Chapitre 3 Les lois de l'équilibre thermique

Dans des milieux assez denses et opaques s'établit un équilibre thermodynamique (ET - TE en anglais) au sein de la matière et entre la matière et le rayonnement. Des lois simples permettent alors de décrire les caractéristiques du rayonnement (distribution spectrale de I_{ν}) et de la matière (excitation des niveaux, distribution des vitesses, états d'ionisation, ...). Cette description peut être étendue à des systèmes où l'équilibre thermodynamique varie de point en point, ce qu'on nomme ETL pour Equilibre Thermodynamique Local (LTE en anglais). Cette situation idéale est généralement prise pour référence, même si, fréquemment, les milieux astrophysiques ne sont pas à l'ETL (on verra dans le chapitre 5 comment on peut décrire ces situations).

3.1 Rayonnement de corps noir

Considérons une enceinte, maintenue à la température T par un thermostat, contenant un champ de rayonnement, et supposons que cette enceinte soit entièrement opaque à toutes les fréquences, ce qui revient à supposer que l'épaisseur optique $\tau_{\nu} \to \infty$ quelle que soit la fréquence ν . Du fait des collisions entre les photons enfermés dans l'enceinte avec les parois, qui amènent un échange d'énergie entre photons et matière, un équilibre va s'établir entre la matière constituant ces parois et le rayonnement, et donc entre les photons eux-mêmes. Le système ainsi constitué est appelé *corps noir*, appellation qui fait référence à son épaisseur optique infinie à toutes les fréquences. Nous allons établir les propriétés du rayonnement du corps noir, qu'on peut mesurer en perçant un trou suffisamment petit dans la paroi de l'enceinte pour que l'équilibre ne soit pas fondamentalement perturbé.

3.1.1 Loi de Kirchhoff

Démonstration

Une propriété importante du rayonnement du corps noir est que son intensité spécifique I_{ν} ne dépend que de la température ¹, ce qui constitue la *loi de Kirchhoff.* Pour la démontrer, considérons deux enceintes de formes arbitraires à la même température T percées chacune d'un petit trou en regard, comme indiqué sur la figure 3.1, et accolons ces deux trous l'un à l'autre au travers d'un filtre laissant librement passer le rayonnement dans un petit intervalle de fréquence $\delta\nu$ autour de ν , et complètement opaque dans tout le reste du spectre.

Si à cette fréquence ν l'intensité du rayonnement dans l'enceinte (1) était supérieure à celle du rayonnement dans l'enceinte (2), soit $I_{\nu}(1) > I_{\nu}(2)$, de l'énergie radiative passerait spontanément de (1) vers (2) - i.e. $F_{\nu} \neq 0$ - et il serait possible de l'utiliser pour faire tourner un moteur. Ceci serait en contradiction avec le second principe de la thermodynamique, puisqu'alors on pourrait tirer du

^{1.} et de la fréquence, bien entendu...



FIGURE 3.1 – Schéma d'une expérience de pensée permettant de démontrer la loi de Kirchhoff : deux enceintes à la température T, séparées par un filtre de largeur spectrale $\delta \nu$.

travail d'un système monotherme. Par conséquent, les intensités spécifiques dans les deux enceintes sont nécessairement égales, quelles que soient leurs formes. On en déduit la loi de Kirchhoff, qu'on écrit sous la forme

$$\lim_{\tau_{\nu} \to \infty} I_{\nu} = B_{\nu}(T) \quad \text{on plus simplement} \quad I_{\nu} = B_{\nu}(T)$$

Ce rayonnement est nécessairement isotrope et non polarisé, du fait des interactions multiples (en nombre infini, en toute rigueur) que subissent les photons avec les parois de l'enceinte.

Emission thermique

Revenons à notre enceinte unique à la température T, et plaçons maintenant, à l'intérieur de l'enceinte et juste devant le trou, un corps matériel, lui aussi à la température T (voir la figure 3.2). Que vaut la fonction source S_{ν} de ce corps matériel? Sachant que l'intensité du rayonnement incident sur le corps est $B_{\nu}(T)$, d'après ce qui précède, l'équation du transfert

$$\frac{\mathrm{d}I_{\nu}}{\mathrm{d}\tau_{\nu}} = S_{\nu} - I_{\iota}$$

indique que :

si
$$S_{\nu} > B_{\nu}(T) \implies \frac{\mathrm{d}I_{\nu}}{\mathrm{d}\tau_{\nu}} > 0 \implies I_{\nu} > B_{\nu}(T)$$

si $S_{\nu} < B_{\nu}(T) \implies \frac{\mathrm{d}I_{\nu}}{\mathrm{d}\tau_{\nu}} < 0 \implies I_{\nu} < B_{\nu}(T)$

mais physiquement la présence d'un corps matériel à la même température T que l'enceinte ne saurait altérer le rayonnement émergent (les parois de l'enceinte sont elles-même un corps matériel à T!), de sorte qu'on en déduit que la fonction source est

$$S_{\nu} = \frac{\epsilon_{\nu}}{\kappa_{\nu}} = B_{\nu}(T)$$

Cette expression de la loi de Kirchhoff relie de manière fondamentale les propriétés d'absorption et d'émission des corps matériels en équilibre thermique. Elle fournit l'expression de l'émissivité



