambda) d\lambda \quad \text{ou} \quad W_\nu = \int_0^\infty \frac{F_{\nu,c} - F_\nu}{F_{\nu,c}} d\nu = \int_0^\infty (1 - \mathcal{F}_\nu) d\nu.$$

Comme on a sous chaque intégrale un rapport d’intensités ou de flux, on a $\mathcal{F}_\nu = \mathcal{F}_\lambda$ et $\mathcal{I}_\nu = \mathcal{I}_\lambda$, de sorte que la relation entre W_ν et W_λ est simplement $W_\lambda = (\lambda_0^2/c)W_\nu$. D’autre part, l’intégration sur tout l’intervalle $[0, \infty]$ est évidemment formelle et se limite en pratique à l’étendue de la raie.

La largeur équivalente W_λ , qui a la dimension d’une longueur d’onde et est typiquement exprimée en Å, correspond à l’aire de la raie rapportée à l’intensité du continu. C’est la largeur d’une raie rectangulaire bloquant entièrement le spectre émergent, comme indiqué sur la Fig. 4.8. L’idée sous-jacente est que cette aire est une mesure directe du nombre d’atomes absorbant sur la ligne de visée. Comme on va le voir, cette idée est correcte dans la limite optiquement mince, mais fautive dès que la raie sature.

Comme la convolution par un profil normalisé préserve l’intégrale¹², on en déduit que, contrairement au profil, la largeur équivalente n’est pas modifiée par le spectroscopie, pour autant qu’il

12. Cela se montre en passant par les transformées de Fourier. Si $h = g * \phi$ avec ϕ un profil normalisé, on a

$$\int h(x) dx = \hat{h}(0) = \hat{g}(0)\hat{\phi}(0) = \int g(x) dx \times \int \phi(x) dx = \int g(x) dx.$$

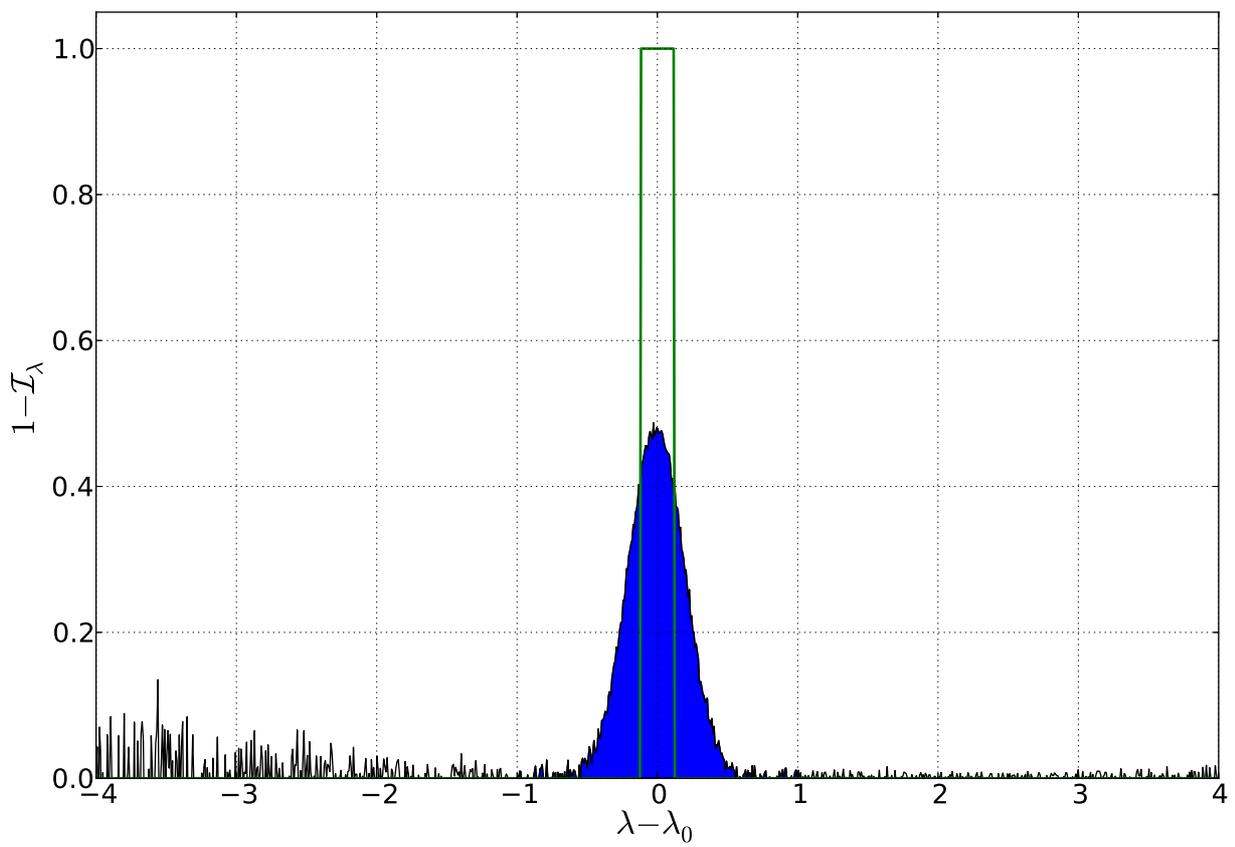


FIGURE 4.8 – Interprétation de la largeur équivalente : l'aire sous la raie, indiquée en bleu, est la même que celle du rectangle vert.

n'y ait qu'une raie observée. C'est donc elle qu'on utilise dans le cas de raies non résolues pour obtenir des informations sur le milieu absorbant. Son expression, dans le cas d'un profil de Voigt (on suppose qu'il n'y a qu'une seule composante en vitesse dans le spectre observé), est

$$W_\lambda = \int \left[1 - e^{-\tau_{\nu,0} H(a,u)} \right] d\lambda$$

avec

$$\tau_{\nu,0} = \kappa_{\nu,0} L = N_l \frac{e^2}{4\sqrt{\pi}\epsilon_0 m_e c \Delta\nu_D} f_{ul} = 1.5 \cdot 10^{-6} f_{ul} \left(\frac{N_l}{\text{m}^{-2}} \right) \left(\frac{\Delta\nu_D}{1 \text{ Hz}} \right)^{-1}$$

l'épaisseur optique au centre de la raie, où l'on a introduit d'abord la profondeur L du milieu absorbant, puis la densité de colonne $N_l = n_l L$ de l'espèce responsable de l'absorption (correspondant à la population du niveau inférieur l de la transition mise en jeu). Notons que dans cette expression, on a négligé l'émission stimulée. On écrit souvent cette expression en faisant intervenir la largeur Doppler en longueur d'onde plutôt qu'en fréquence

$$\Delta\lambda_D = \frac{\lambda_0}{\nu_0} \Delta\nu_D = \frac{\lambda_0^2}{c} \Delta\nu_D$$

soit

$$\tau_{\nu,0} = N_l \frac{e^2 \lambda_0^2 f_{ul}}{4\sqrt{\pi}\epsilon_0 m_e c^2 \Delta\lambda_D} = 5 \cdot 10^{-15} f_{ul} \left(\frac{N_l}{\text{m}^{-2}} \right) \left(\frac{\Delta\lambda_D}{1 \text{ m}} \right)^{-1} \left(\frac{\lambda_0}{1 \text{ m}} \right)^2$$

ou bien en faisant apparaître la dispersion de vitesse

$$\sigma_{v_z} = \frac{c}{\sqrt{2}\nu_0} \Delta\nu_D = \frac{\lambda_0}{\sqrt{2}} \Delta\nu_D$$

ce qui donne

$$\tau_{\nu,0} = N_l \frac{e^2 \lambda_0 f_{ul}}{4\sqrt{2}\pi\epsilon_0 m_e c \sigma_v} = 1.1 \cdot 10^{-15} f_{ul} \left(\frac{N_l}{\text{cm}^{-2}} \right) \left(\frac{\lambda_0}{1 \text{ \AA}} \right) \left(\frac{\sigma_v}{1 \text{ km s}^{-1}} \right)^{-1}$$

La valeur de l'épaisseur optique $\tau_{\nu,0}$ au centre de la raie n'est en général pas mesurable directement sur le spectre, sauf si la raie est parfaitement résolue. Pour une transition donnée (donc f_{ul} et λ_0 données), la largeur équivalente dépend à la fois de la densité de colonne N_l et de la dispersion de vitesse σ_v . Il faudra donc deux valeurs de W_λ pour deux transitions distinctes de la même espèce (par exemple, les deux raies d'un doublet de structure fine) pour obtenir à la fois N_l et σ_v .

4.5.4 Profils d'absorption

La Fig. 4.9 montre les profils de raies d'absorption obtenus pour $a = 10^{-3}$ et différentes valeurs de l'épaisseur optique au centre de la raie, c'est-à-dire différentes densités de colonne de l'absorbant, à dispersion de vitesse donnée. On constate qu'aux faibles épaisseurs optiques, l'élargissement naturel n'est pas perceptible, et que le cœur Doppler de la raie domine. Celui-ci sature lorsque $\tau_{\nu,0}$ augmente, puis, lorsqu'il est très saturé, apparaissent alors de grandes ailes Lorentziennes, qui seront en général résolues. Dans ce cas, leur ajustement fournit alors directement la densité de colonne N_l .

4.5.5 Courbes de croissance

Pour comprendre la raison de ce comportement, il faut revenir à la fonction $H(a, u)$:

- Lorsque l'épaisseur optique est faible $\tau_{\nu,0} \ll 1$, seules les plages de u pour lesquelles $H(a, u)$ n'est pas trop petit vont avoir une contribution à $1 - \mathcal{I}_\nu$ et donc à la largeur équivalente W_λ . C'est donc le cœur Doppler du profil qui fixe la largeur équivalente. On a alors

$$W_\lambda \simeq \int \tau_{\nu,0} e^{-u^2} d\lambda = \int \tau_{\nu,0} \exp \left[- \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta\lambda_D} \right)^2 \right] d\lambda = \sqrt{\pi} \tau_{\nu,0} \Delta\lambda_D$$

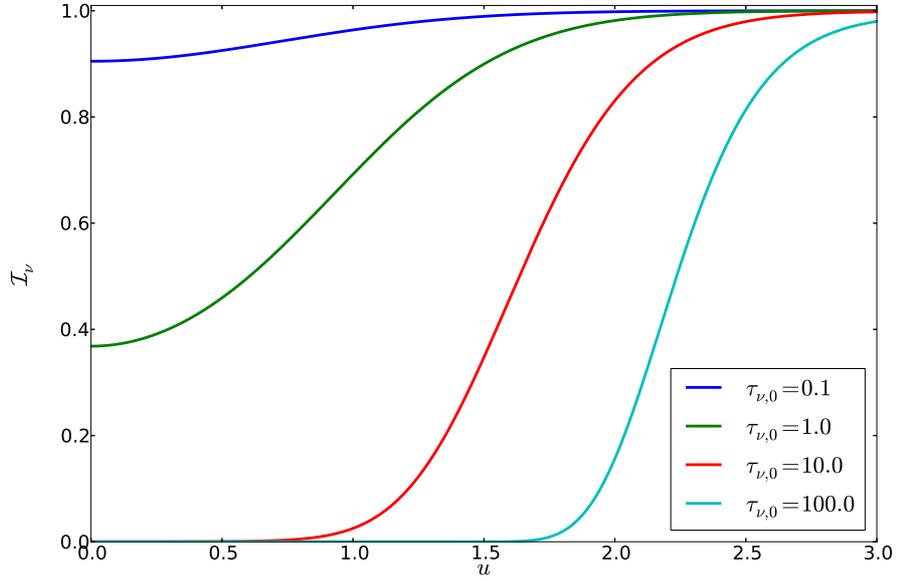


FIGURE 4.9 – Profils de raies en absorption, en fonction de $u = (\nu - \nu_0)/\Delta\nu_D$, pour $a = 10^{-3}$ et différentes valeurs de $\tau_{\nu,0}$: 0.1 (bleu), 1 (vert), 10 (rouge) et 100 (cyan). Notons que seule une moitié du profil est représentée, l'autre s'en déduisant par symétrie.

qu'on met généralement sous la forme

$$W_\lambda = N_l \frac{e^2 \lambda_0^2 f_{ul}}{4\epsilon_0 m_e c^2} \quad \text{ou encore} \quad \frac{W_\lambda}{\lambda_0} = \left(\frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c^2} \right) N_l \lambda_0 f_{ul}$$

Dans ce cas optiquement mince, W_λ ne dépend donc plus que de la densité de colonne : c'est une situation très favorable où une seule raie suffit à déterminer celle-ci, via

$$N_l = \frac{4\epsilon_0 m_e c^2}{e^2} \frac{W_\lambda}{\lambda_0^2 f_{ul}}$$

qu'on met sous la forme numérique

$$N_l = 1.13 \cdot 10^{20} \frac{W_\lambda}{\lambda_0^2 f_{ul}} \quad (4.3)$$

avec N_l en cm^{-2} , et W_λ et λ_0 exprimées en \AA . On voit que la largeur équivalente est directement proportionnelle à la densité de colonne de l'espèce¹³, ce qu'on représente par la relation

$$\frac{W_\lambda}{\lambda_0} \propto N_l f_{ul} \lambda_0.$$

- Lorsque l'épaisseur optique est très grande $\tau_{\nu,0} \gg 1/a$, la raie est saturée jusqu'aux ailes Lorentziennes : aux faibles valeurs de u , l'argument de l'exponentielle est très grand en valeur

¹³. On sera souvent dans un cas où les particules de l'espèce considérée se trouvent essentiellement sur le niveau inférieur, donc $N \simeq N_l$.

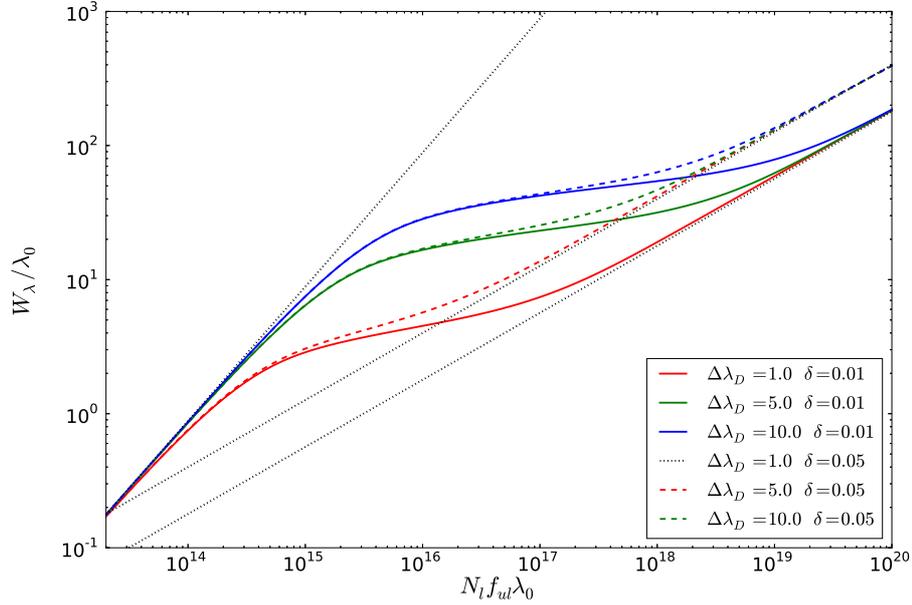


FIGURE 4.10 – Courbe de croissance théorique (largeur équivalente W_λ/λ_0 en fonction de la densité de colonne $N_l f_{ul} \lambda_0$, reliée à l'épaisseur optique au centre de la raie $\tau_{\nu,0}$) pour différentes valeurs de l'élargissement Doppler $\Delta\lambda_D$ et de la constante d'amortissement δ . Les comportements asymptotiques à $\tau_{\nu,0} \ll 1$ et $\tau_{\nu,0} \gg 1$ sont indiqués en pointillés.