FIGURE 3.2 – Emission thermique : source thermique placée en sortie de l'enceinte corps noir.

pour un milieu à l'équilibre thermique, l'intensité émise étant ensuite obtenue par intégration de long de la ligne de visée, suivant l'équation du transfert

$$\frac{\mathrm{d}I_{\nu}}{\mathrm{d}\tau_{\nu}} = B_{\nu}(T) - I_{\nu}$$

Il convient donc de bien distinguer l'émission thermique, pour laquelle $S_{\nu} = B_{\nu}(T)$, de l'émission de corps noir, pour laquelle $I_{\nu} = B_{\nu}(T)$. La seconde est la limite de la première lorsque l'épaisseur optique tend vers l'infini.

3.1.2 Loi de Planck

La forme de $B_{\nu}(T)$ a été obtenue par Planck en supposant que le rayonnement est constitué de quanta d'énergie, les photons. Cette hypothèse était à l'époque (1900) plutôt iconoclaste, étant donnés les succès de la théorie électromagnétique de Maxwell, pour laquelle la nature ondulatoire de la lumière ne fait aucun doute. Pour faire ce calcul en s'appuyant sur des méthodes de physique statistique, il faut obtenir d'une part la densité d'états des photons dans une enceinte de type corps noir, et d'autre part trouver le nombre moyen de photons dans chacun de ces états. Le produit de ces deux quantités donnera ainsi accès à la quantité \mathcal{N}_{ν} , reliée à l'intensité spécifique par $I_{\nu} = h\nu c \mathcal{N}_{\nu}$.

Densité d'états des photons du corps noir

Pour simplifier, considérons une enceinte opaque à tout rayonnement de forme parallélépipédique rectangle, de volume $V = L_x L_y L_z$, et un photon de fréquence ν se propageant selon la direction n. L'impulsion du photon et son vecteur d'onde sont respectivement

$$p = \frac{E}{c}n = \frac{h\nu}{c}n$$
 et $k = \frac{p}{\hbar} = \frac{2\pi\nu}{c}n = \frac{2\pi}{\lambda}n$

et comme on suppose qu'il n'y a pas d'interaction entre les photons, chacun d'eux est représenté par une fonction d'onde plane

$$\psi(m{r}) \propto e^{im{k}.m{r}}$$



FIGURE 3.3 – Quantification du vecteur d'onde (ici en deux dimensions). Les deux spins possibles d'un photon dans un état d'impulsion donné sont représentés par les cercles fléchés.

avec des conditions aux limites périodiques, qui impliquent à leur tour que

$$k_x L_x = 2\pi n_x$$
 $k_y L_y = 2\pi n_y$ $k_z L_z = 2\pi n_z$ avec n_x, n_y, n_z trois entiers relatifs.

Le vecteur d'onde prend alors des valeurs discrètes, sur un réseau cubique (Fig. 3.3),

$$\boldsymbol{k} = 2\pi \left(\frac{n_x}{L_x} \boldsymbol{u}_x + \frac{n_y}{L_y} \boldsymbol{u}_y + \frac{n_z}{L_z} \boldsymbol{u}_z \right).$$

Chaque état occupe donc dans l'espace des vecteurs d'onde un volume

$$\delta^3 \boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{L_x} \times \frac{2\pi}{L_y} \times \frac{2\pi}{L_z} = \frac{8\pi^3}{V}$$

et à chacun de ces états d'impulsion correspondent deux états de spin, donc un volume élémentaire d³k contient au total dN états possibles, avec

$$\mathrm{d}N = 2\frac{\mathrm{d}^{3}\boldsymbol{k}}{\delta^{3}\boldsymbol{k}} = 2 \times \frac{V}{8\pi^{3}} \times k^{2} \mathrm{d}k \mathrm{d}\Omega = \frac{V}{4\pi^{3}} \left(\frac{2\pi}{c}\right)^{3} \nu^{2} \mathrm{d}\nu \mathrm{d}\Omega = 2\frac{V\nu^{2}}{c^{3}} \mathrm{d}\nu \mathrm{d}\Omega$$

La densité d'états par unité de volume, par intervalle de fréquence et par unité d'angle solide est donc

$$\rho(\nu) = \frac{1}{V} \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\Omega} = \frac{2\nu^2}{c^3}$$

Nombre moyen d'occupation d'un état

Les photons sont des bosons, ils obéissent donc à la statistique quantique de Bose-Einstein, selon laquelle le nombre moyen $\langle N(E) \rangle$ de particules dans un état d'énergie E est donné par

$$\langle N(E) \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-\mu}{kT}\right) - 1}$$

où μ est le potentiel chimique. Comme les photons sont des particules de masse nulle, dont le nombre n'est pas nécessairement conservé lors des interactions avec les parois de l'enceinte, ce potentiel chimique est nul. Avec $E = h\nu$, on en déduit que les photons suivent la statistique de Bose, avec un nombre d'occupation moyen par état

$$\langle N_{\nu} \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

Loi de Planck

Il est alors simple d'écrire l'intensité spécifique du rayonnement de corps noir en passant par la grandeur $\mathcal{N}_{\nu}(\boldsymbol{n})$ introduite au chapitre 2, telle que $\mathcal{N}_{\nu}(\boldsymbol{n}) d\nu d\Omega$ est le nombre de photons par unité de volume dont la direction de propagation est \boldsymbol{n} à $d\Omega$ près et la fréquence ν à $d\nu$ près, car on a

$$\mathcal{N}_{\nu} = \rho(\nu) \left\langle N_{\nu} \right\rangle$$

et donc

$$B_{\nu}(T) = I_{\nu} = h\nu c \mathcal{N}_{\nu} = h\nu c\rho(\nu) \langle N_{\nu} \rangle = h\nu c \times \frac{2\nu^2}{c^3} \times \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

On en déduit la loi de Planck, donnant l'intensité spécifique du rayonnement de corps noir

$$B_{\nu}(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$
$$B_{\lambda}(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1}$$

La seconde expression est obtenue via la relation $\nu I_{\nu} = \lambda I_{\lambda}$ vue au chapitre 2.

Courbes représentatives

À une fréquence ν donnée, si $T_2 > T_1$, on a immédiatement $B_{\nu}(T_2) > B_{\nu}(T_1)$ et $B_{\lambda}(T_2) > B_{\lambda}(T_1)$, ce qui montre que les courbes représentatives de l'émission du corps noir sont "emboîtées", c'est-à-dire qu'à toute fréquence, elles se placent les unes par rapport aux autres de façon monotone croissante avec la température, comme indiqué sur les Figs. 3.4, 3.5 et 3.6.

3.1.3 Loi de déplacement de Wien

Cas de $B_{\nu}(T)$

À chaque température, la courbe $B_{\nu}(T)$ présente un maximum en fonction de la fréquence dont la position est donnée par la *loi de déplacement de Wien*. Celle-ci est obtenue en posant

$$x = \frac{h\nu}{kT}$$

On écrit alors la loi de Planck sous la forme

$$B_{\nu} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} = \frac{2h}{c^2} \left(\frac{kT}{h}\right)^3 \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{2k^3T^3}{c^2h^2} \frac{x^3}{e^x - 1}$$



FIGURE 3.4 – Courbes de l'émission du corps noir B_{ν} , pour T = 1 K, 10 K, 10^2 K , 10^3 K , 10^4 K , 10^5 K , 10^6 K , 10^7 K et 10^8 K (de bas en haut sur chaque sous-figure), en fonction de la longueur d'onde λ (en haut), et de la fréquence ν (en bas).



FIGURE 3.5 – Courbes de l'émission du corps noir B_{λ} , pour T = 1 K, 10 K, 10^2 K , 10^3 K , 10^4 K , 10^5 K , 10^6 K , 10^7 K et 10^8 K (de bas en haut sur chaque sous-figure), en fonction de la longueur d'onde λ (en haut), et de la fréquence ν (en bas).



FIGURE 3.6 – Courbes de l'émission du corps noir $\nu B_{\nu} = \lambda B_{\lambda}$, pour T = 1 K, 10 K, 10^2 K , 10^3 K , 10^4 K , 10^5 K , 10^6 K , 10^7 K et 10^8 K (de bas en haut sur chaque sous-figure), en fonction de la longueur d'onde λ (en haut), et de la fréquence ν (en bas).

de sorte que la condition de maximisation devient

$$\frac{\partial B_{\nu}}{\partial \nu} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial B_{\nu}}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x^3}{e^x - 1} \right] = 0$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x^3}{e^x - 1} \right] = \frac{3x^2}{e^x - 1} - \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{x^2}{e^x - 1} \left[3 - \frac{x e^x}{e^x - 1} \right] = \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} \left[(3 - x)e^x - 3 \right]$$

La solution cherchée est donc telle que $e^x = 3/(3-x)$. C'est nécessairement un maximum, étant donné que B_{ν} est positive et tend vers zéro en $\nu \to 0$ et $\nu \to +\infty$. La solution triviale x = 0 n'étant pas acceptable, on retient $x = x_{\max} \approx 2.82$ et donc

$$\frac{\nu_{\text{max}}}{T} \approx 2.82 \frac{k}{h} = 5.88 \, 10^{10} \text{ Hz.K}^{-1}$$

On trouve cette valeur par résolution numérique de l'équation implicite, mais on peut aussi en trouver une approximation en remarquant que x_{\max} doit être proche de 3 et en écrivant $x_{\max} = 3-\epsilon$, ce qui donne pour l'équation implicite $e^3 e^{-\epsilon} \simeq e^3 = 3/\epsilon$ d'où $\epsilon \simeq 3e^{-3} \simeq 0.15$ et $x_{\max} \simeq 2.85$.