absolue et négatif, la quantité sous l'intégrale vaut donc sensiblement 1 jusqu'à une valeur "critique" u_c de u telle que

$$\tau_{\nu,0} H(a, u) \simeq \tau_{\nu,0} \frac{a}{\sqrt{\pi} u^2} \simeq 1 \quad \text{soit} \quad u_c \simeq \frac{\sqrt{a \tau_{\nu,0}}}{\pi^{1/4}}$$

On a alors

$$W_\lambda \simeq \int_{-u_c}^{u_c} d\lambda = \int_{-u_c}^{u_c} \Delta\lambda_D du = 2u_c \Delta\lambda_D = \frac{2\sqrt{a \tau_{\nu,0}} \Delta\lambda_D}{\pi^{1/4}}.$$

Avec les expressions de

$$a = \frac{\delta}{\Delta\nu_D} = \frac{\lambda_0^2}{c} \frac{\delta}{\Delta\lambda_D}$$

et

$$\tau_{\nu,0} = N_l \frac{e^2 \lambda_0^2 f_{ul}}{4\sqrt{\pi} \epsilon_0 m_e c^2 \Delta\lambda_D},$$

on obtient finalement

$$\frac{W_\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{e^2}{\pi \epsilon_0 m_e c^3} \delta N_l f_{ul} \lambda_0^2}.$$

Comme dans le cas optiquement mince, W_λ ne dépend que de la densité de colonne et pas de la largeur Doppler. Elle dépend aussi de l'amortissement δ .

La *courbe de croissance* ainsi obtenue a l'allure présentée sur la Fig. 4.10. La position du palier logarithmique, qui marque la transition du régime optiquement mince aux faibles densités de colonne vers le régime optiquement épais aux grandes densités de colonne, soit pour $1 \ll \tau_{\nu,0} \ll 1/a$, dépend de la largeur Doppler $\Delta\lambda_D$ via a . La position de l'asymptote du régime optiquement épais

dépend quant à elle de la constante d'amortissement δ , qui dépend elle-même de la densité du gaz (si les collisions dominent cet amortissement). Il faut donc connaître à la fois $\Delta\lambda_D$ et δ pour construire cette courbe.

Notons que dans le cas de raies fortement saturées, les ailes Lorentziennes sont en général résolues. On cherchera alors plutôt à ajuster le profil directement avec un profil synthétique pour en déduire N_l . Pour les situations intermédiaires où W_λ dépend à la fois de N_l et de σ_v , on pourra reporter les valeurs mesurées pour différentes raies d'une même espèce dans un diagramme représentant $\log(W_\lambda/\lambda_0)$ en fonction de $\log(f_{ul}\lambda_0)$, et faire un ajustement avec une courbe de croissance théorique. Si la raie est résolue, on pourra aussi directement effectuer un ajustement de profil de Voigt, par exemple avec VPFIT¹⁴.

4.6 Exemples

4.6.1 La raie à 21 cm de l'hydrogène atomique neutre

La raie de transition hyperfine à 21 cm de longueur d'onde ($\nu_0 = 1420.405751$ MHz) de l'hydrogène atomique neutre (HI) est un traceur puissant de l'espèce la plus abondante dans l'Univers. Elle se forme lorsque les spins du proton et de l'électron passent d'un état parallèle ($g_u = 3$) à un état antiparallèle ($g_l = 1$). C'est une transition fortement interdite ($A_{ul} = 2.85 \cdot 10^{-15} \text{ s}^{-1}$) mais la faible densité du milieu conjuguée aux grandes lignes de visée la rend parfaitement visible. On va voir sur un exemple comment déduire de l'observation de cette raie en émission la quantité de gaz atomique neutre dans une galaxie.

On représente sur la Fig. 4.11 le signal HI en provenance de la galaxie UGC 11707, observé¹⁵ avec le radiotélescope de 140 pieds (43 m de diamètre) du NRAO à Green Bank (Virginie Occidentale). On rappelle que l'unité de densité spectrale de flux utilisée est le Jansky, avec $1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W.m}^{-2}.\text{Hz}^{-1}$. La taille angulaire caractéristique du lobe du radiotélescope est

$$\theta_{\text{beam}} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

ce qui donne ici, avec $D = 43 \text{ m}$ et $\lambda = 21 \text{ cm}$, $\theta_{\text{beam}} \simeq 20'$. On rappelle qu'une minute d'arc est égale à $1/60^\circ$ de degré, et que la formule ci-dessus donne bien entendu un résultat en radians. La taille du disque de gaz HI de la galaxie UGC 11707 est de $8'$, elle est donc non résolue spatialement, de sorte que l'antenne est sensible au flux total de la source (exprimé ici en Jy), et non à sa distribution de brillance.

Dans le milieu atomique neutre, la température d'excitation T_x de la transition hyperfine, qu'on nomme dans ce cas précis *température de spin* et qu'on note T_s , est de l'ordre de 50 à 10000 K, donc si on calcule le rapport $x = h\nu_0/kT_s$, avec $\nu_0 = 1420 \text{ MHz}$ (raie radio centimétrique), on trouve

$$x = \frac{h\nu_0}{kT_s} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34} \times 1.42 \cdot 10^9}{1.38 \cdot 10^{-23} \times T_s} = \frac{6.82 \cdot 10^{-2}}{T_s}$$

soit $x = 1.36 \cdot 10^{-3}$ à $T = 50 \text{ K}$ et $x = 6.82 \cdot 10^{-6}$ à $T = 10000 \text{ K}$. On est donc toujours dans le domaine $x \ll 1$ où l'on peut appliquer l'approximation de Rayleigh-Jeans à T_s dans la formule donnant le coefficient d'absorption monochromatique

$$\kappa_\nu = \frac{c^2\nu}{8\pi\nu_0^3} A_{ul} n_l \frac{g_u}{g_l} \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu_0}{kT_s}\right) \right] \phi(\nu) \simeq \frac{c^2\nu}{8\pi\nu_0^3} A_{ul} n_l \frac{g_u}{g_l} \frac{h\nu_0}{kT_s} \phi(\nu)$$