Cas de $B_{\lambda}(T)$

Pour obtenir la longueur d'onde λ_{\max} maximisant $B_{\lambda}(T)$, on pose

$$y = \frac{hc}{\lambda kT}$$

et on écrit

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{y^5}{e^y - 1} \right] = \frac{5y^4}{e^y - 1} - \frac{y^5 e^y}{(e^y - 1)^2} = \frac{y^4}{e^y - 1} \left[5 - \frac{y e^y}{e^y - 1} \right]$$

Il faut donc résoudre l'équation implicite $e^y = 5/(5-y)$, qui donne $y_{\text{max}} \approx 5(1-e^{-5}) \simeq 4.96$ et

 $\lambda_{\rm max}T = 2.89 \ 10^{-3} \ {\rm K.m}$

On n'a pas $\lambda_{\max} \nu_{\max} = c$ parce qu'on ne maximise pas la même fonction. On a en fait

$$\lambda_{\max} \, \nu_{\max} = c \frac{x_{\max}}{y_{\max}} \approx 0.57 c$$

Cas de $\nu B_{\nu} = \lambda B_{\lambda}$

Dans ce cas, on doit maximiser la même fonction, à savoir

$$\nu B_{\nu} = \lambda B_{\lambda} = \frac{2k^4 T^4}{c^2 h^3} \frac{x^4}{e^x - 1}$$

On obtient le maximum cherché via l'équation implicite

$$e^x = \frac{4}{4-x}$$

qui donne $\nu_{\rm max}'$ et $\lambda_{\rm max}' = c/\nu_{\rm max}'$ avec

$$\frac{\nu'_{\text{max}}}{T} \approx 3.92 \frac{k}{h} = 8.17 \, 10^{10} \text{ Hz.K}^{-1} \qquad \text{et} \qquad \lambda'_{\text{max}} T = 3.67 \, 10^{-3} \text{ K.m}$$

À titre d'exemple, pour des étoiles de divers types spectraux, dont le Soleil (G2),

Type spectral	O5	B5	A5	F5	G2	G5	K5	M5
T[K]	54000	15200	8310	6700	5778	5660	4400	3200
$\nu_{\rm max} [10^{15} {\rm Hz}]$	3.17	0.89	0.49	0.39	0.34	0.33	0.26	0.19
$\lambda_{\rm max} [\mu { m m}]$	0.05	0.19	0.35	0.43	0.50	0.51	0.66	0.91
$\nu'_{\rm max} [10^{15} {\rm Hz}]$	4.41	1.24	0.68	0.55	0.47	0.46	0.36	0.26
$\lambda'_{\rm max} [\mu { m m}]$	0.07	0.24	0.44	0.55	0.64	0.65	0.83	1.15
Domaine	UV extrême	UV lointain	proche UV	bleu	jaune	jaune	rouge	proche IR

3.1.4 Loi de Stefan

La loi de Stefan exprime que la puissance rayonnée par élément de surface d'un corps noir à la température T est proportionnelle à T^4 . On propose ci-dessous deux dérivations de cette loi.

Dérivation à partir de la loi de Planck

Le flux total est le flux sortant dans le demi-espace extérieur à la source, calculé au chapitre 2, intégré sur la fréquence, soit

$$F = \int_0^\infty F_\nu^+ \mathrm{d}\nu.$$

Comme le rayonnement du corps noir est isotrope, on a $F_{\nu}^{+} = \pi I_{\nu}$, et donc

$$F = \int_0^\infty F_\nu^+ \mathrm{d}\nu = \pi \int_0^\infty I_\nu \mathrm{d}\nu = \pi \int_0^\infty B_\nu(T) \mathrm{d}\nu = \pi \frac{2(kT)^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} \mathrm{d}x = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} T^4 = \sigma_S T^4,$$

où l'on a utilisé l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} \mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{15}.$$

Ce résultat constitue donc la loi de Stefan

$$F = \sigma_S T^4$$

où la constante de Stefan vaut $\sigma_S = 5.67 \ 10^{-8} \ \mathrm{W.m}^{-2}.\mathrm{K}^{-4}$. La densité volumique d'énergie est

$$u = \int_0^\infty u_\nu \mathrm{d}\nu = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty I_\nu \mathrm{d}\nu = \frac{4F}{c} = \frac{4\sigma_S}{c} T^4$$

et la pression de radiation est

$$p = \int_0^\infty p_\nu d\nu = \int_0^\infty \frac{u_\nu}{3} d\nu = \frac{u}{3} = \frac{4\sigma_S}{3c} T^4$$

Dérivation thermodynamique

On souhaite, par des raisonnements de thermodynamique classique, retrouver la loi de Stefan et établir quelques résultats utiles concernant le rayonnement du corps noir. À cet effet on considère une enceinte de température T, dans laquelle le rayonnement est à l'équilibre thermodynamique avec l'enceinte. Celle-ci ne contient pas de gaz matériel mais uniquement des photons, et est reliée à un piston, de sorte que V puisse varier sous l'effet de la pression de radiation. L'énergie interne du gaz de photons s'écrit U(T, V) = u(T)V, expression dans laquelle la densité d'énergie u est une grandeur intensive, uniforme, indépendante du volume, et ne dépendant donc que de la température, conformément à la loi de Kirchhoff.

On applique le premier principe de la thermodynamique au système du gaz de photons, en utilisant la relation entre densité d'énergie et pression pour un rayonnement isotrope :

$$dU = \delta Q + \delta W = C_v dT + (l-p)dV = C_v dT + \left(l - \frac{u}{3}\right) dV$$

d'une part, et

$$dU = d(uV) = Vdu + udV = V\frac{du}{dT}dT + udV$$

d'autre part. Par identification, on a

$$C_v = V \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}T}$$
 et $l = \frac{4u}{3}$

Appliquons maintenant le second principe (ne pas confondre l'entropie avec la fonction source!)

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T} = \frac{C_v}{T}\mathrm{d}T + \frac{l}{T}\mathrm{d}V = \frac{V}{T}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}T}\mathrm{d}T + \frac{4u}{3T}\mathrm{d}V$$

La relation de Maxwell (égalité des dérivées croisées) appliquée à la différentielle exacte dS donne

$$\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{4u}{3T}\right)\right]_{V} = \left[\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{V}{T}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}T}\right)\right]_{T} \Rightarrow \frac{4}{3T^{2}}\left[T\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}T} - u\right] = \frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}T} \Rightarrow \frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}T} = \frac{4u}{T^{2}}$$

Autrement dit

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = 4\frac{\mathrm{d}T}{T} \Rightarrow u = aT^4$$

Notons que cette relation ne donne pas la valeur de a. En fait, comme on l'a vu juste avant,

$$u = \frac{4\sigma_S}{c}T^4$$
 soit $a = \frac{4\sigma_S}{c}$

On en tire aussi l'expression de l'entropie du gaz de photons

$$dS = \frac{V}{T}\frac{du}{dT}dT + \frac{4u}{3T}dV = 4aVT^{2}dT + \frac{4aT^{3}}{3}dV = \frac{4a}{3}\left(3VT^{2}dT + T^{3}dV\right) = \frac{4a}{3}d\left(VT^{3}\right)$$

soit, avec le troisième principe de la thermodynamique (S = 0 à température nulle)

$$S = \frac{4a}{3}VT^3 = \frac{16\sigma_S}{3c}VT^3$$

Cette expression montre que pour un champ de rayonnement de corps noir en évolution adiabatique réversible (dS = 0), le produit T^3V est une constante. Par exemple, la température du fond diffus cosmologique (CMB) varie avec le facteur d'échelle R de l'Univers et avec le redshift z comme²

$$T_{\rm CMB} \propto \frac{1}{R} \propto 1 + z$$

3.1.5 Loi de Rayleigh-Jeans et loi de Wien

On peut développer $B_{\nu}(T)$ au premier ordre aux basses fréquences, ce qui donne la *loi de* Rayleigh-Jeans, et aux hautes fréquences, ce qui donne la *loi de Wien*. Dans le premier cas :

$$x = \frac{h\nu}{kT} \ll 1 \Longrightarrow \frac{x^3}{e^x - 1} \approx x^2$$

^{2.} L'hypothèse d'une évolution adiabatique réversible pour le gaz de photons du CMB est loin d'être évidente...

donc pour $\nu \ll (kT)/h$

$$B_{\nu} \approx \frac{2k^3 T^3}{c^2 h^2} x^2 = \frac{2k^3 T^3}{c^2 h^2} \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 = \frac{2kT\nu^2}{c^2}$$

de même, en fonction de la longueur d'onde, pour $\lambda \gg (hc)/(kT)$

$$B_{\lambda} \approx \frac{2ckT}{\lambda^4}$$

Dans le second cas, soit pour $x \gg 1$:

$$\frac{x^3}{e^x - 1} \approx x^3 e^{-x}$$

donc pour $\nu \gg (kT)/h$

$$B_{\nu} \approx \frac{2k^{3}T^{3}}{c^{2}h^{2}}x^{3}e^{-x} = \frac{2h\nu^{3}}{c^{2}}\exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$$

et de même, pour $\lambda \ll (hc)/(kT)$

$$B_{\lambda} \approx \frac{2hc^2}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{hc}{\lambda kT}\right)$$

On a donc, en résumé

$$B_{\nu,\mathrm{RJ}} = \frac{2kT\nu^2}{c^2} \quad \text{et} \quad B_{\lambda,\mathrm{RJ}} = \frac{2kcT}{\lambda^4} \quad \text{(Loi de Rayleigh-Jeans)}$$
$$B_{\nu,\mathrm{W}} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \quad \text{et} \quad B_{\lambda,\mathrm{W}} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{hc}{\lambda kT}\right) \quad \text{(Loi de Wien)}$$

Les courbes correspondantes sont représentées sur la Fig. 3.7.

La loi de Rayleigh-Jeans est particulièrement utilisée en radio-astronomie, car à ces fréquences (disons $\nu \sim 100$ GHz) on a typiquement un rapport $h\nu/k \sim 5$ K, généralement inférieur aux températures mises en jeu dans les objets étudiés. La loi de Wien, inversement, est appliquée en astronomie X.