On utilise ensuite le fait¹⁶ que $g_u = 3$ et $g_l = 1$:

$$\kappa_\nu = \frac{3c^2 h\nu}{8\pi\nu_0^2 kT_s} A_{ul} n_l \phi(\nu)$$

14. <http://www.ast.cam.ac.uk/~rfc/vpfit.html>

15. Source : <http://www.cv.nrao.edu/course/astr534/ERA.shtml>.

16. Le nombre d'états pour un nombre quantique hyperfin F est $2F + 1$, or $F(l) = 0$ et $F(u) = 1$.

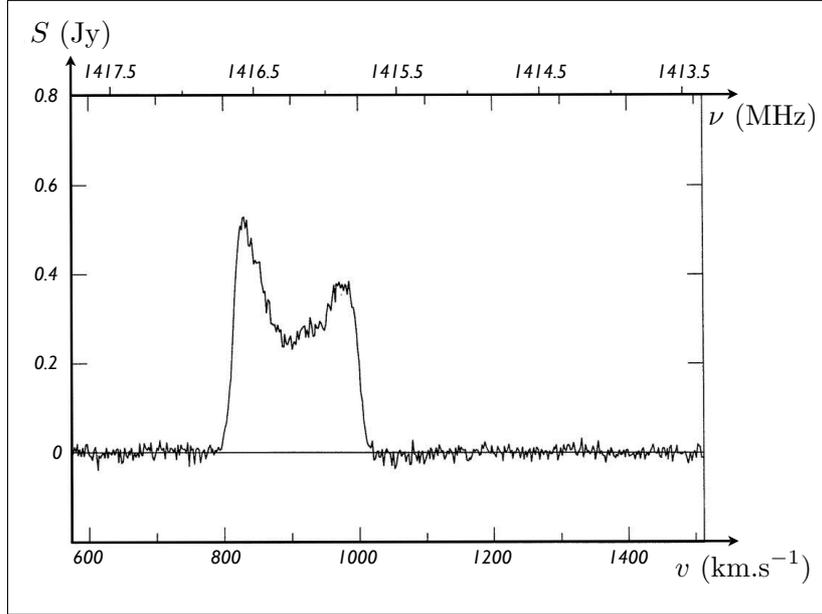


FIGURE 4.11 – Signal HI observé en direction de la galaxie UGC 11707 avec le radiotélescope de 140 pieds (43 m de diamètre) du NRAO à Green Bank (Virginie Occidentale).

D'autre part le rapport des populations donne

$$\frac{n_u}{n_l} = \frac{g_u}{g_l} \exp\left(-\frac{h\nu_0}{kT_s}\right) \simeq \frac{g_u}{g_l} = 3$$

On a donc, en introduisant la densité totale des atomes d'hydrogène n_H

$$n_H = n_u + n_l = 4n_l \quad \Rightarrow \quad \kappa_\nu = \frac{3c^2 h\nu}{32\pi\nu_0^2 kT_s} A_{ul} n_H \phi(\nu)$$

Quant à la profondeur optique, elle est définie par l'intégrale de κ_ν sur la ligne de visée

$$\tau_\nu = \int \kappa_\nu ds = \int \frac{3c^2 h\nu}{32\pi\nu_0^2 kT_s} A_{ul} n_H \phi(\nu) ds = \frac{3c^2 h\nu}{32\pi\nu_0^2 kT_s} A_{ul} N_H \phi(\nu)$$

en introduisant la densité de colonne d'hydrogène atomique neutre N_H . On a fait ici l'hypothèse d'un milieu homogène, de sorte que T_s et ϕ ne dépendent pas de la position s le long de la ligne de visée.

La solution générale de l'équation de transfert est

$$I_\nu = I_\nu^0 e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu e^{-\tau'} d\tau'$$

Si l'on fait l'hypothèse qu'il n'y a pas de radiation de fond, le premier terme disparaît

$$I_\nu = \int_0^{\tau_\nu} S_\nu e^{-\tau'} d\tau'$$

et en supposant le milieu homogène, on peut sortir la fonction source et intégrer

$$I_\nu = S_\nu (1 - e^{-\tau_\nu})$$

On peut écrire cette équation en introduisant la température de brillance $T_b(\nu)$, dont on rappelle qu'elle est définie par $I_\nu = B_\nu[T_b(\nu)]$, ce qui donne

$$\frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left[\frac{h\nu}{kT_b(\nu)}\right] - 1} = B_{\nu_0}(T_s) (1 - e^{-\tau_\nu}) \simeq \frac{2kT_s\nu_0^2}{c^2} (1 - e^{-\tau_\nu}) \simeq \frac{2kT_s\nu_0^2\tau_\nu}{c^2}$$

puisque la fonction source est $S_\nu = B_{\nu_0}(T_s)$. On a ici fait l'hypothèse que la profondeur optique dans la raie est faible ($\tau_\nu \ll 1$). On a donc

$$\frac{1}{\exp\left[\frac{h\nu}{kT_b(\nu)}\right] - 1} \simeq \frac{kT_s\nu_0^2}{h\nu^3} \times \frac{3c^2 h\nu}{32\pi\nu_0^2 kT_s} A_{ul} N_H \phi(\nu) = \frac{3c^2}{32\pi\nu^2} A_{ul} N_H \phi(\nu)$$

Sachant que la densité de colonne typique de l'hydrogène atomique neutre dans UGC 11707 est $N_H = 10^{21} \text{ cm}^{-2}$, et comme la largeur du profil d'émission HI est $\delta\nu \simeq 1 \text{ MHz}$ et donc $\phi(\nu) \simeq 10^{-6} \text{ Hz}^{-1}$, on a

$$y = \frac{3c^2}{32\pi\nu^2} A_{ul} N_H \phi(\nu) \simeq \frac{3 \times (3 \cdot 10^8)^2}{32 \times 3.14 \times (1.42 \cdot 10^9)^2} \times 2.85 \cdot 10^{-15} \times 10^{25} \times 10^{-6} \simeq 38$$

On en déduit que

$$T_b(\nu) = \frac{h\nu}{k} \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{y}\right)} \simeq \frac{h\nu y}{k} = \frac{3hc^2}{32\pi k\nu} A_{ul} N_H \phi(\nu)$$

ce qui revient à écrire l'approximation de Rayleigh-Jeans pour la température de brillance. Comme la largeur relative de la raie est très faible

$$\frac{\delta\nu}{\nu} \simeq \frac{1 \text{ MHz}}{1420 \text{ MHz}} \simeq 7 \cdot 10^{-4}$$

les fréquences ν pour lesquelles ϕ n'est pas négligeable sont toutes sensiblement égales à ν_0 . En intégrant sur ν pour obtenir l'émission totale - en n'oubliant pas que $T_b(\nu)$ est dépendant de la fréquence - on a

$$\int T_b(\nu) d\nu = \frac{3c^2 h}{32\pi k} A_{ul} N_H \int \frac{\phi(\nu)}{\nu} d\nu \simeq \frac{3c^2 h}{32\pi k} A_{ul} N_H \int \frac{\delta(\nu - \nu_0)}{\nu} d\nu = \frac{3c^2 h}{32\pi\nu_0 k} A_{ul} N_H$$

On a donc une relation donnant la densité de colonne de gaz atomique neutre en fonction de l'émission totale dans la raie

$$N_H = \frac{32\pi\nu_0 k}{3c^2 h A_{ul}} \int T_b(\nu) d\nu$$

En utilisant souvent la projection de la vitesse relative sur la ligne de visée v_z en lieu et place de la fréquence, on peut écrire

$$N_H = \frac{32\pi\nu_0^2 k}{3c^3 h A_{ul}} \int T_b(v_z) dv_z$$

On peut alors mettre la relation précédente sous une forme classiquement utilisée par les radioastronomes

$$\frac{N_H}{\text{cm}^{-2}} \simeq 1.82 \cdot 10^{18} \int \frac{T_b(v_z) dv_z}{\text{K.km.s}^{-1}}$$

Pour une galaxie à la distance D , cette relation permet de calculer la masse de gaz d'hydrogène M_{H} à partir de la mesure du flux émis dans la raie, selon

$$\frac{M_{\text{H}}}{M_{\odot}} \simeq 2.36 \cdot 10^5 \left(\frac{D}{\text{Mpc}} \right)^2 \int \frac{F dv}{\text{Jy.km.s}^{-1}}.$$