Notons que dans la limite de Rayleigh-Jeans, à savoir la limite basse énergie, il faut beaucoup de photons pour obtenir une énergie kT, de sorte que la quantification de la lumière n'apparaît pas dans cette limite. L'absence de la constante de Planck dans l'expression de $B_{\nu,RJ}$ en est la signature. Inversement, à haute fréquence, chaque photon transporte une part non négligeable de l'énergie du champ et leur caractère discret devient manifeste. C'est d'ailleurs pour résoudre le problème de la *catastrophe ultraviolette* que Max Planck a été amené à postuler la quantification de l'énergie du champ électromagnétique et donc l'existence des photons. En effet, classiquement, on doit considérer que chaque mode (ou état, comme on les a appelés précédemment) du champ porte en moyenne une énergie kT, de sorte que la densité spectrale et volumique d'énergie est, dans cette approche,

$$u_{\nu} = \int_{4\pi} \rho(\nu) \times kT \mathrm{d}\Omega = \frac{8\pi kT\nu^2}{c^3}$$

Ce calcul classique de l'énergie du champ amène donc à l'expression de Rayleigh-Jeans à toutes les fréquences. On a alors, en intégrant sur le spectre,

$$u = \int_0^\infty u_\nu \mathrm{d}\nu = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \frac{2kT\nu^2}{c^2} \mathrm{d}\nu = \infty$$

ce qui constitue la catastrophe ultraviolette.



FIGURE 3.7 – Loi de Planck (en noir), loi de Rayleigh-Jeans (en bleu) et loi de Wien (en rouge), pour un corps noir à T = 5800 K.

3.1.6 Températures caractéristiques

Température de brillance

Le corps noir est pris comme référence pour définir la température de brillance, $T_b(\nu)$, d'une source astrophysique par la relation

$$I_{\nu} = B_{\nu} \left(T_b \right), \tag{3.1}$$

qui exprime que T_b est la température du corps noir émettant la même intensité spécifique que la source considérée à la fréquence ν . De manière générale, la température de brillance dépend donc de la fréquence d'observation ν . L'exception à cette règle est bien entendu le cas d'une source ayant un spectre de corps noir à la température T. Dans ce cas, $T_b = T$ est indépendante de ν . L'expression générale de la température de brillance est donc

$$T_b(\nu) = \frac{h\nu}{k} \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{2h\nu^3}{c^2 I_\nu}\right)}$$

mais elle est particulièrement simple lorsque l'approximation de Rayleigh-Jeans peut être utilisée, par exemple en radioastronomie. On a alors

$$T_b(\nu) = \frac{c^2 I_\nu}{2k\nu^2}$$

Température radiative

On définit de même la température radiative T_r par $J_{\nu} = B_{\nu}(T_r)$. Celle-ci est identique à la température de brillance T_b dans le cas d'un rayonnement isotrope.

Température de couleur

Lorsqu'une source émet un spectre dont la forme est proche de celle d'un corps noir, mais sans échelle verticale absolue parce que la taille et la distance de la source sont inconnues, on peut



FIGURE 3.8 – Dérivée de la fonction de Planck $\partial B_{\nu}/\partial \nu$ pour différentes températures.

définir une température de couleur T_c via un ajustement du spectre par une fonction de Planck, ajustement qui peut se limiter à déterminer le pic d'émission et à en déduire une température par la loi de déplacement de Wien. Bien entendu, si la source a un spectre de corps noir à la température T, alors $T_c = T_b = T$.

On trouve parfois comme définition de la température de couleur l'écriture de l'égalité de la pente du spectre observé au voisinage de ν et de celle du corps noir à cette même fréquence, soit

$$\frac{\mathrm{d}I_{\nu}}{\mathrm{d}\nu}\left(\nu\right) = \frac{\partial B_{\nu}}{\partial\nu}(\nu, T_c). \tag{3.2}$$

En général, on ne peut écrire T_c explicitement, mais dans l'approximation de Rayleigh-Jeans on a

$$T_c(\nu) = \frac{c^2}{4k\nu} \frac{\mathrm{d}I_{\nu}}{\mathrm{d}\nu} \left(\nu\right)$$

C'est d'ailleurs dans cette approximation que cette définition (3.2) de T_c peut être utile, car on se convaincra facilement (voir la Fig. 3.8) que sa détermination n'est univoque que dans le cas d'une pente positive.

Température effective

Enfin, la température effective T_{eff} est celle du corps noir qui émet un flux identique à celui de la source observée sur l'ensemble du spectre. Ce paramètre est donc défini par $F = \sigma_S T_{\text{eff}}^4$, soit

$$T_{\rm eff} = \left(\frac{F}{\sigma_S}\right)^{1/4}$$

Bien entendu, si la source est un corps noir à la température T, on a également $T_{\text{eff}} = T$.