La distance de la galaxie s'estime à partir du redshift et de la loi de Hubble. Sur le spectre, la fréquence centrale du signal est approximativement 1416.2 MHz, ce qui donne

$$z = \frac{1420.4}{1416.2} - 1 = \frac{4.2}{1416.2} \simeq \frac{4.5}{1.5} \cdot 10^{-3} = 0.003$$

La vitesse relative est alors donnée par

$$v = c \left(\frac{\nu_0}{\nu} - 1 \right) = cz \quad \Rightarrow \quad v \simeq 890 \text{ km.s}^{-1}$$

La loi de Hubble $v = H_0 D$ fournit alors la distance

$$D = \frac{v}{H_0} = \frac{890}{67.4} \simeq 13.2 \text{ Mpc}$$

Pour obtenir la masse de gaz HI de cette galaxie, il faut estimer l'intégrale du flux sur le profil de la raie. On le fait via la valeur moyenne de F , soit $\langle F \rangle \simeq 0.35 \text{ Jy}$ et la largeur en vitesse $\Delta v \simeq 200 \text{ km.s}^{-1}$, ce qui donne, avec la formule écrite plus haut,

$$M_{\text{H}} \simeq 2.9 \cdot 10^9 M_{\odot}$$

C'est une galaxie comparable à la nôtre ($M_{\text{H}} \simeq 4 - 8 \cdot 10^{19} M_{\odot}$). Notons que l'élargissement thermique de la raie HI est lié à la distribution gaussienne des vitesses

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{v_z}} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_{v_z}^2}\right) \quad \text{avec} \quad \sigma_{v_z} = \sqrt{\frac{kT}{m}}$$

Pour de l'hydrogène atomique neutre, $m = m_p$ et la dispersion thermique des vitesses est

$$\sigma_{v_z} \simeq 90\sqrt{T} \text{ m.s}^{-1}$$

donc $\sigma_{v_z} \simeq 630 \text{ m.s}^{-1}$ à 50 K et $\sigma_{v_z} \simeq 9 \text{ km.s}^{-1}$ à 10000 K. Or la raie émise par UGC 11707 n'a d'une part pas un profil Gaussien, et d'autre part sa largeur est bien plus grande, de l'ordre de 200 km.s^{-1} . Il faut donc lui chercher une autre cause. On peut penser à une dispersion macroscopique des vitesses, de type turbulente, mais celle-ci est également trop faible¹⁷. En réalité, le profil de la raie est un double pic caractéristique des systèmes en rotation. Ceci est confirmé par des observations à plus haute résolution angulaire (voir la Fig. 4.12), qui permettent de montrer que les différentes parties de la galaxie n'émettent pas aux mêmes fréquences. La vitesse de rotation est ici de l'ordre de 100 km.s^{-1} . On trouvera dans [44] une paramétrisation des profils en émission des disques galactiques en rotation par les fonctions de Busy.

4.6.2 Raies d'absorption dans les spectres de quasars

La Fig. 4.13 représente une partie du spectre d'un quasar lointain (SDSS1243+2042) observé dans le cadre du *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS). On y a repéré deux raies d'absorption, notées 1 et 2, qui constituent un doublet d'un même élément. Compte tenu de la résolution spectrale de l'instrument, ces deux raies ne sont pas résolues. On va d'abord identifier ce doublet, puis

17. Elle dépend de l'échelle, mais pour des nuages à haute latitude Galactique, elle est de l'ordre de 30 km.s^{-1} .

Overview UGC 11707

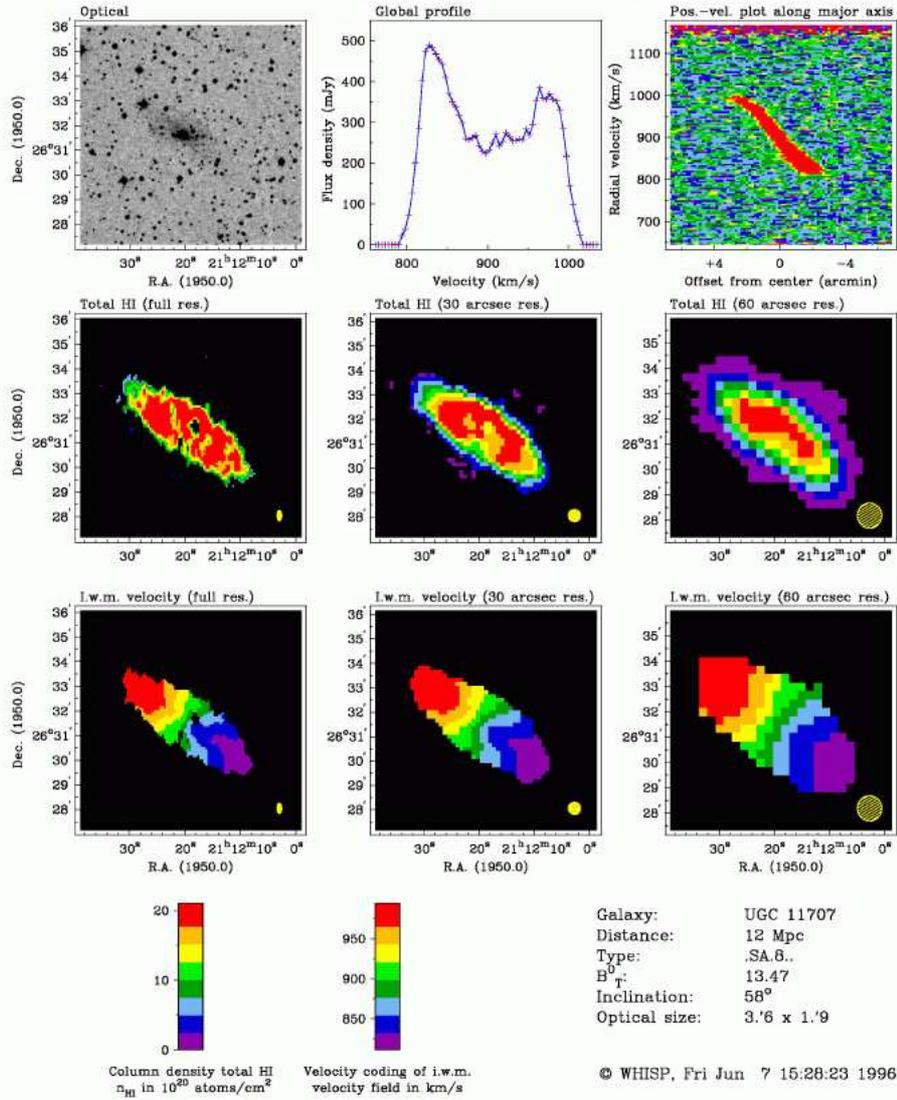


FIGURE 4.12 – Cartographie de l'émission HI dans UGC 11707. (Source : <http://www.cv.nrao.edu/course/ast534/ERA.shtml>.)

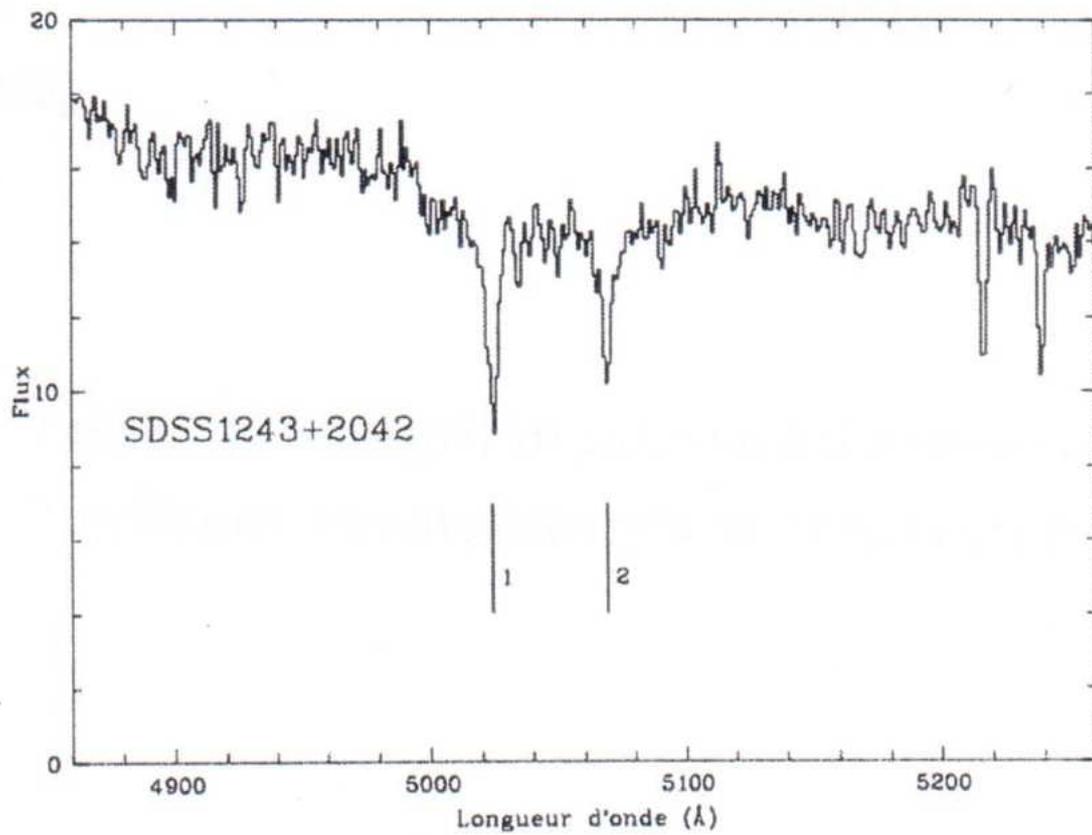


FIGURE 4.13 – Raies d'absorption dans le spectre de SDSS1243+2042

déterminer la densité de colonne de l'élément responsable de ces deux raies d'absorption. Les longueurs d'onde et largeurs équivalentes observées pour ces deux raies sont :

$$\lambda_{1,\text{obs}} = 502.434 \text{ nm} \quad W_{1,\text{obs}} = 0.212 \text{ nm} \quad \lambda_{2,\text{obs}} = 506.905 \text{ nm} \quad W_{2,\text{obs}} = 0.156 \text{ nm}$$

Comme les raies sont très probablement affectées par un redshift non négligeable, on ne peut les identifier par une comparaison directe avec des valeurs mesurées en laboratoire. Cependant, le rapport des deux longueurs d'onde n'est pas affecté par le redshift, soit

$$\frac{\lambda_{1,\text{obs}}}{\lambda_{2,\text{obs}}} = 0.991180$$

avec 6 chiffres significatifs comme pour les données. La comparaison avec des tables de longueurs d'onde pour différents ions indique que l'on a affaire à un doublet du calcium ionisé CaII, à savoir

$$\lambda_1 = 393.478 \text{ nm} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 396.959 \text{ nm} \quad \text{donc} \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 0.991230.$$

On en déduit deux estimations du redshift du système absorbant

$$z_1 = \frac{\lambda_{1,\text{obs}}}{\lambda_1} - 1 = 0.27690 \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{\lambda_{2,\text{obs}}}{\lambda_2} - 1 = 0.27697$$

soit en combinant les deux

$$z = 0.27694 \pm 0.00004.$$

Les largeurs équivalentes sont elles aussi modifiées par le redshift, de la même manière, c'est-à-dire que $W_{\text{obs}} = (1+z)W$. On en tire les largeurs équivalentes des deux raies dans le référentiel du nuage absorbant

$$W_1 = \frac{W_{1,\text{obs}}}{1+z} = 0.166 \text{ nm} \quad \text{et} \quad W_2 = \frac{W_{2,\text{obs}}}{1+z} = 0.122 \text{ nm}$$

Il se pose ensuite la question de savoir si ces raies sont optiquement minces. Comme elles sont issues de la même espèce, si elles étaient optiquement minces, elles devraient vérifier la relation (4.3) avec la même densité de colonne, et on aurait donc

$$\frac{W_1}{\lambda_1^2 f_1} = \frac{W_2}{\lambda_2^2 f_2}$$

avec $f_1 = 0.650$ et $f_2 = 0.322$ les forces d'oscillateur respectives de ces deux raies. Or (avec toutes les longueurs exprimées en nm),

$$\frac{W_1}{\lambda_1^2 f_1} = 1.65 \cdot 10^{-6} \text{ nm}^{-1} \quad \text{et} \quad \frac{W_2}{\lambda_2^2 f_2} = 2.41 \cdot 10^{-6} \text{ nm}^{-1}$$

ce qui montre qu'au moins une des deux raies n'est pas optiquement mince. On peut d'ailleurs utiliser ces formes pour donner des limites inférieures à la densité de colonne de CaII, en utilisant justement l'équation (4.3). On trouve

$$N(\text{Ca}^+) > 1.86 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-2} \quad \text{pour la raie 1,}$$

$$N(\text{Ca}^+) > 2.72 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-2} \quad \text{pour la raie 2.}$$

À titre d'illustration, et pour exploiter l'information contenue dans les deux largeurs équivalentes, on prend un modèle simplifié à l'extrême, dans lequel la distribution des vitesses n'est pas une Gaussienne, mais une fonction rectangle, constante et non nulle uniquement sur une plage $-\Delta v \leq v_z \leq \Delta v$, avec v_z la vitesse relative par rapport au mouvement d'ensemble, donc $\langle v_z \rangle = 0$. Le profil

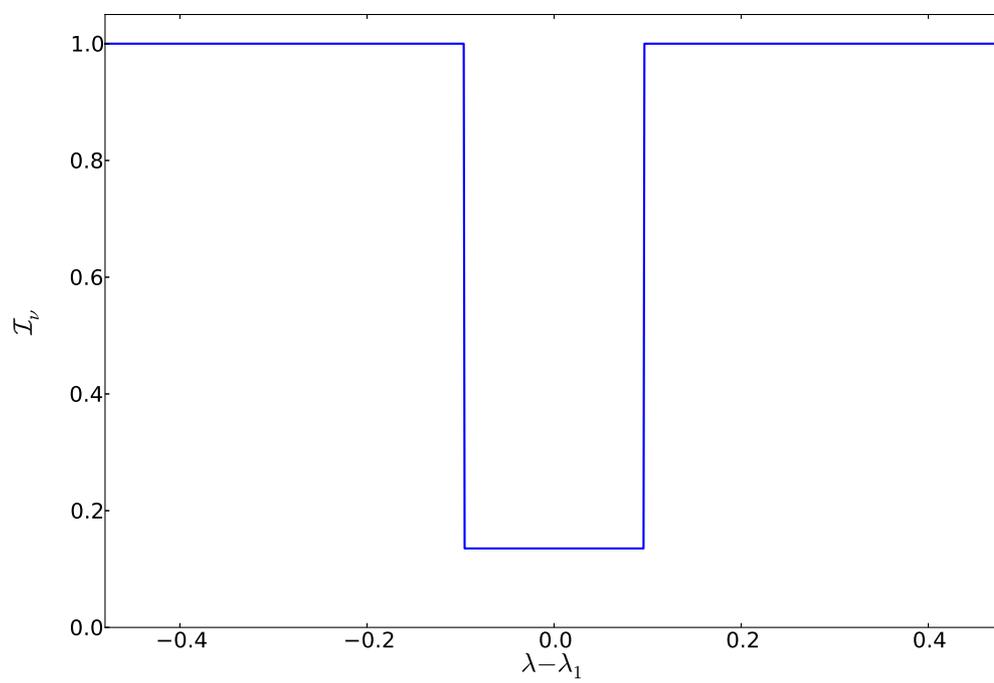


FIGURE 4.14 – Allure du spectre d’absorption dans un modèle à distribution rectangulaire des vitesses