FIGURE 3.9 – Spectre de l'émission du corps noir cosmologique (CMB) mesuré par l'instrument FIRAS à bord de la mission COBE [22]

3.2 Exemples

3.2.1 Rayonnement cosmologique

Le rayonnement du fond diffus cosmologique (CMB), prédit³ par les travaux de Alpher, Herman et Gamow en 1948 [1, 2, 12] et découvert par Penzias et Wilson en 1965 [30], ne présente aucune déviation spectrale par rapport à la loi de Planck, comme le montre la Fig. 3.9. Les barres d'erreur sur ce spectre mesuré par COBE/FIRAS en 1990 [22] représentent 400σ , ce qui signifie que l'incertitude-type σ sur chaque point de mesure est extrêmement faible! Le pic d'émission de I_{ν} se trouve aux alentours de 1.87 mm de longueur d'onde, soit une fréquence de 160 GHz, ce qui correspond à une température du CMB à l'époque actuelle de $T_{\rm CMB} = 2.725 \, {\rm K}$. Le modèle cosmologique standard prédit que cette température varie avec le redshift comme $T_{\rm CMB}(z) = 2.725(1+z)$, résultat bien vérifié par la spectroscopie de quasars lointains en utilisant des transitions d'espèces chimiques (CN par exemple) comme "thermomètres". L'origine de ce rayonnement se situe environ 380000 ans après le Big Bang, lorsque la température de l'Univers est descendue au dessous de ~ 3000 K. Les protons et les électrons du plasma ont alors pu se recombiner, faisant chuter l'épaisseur optique jusqu'alors dominée par la diffusion Thomson. L'Univers est devenu essentiellement transparent, et ce sont les photons ainsi libérés qui nous parviennent sous la forme du rayonnement cosmologique. Le spectre d'émission du CMB n'est isotrope que pour un observateur fixe dans le référentiel lié à la source du CMB. Pour un observateur se déplaçant à la vitesse v dans ce référentiel, deux effets de relativité restreinte doivent être pris en compte. D'une part, la fréquence ν_o du rayonnement observé est liée à celle ν_e du rayonnement émis par la relation de Doppler-Fizeau

$$\frac{\nu_o}{\nu_e} = \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c - v \cos \vartheta}$$

^{3.} On trouvera une intéressante description historique de cette découverte dans [29].

où ϑ est l'angle entre le vecteur \boldsymbol{v} et la direction \boldsymbol{n} d'observation, et $\boldsymbol{v} = ||\boldsymbol{v}||$. D'autre part, la densité de photons (voir Eq. 2.2) \mathcal{N}_o reçus par l'observateur en mouvement est liée à celle \mathcal{N}_e dans le référentiel du CMB par $\mathcal{N}_o = \mathcal{N}_e (\nu_o/\nu_e)^2$ [28]. On en déduit que

$$I_o = h\nu_o c \mathcal{N}_o = h\nu_e \times \left(\frac{\nu_o}{\nu_e}\right) \times c \mathcal{N}_e \left(\frac{\nu_o}{\nu_e}\right)^2 = B_{\nu_e} \left(T_{\rm CMB}\right) \left(\frac{\nu_o}{\nu_e}\right)^3 = \frac{2h\nu_o^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu_o}{k} \times \frac{\nu_e}{\nu_o T_{\rm CMB}}\right) - 1}$$

ce qui démontre que l'intensité spécifique $I_o(\vartheta)$ du CMB observé dans la direction ϑ est celle d'un corps noir à une température

$$T(\vartheta) = T_{\rm CMB} \frac{\nu_o}{\nu_e} = T_{\rm CMB} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta}$$

Comme $v \ll c$, on peut faire un développement limité de $T(\vartheta)$ au premier ordre en v/c

$$T(\vartheta) \simeq T_{\rm CMB} \left(1 + \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)$$

ce qui montre que, suivant que l'observateur regarde dans la direction de son mouvement par rapport au CMB ou dans la direction opposée, il observera un corps noir cosmologique plus chaud ou plus froid. C'est ce qui est représenté sur la Fig. 3.10, issue des mesures de COBE. À titre d'exemple, le satellite WMAP a mesuré l'amplitude crête-à-crête du dipôle et a trouvé $\Delta T_{\text{dipole}} = 6.692 \text{ mK}$, ce qui permet de déduire la vitesse v du système solaire par rapport au référentiel du CMB, soit

$$v = \frac{c}{2} \frac{\Delta T}{T_{\rm CMB}} \simeq 370 \,\rm km \, s^{-1}$$

Cette vitesse correspond à la superposition des mouvements de la Terre autour du Soleil

$$v_{\text{Terre/Soleil}} \simeq 30 \, \text{km s}^{-1},$$

du système solaire autour du centre Galactique

$$v_{\rm Soleil/Galaxie} \simeq 225 \, \rm km \, s^{-1}$$
,

et du mouvement propre de la Galaxie par rapport au groupe local de galaxies. Après correction de cet effet systématique, le rayonnement du fond diffus cosmologique n'est cependant pas parfaitement isotrope : il présente des fluctuations relatives de l'ordre de $\delta T_{\rm CMB}/T_{\rm CMB} \sim 10^{-5}$. Ces fluctuations primordiales sont interprétées comme étant les graines à partir desquelles se sont formées les grandes structures de l'Univers. Leur répartition angulaire fournit des contraintes fortes aux modèles cosmologiques.