d'absorption "théorique" a alors l'allure représentée sur la Fig 4.14. On note $\tau_{0,i}$ les opacités au centre de chaque raie ($i = 1$ ou 2), qui sont donc constantes sur le profil de chaque raie, ainsi que $\Delta\lambda_i = \lambda_i(\Delta v/c)$ l'élargissement en longueur d'onde. Dans ce modèle, les largeurs équivalentes sont calculables analytiquement très simplement

$$W_i = \int (1 - e^{-\tau}) d\lambda = 2\Delta\lambda_i (1 - e^{-\tau_{0,i}})$$

et leur rapport est donc

$$r_{12} = \frac{W_1}{W_2} = \frac{\Delta\lambda_1 (1 - e^{-\tau_{0,1}})}{\Delta\lambda_2 (1 - e^{-\tau_{0,2}})} = \frac{\lambda_1 (1 - e^{-\tau_{0,1}})}{\lambda_2 (1 - e^{-\tau_{0,2}})}$$

et d'autre part l'opacité au centre de la raie est donnée par (à montrer en exercice)

$$\tau_{0,i} = 1.33 \cdot 10^{-14} f_i \left(\frac{N}{\text{cm}^{-2}} \right) \left(\frac{\lambda_i}{\text{nm}} \right) \left(\frac{\Delta v}{\text{km s}^{-1}} \right)^{-1}$$

donc le rapport de ces opacités est

$$\alpha = \frac{\tau_{0,1}}{\tau_{0,2}} = \frac{f_1 \lambda_1}{f_2 \lambda_2} = 2.00$$

On en déduit que le rapport des largeurs équivalentes est

$$r_{12} = \frac{\lambda_1 (1 - e^{-2\tau_{0,2}})}{\lambda_2 (1 - e^{-\tau_{0,2}})} = 0.99123 \times \frac{(1 - e^{-2\tau_{0,2}})}{(1 - e^{-\tau_{0,2}})}$$

Cette fonction de $\tau_{0,2}$ est représentée sur la Fig. 4.15 et permet d'en déduire que

$$\tau_{0,2} \simeq 1.0 \quad \text{et} \quad \tau_{0,1} \simeq 2.0$$

On en déduit la largeur en longueur d'onde de chaque raie

$$\Delta\lambda_1 = \frac{W_1}{2(1 - e^{-\tau_{0,1}})} = 0.0960 \text{ nm} \quad \text{et} \quad \Delta\lambda_2 = \frac{W_2}{2(1 - e^{-\tau_{0,2}})} = 0.0966 \text{ nm}$$

ce qui permet de trouver la largeur en vitesse

$$\Delta v \simeq c \frac{\Delta\lambda_1}{\lambda_1} \simeq c \frac{\Delta\lambda_2}{\lambda_2} \simeq 73 \text{ km s}^{-1}.$$

Enfin, on peut en déduire la densité de colonne. En effet, on a

$$\tau_{0,2} = \beta \frac{f_2 N \lambda_2}{\Delta v} = \beta \frac{f_2 N \lambda_2^2}{c \Delta\lambda_2}$$

avec β la constante numérique qui apparaît dans la formule donnée plus haut reliant la densité de colonne à l'opacité. On a alors

$$N = \frac{c \tau_{0,2} \Delta\lambda_2}{\beta f_2 \lambda_2^2} = \frac{c \tau_{0,2} W_2}{2 \beta f_2 \lambda_2^2 (1 - e^{-\tau_{0,2}})}$$

qu'on peut réécrire

$$N = N(\text{Ca}^+) = 1.127 \cdot 10^{19} \frac{1}{f_2 (1 - e^{-\tau_{0,2}})} \left(\frac{W_2}{\text{nm}} \right) \left(\frac{\lambda_2}{\text{nm}} \right)^{-2}$$

on trouve $N(\text{Ca}^+) \simeq 4.29 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-2}$, qui est bien supérieure à la limite inférieure trouvée plus haut.

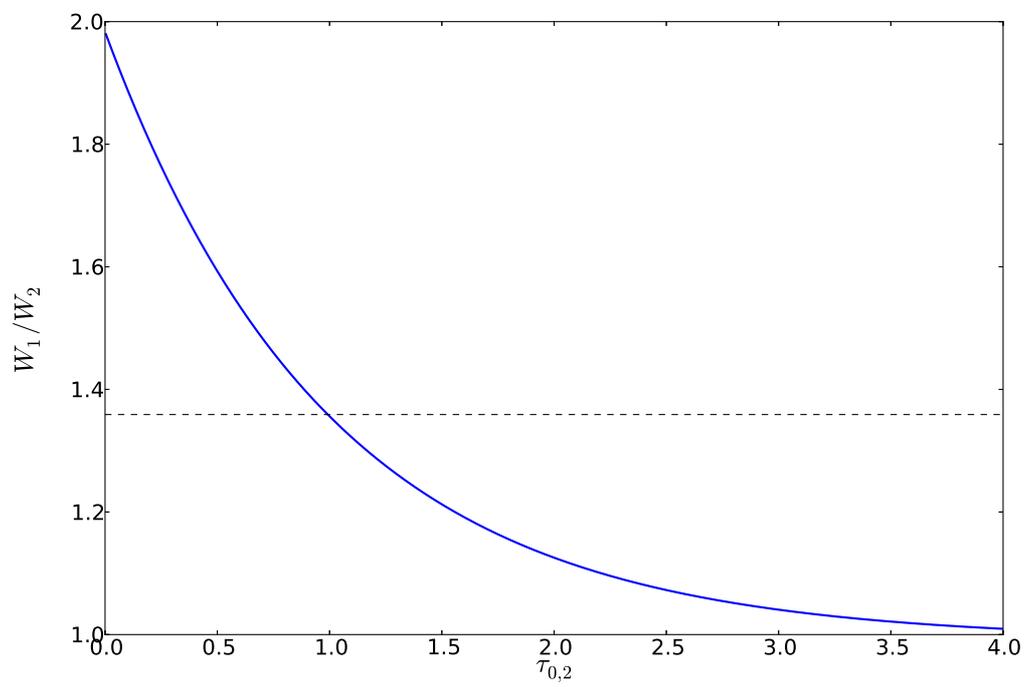


FIGURE 4.15 – Rapport des largeurs équivalentes en fonction de $\tau_{0,2}$.

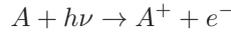
Compléments

Les calculs ci-dessous sont pour l'essentiel repris de [23].

4.7 Transitions libre-lié

4.7.1 Les relations d'Einstein-Milne

Les relations de Milne généralisent celles d'Einstein au cas d'une transition libre-lié, c'est-à-dire entre un niveau quantifié et un continuum. On suppose qu'un atome est photoionisé pour donner un ion et un électron libre de vitesse v , soit



On note n_0 la densité des atomes neutres, n_1 celle des ions, n_e celle des électrons libres, et $f(v)$ la distribution de vitesse de ces derniers, qu'on supposera Maxwellienne. En notant π_ν la probabilité de photoionisation par un photon de fréquence comprise entre ν et $\nu + d\nu$, le taux de photoionisation dans ce petit intervalle de fréquence est $n_0\pi_\nu I_\nu d\nu$. Le coefficient d'absorption de l'énergie radiative est alors $\alpha_\nu = h\nu\pi_\nu$. On note $F(v)$ la probabilité de recombinaison spontanée avec un électron de vitesse v à dv près, et $G(v)$ la probabilité de recombinaison induite correspondante. Le taux de recombinaisons avec des électrons de vitesse comprise entre v et $v + dv$ est alors $n_1 n_e f(v) [F(v) + G(v)I_\nu] v dv$.

Comme pour l'établissement des relations d'Einstein, on se place dans le cas particulier de l'équilibre thermodynamique, pour lequel les taux de photoionisation et de recombinaison sont égaux

$$n_0\pi_\nu I_\nu d\nu = n_1 n_e f(v) [F(v) + G(v)I_\nu] v dv$$

Notant que la fréquence ν du photon ionisant et la vitesse v de l'électron libre sont reliées par

$$h\nu = \chi + \frac{1}{2}m_e v^2$$

par conservation de l'énergie, on en déduit que $h d\nu = m_e v dv$, ce qui permet de relier les deux dans l'équation d'équilibre. De plus, à l'ETL, $I_\nu = B_\nu(T)$ et les populations des espèces prennent leurs valeurs à l'ETL, qu'on note n_0^E , n_1^E et n_e^E . On a donc

$$n_0^E \pi_\nu B_\nu(T) d\nu = \frac{h}{m_e} n_1^E n_e^E f(v) [F(v) + G(v)B_\nu(T)] dv$$

d'où l'on tire

$$[m_e n_0^E \pi_\nu - h n_1^E n_e^E f(v) G(v)] B_\nu(T) = h n_1^E n_e^E f(v) F(v)$$

et donc

$$B_\nu(T) = \frac{\frac{F(v)}{G(v)}}{\frac{m_e n_0^E \pi_\nu}{h n_1^E n_e^E f(v) G(v)} - 1}$$

La comparaison avec la fonction de Planck donne alors

$$\frac{F(v)}{G(v)} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \tag{4.4}$$

et

$$\frac{m_e n_0^E \pi_\nu}{h n_1^E n_e^E f(v) G(v)} = \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)$$

D'autre part, à l'ETL, $f(v)$ est la distribution Maxwellienne

$$f(v) = \left(\frac{m_e}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2kT}\right) 4\pi v^2$$

et les populations sont données par la loi de Saha

$$\frac{n_1^E n_e^E}{n_0^E} = \frac{2Z_1(T)}{Z_0(T)} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} \exp\left(-\frac{\chi}{kT}\right)$$

On a donc

$$\pi_\nu = \frac{h n_1^E n_e^E f(v) G(v)}{m_e n_0^E} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)$$

soit, en remplaçant,

$$\pi_\nu = \frac{hG(v)}{m_e} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \times \frac{2Z_1(T)}{Z_0(T)} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} \exp\left(-\frac{\chi}{kT}\right) \times \left(\frac{m_e}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2kT}\right) 4\pi v^2$$

l'équation de conservation de l'énergie permet de simplifier les exponentielles

$$\pi_\nu = \frac{hG(v)}{m_e} \frac{2Z_1(T)}{Z_0(T)} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} \left(\frac{m_e}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi v^2$$

et on obtient finalement

$$\pi_\nu = \frac{8\pi m_e^2 v^2}{h^2} \frac{Z_1(T)}{Z_0(T)} G(v) = \frac{4\pi m_e^2 v^2 c^2}{h^3 \nu^3} \frac{Z_1(T)}{Z_0(T)} F(v) \quad (4.5)$$

Les équations 4.4 et 4.5 sont valables hors ETL et constituent les *relations d'Einstein-Milne*.

4.7.2 Coefficient d'absorption et émissivité

Le coefficient d'absorption associé à cette transition lié-libre (photoionisation) est alors, en tenant compte du processus de recombinaison stimulée comme une absorption négative,

$$\kappa_\nu = h\nu \left[n_0 \pi_\nu - \frac{h}{m_e} n_1 n_e f(v) G(v) \right]$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\kappa_\nu = \alpha_\nu \left[n_0 - \frac{h}{m_e \pi_\nu} n_1 n_e f(v) G(v) \right] = \alpha_\nu \left[n_0 - \frac{h}{m_e} n_1 n_e f(v) G(v) \frac{m_e n_0^E}{h n_1^E n_e^E f(v) G(v)} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right]$$

en simplifiant, on obtient

$$\kappa_\nu = \alpha_\nu \left[n_0 - n_0^E \frac{n_1 n_e}{n_1^E n_e^E} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right]$$

qu'on met sous la forme

$$\kappa_\nu = \alpha_\nu \left[n_0 - n_0^* \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right]$$

avec n_0^* la densité des atomes neutres qu'on obtient en utilisant l'équation de Saha avec les vraies populations des ions et des électrons en lieu et place des valeurs à l'ETL, soit

$$n_0^* = n_1 n_e \frac{Z_0(T)}{2Z_1(T)} \frac{h^3}{(2\pi m_e kT)^{3/2}} \exp\left(\frac{\chi}{kT}\right) \quad (4.6)$$

Quand on se place à l'ETL, le coefficient d'absorption devient, comme attendu

$$\kappa_\nu^E = \alpha_\nu n_0^E \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right]$$

Il faut noter que pour cette absorption continuum, le terme stimulé est toujours calculé comme à l'ETL, ce qui n'est pas surprenant, car la recombinaison, qu'elle soit spontanée ou induite, est fondamentalement liée aux collisions entre particules, constitutives de la condition d'ETL. La seule différence est qu'il faut faire ce calcul avec les vraies populations n_1 et n_e , qui peuvent être hors-ETL.

L'émissivité a quant à elle pour expression

$$\epsilon_\nu = h\nu \times n_1 n_e f(v) F(v) \frac{h}{m_e}$$

en introduisant $\alpha_\nu = h\nu\pi_\nu$, on en tire

$$\epsilon_\nu = \frac{h}{m_e \pi_\nu} n_1 n_e f(v) F(v) \alpha_\nu = \frac{h}{m_e} n_1 n_e f(v) F(v) \alpha_\nu \frac{h^3 \nu^3}{4\pi m_e^2 v^2 c^2} \frac{Z_0(T)}{Z_1(T) F(v)}.$$

En simplifiant et en introduisant les expressions de $f(v)$ et l'expression 4.6 pour remplacer $n_1 n_e$,

$$\epsilon_\nu = n_0^* \frac{2Z_1(T)}{Z_0(T)} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} \exp\left(-\frac{\chi}{kT}\right) \alpha_\nu \frac{h^4 \nu^3}{4\pi m_e^2 v^2 c^2} \frac{Z_0(T)}{Z_1(T)} \left(\frac{m_e}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2kT}\right) 4\pi v^2$$

qui se simplifie considérablement

$$\epsilon_\nu = n_0^* \alpha_\nu \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$$

et prend la forme suivante en introduisant la fonction de Planck

$$\epsilon_\nu = n_0^* \alpha_\nu B_\nu(T) \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right].$$

ce qui donne la loi de Kirchhoff $\epsilon_\nu = \kappa_\nu^* B_\nu(T)$ en définissant le coefficient d'absorption

$$\kappa_\nu^* = n_0^* \alpha_\nu \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right]$$

qui est la forme trouvée à l'ETL dans laquelle la population des atomes neutres est celle calculée avec la loi de Saha (ETL) mais avec les vraies populations (hors ETL *a priori*) des ions et des électrons libres. Le fait qu'on trouve cette forme pour l'émissivité est lié au caractère collisionnel de l'émission continuum libre-lié.

Dans le cas général, il faudra sommer les coefficients d'absorption et les émissivités associés aux raies et aux continua. Voir [23] pour les expressions correspondantes.