3.2.2 Température des grains interstellaires

Le champ de rayonnement stellaire dans l'ultraviolet, le visible, voire le proche infrarouge chauffe les grains de poussière interstellaire tandis que, compte tenu de la température atteinte (tout au plus quelques dizaines de K), ces derniers vont réémettre dans l'infrarouge plus lointain. À l'équilibre, les grains suffisamment gros acquièrent une température T_d telle que l'absorption et l'émission se compensent. C'est précisément le sens de la loi de Kirchhoff, de sorte que l'on peut écrire que l'émissivité des poussières est $\varepsilon_{\nu} = \kappa_{\nu} B_{\nu} (T_d)$ et que l'équation d'équilibre définissant implicitement la température T_d s'écrit

$$\int \kappa_{\nu} J_{\nu} \mathrm{d}\nu = \int \kappa_{\nu} B_{\nu} \left(T_{\mathrm{d}} \right) \mathrm{d}\nu, \qquad (3.3)$$



FIGURE 3.10 – Emission du corps noir cosmologique (CMB) montrant l'effet de dipôle. L'échelle des couleurs va de -2.5 mK (bleu) à +3.5 mK (rouge) autour de la valeur moyenne de l'émission du CMB. Crédit : DMR/COBE/NASA.

équation dans laquelle le membre de gauche représente l'énergie absorbée par le grain, et celui de droite l'énergie émise. Pour des grains sphériques de rayon a, il est par ailleurs usuel de remplacer le coefficient d'absorption par *l'efficacité d'absorption* Q_{ν} définie par

$$Q_{\nu} = \frac{s_{\nu,a}}{\pi a^2} = \frac{\kappa_{\nu}}{n_d \pi a^2}$$

où n_d est la densité des poussières (nombre de grains par unité de volume). L'efficacité d'absorption est fonction de la fréquence ν mais aussi de la taille a des grains, et un modèle couramment utilisé est celui d'une loi de puissance $Q_{\nu}(a) = Q_0 a \nu^{\beta}$, où β est appelé indice spectral et prend des valeurs aux alentours de 2, dépendant de la composition (carbonée ou silicatée) des poussières [18]. L'équation d'équilibre s'écrit alors

$$\int Q_{\nu} J_{\nu} \mathrm{d}\nu = \int Q_{\nu} B_{\nu} \left(T_{\mathrm{d}} \right) \mathrm{d}\nu = Q_0 a \int \nu^{\beta} B_{\nu} \left(T_{\mathrm{d}} \right) \mathrm{d}\nu \tag{3.4}$$

ce qui invite à étudier le comportement de la fonction $\nu^{\beta}B_{\nu}(T_{\rm d})$, à la manière des calculs faits précédemment pour le corps noir. On peut notamment obtenir la fréquence $\nu_{\max,\beta}$ qui la maximise, en posant $x = h\nu/kT_{\rm d}$, et en écrivant que le maximum est atteint lorsque

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^{3+\beta}}{e^x - 1} \right) = 0$$

soit pour x vérifiant l'équation implicite

$$e^x = f_\beta(x) = \frac{\beta+3}{\beta+3-x}.$$

En posant $x_{\max,\beta} = 3 + \beta - \epsilon$ et en assimilant $e^{-\epsilon}$ à 1, on obtient $\epsilon = (3 + \beta) e^{-(3+\beta)}$, ce qui donne

$$\nu_{\max,\beta} = \frac{kT_{\rm d}}{h} (3+\beta) \left[1 - e^{-(3+\beta)} \right].$$

Qualitativement, $\nu_{\max,\beta}$ augmente lorsque β augmente. L'équation d'équilibre (3.4) s'écrit alors⁴

$$\int Q_{\nu} J_{\nu} d\nu = 2 \frac{Q_0 a}{c^2} \frac{k^{4+\beta}}{h^{3+\beta}} T_{\rm d}^{4+\beta} \int_0^\infty \frac{x^{3+\beta}}{e^x - 1} dx$$

Pour calculer la température T_d il est nécessaire de calculer le chauffage auquel sont soumis les grains (c'est-à-dire le membre de gauche de l'équation ci-dessus). On considère ici l'exemple simple d'une étoile unique, de rayon R_{\star} et de température T_{\star} , située à la distance d d'un grain de poussière de rayon a. On suppose cette étoile suffisamment chaude pour que le rayonnement émis (représenté par J_{ν}) se situe essentiellement dans les domaines visible et ultraviolet, entre $\lambda = 10$ nm et $\lambda = 800$ nm. À ces longueurs d'onde, l'efficacité d'absorption des grains est sensiblement $Q_{\nu} \simeq 1$, donc

$$\int Q_{\nu} J_{\nu} \mathrm{d}\nu \simeq \int J_{\nu} \mathrm{d}\nu = \frac{1}{4\pi} \iint I_{\nu} \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}\nu \simeq \frac{\sigma_S T_{\star}^4}{4\pi^2} \Omega_{\star}$$

en faisant l'hypothèse que l'étoile émet comme un corps noir à la température T_{\star} , et en notant Ω_{\star} l'angle solide sous lequel elle est vue depuis le grain de poussière, soit $\Omega_{\star} = \pi (R_{\star}/d)^2$, et donc

$$\frac{1}{4\pi}\sigma_S T^4_\star \left(\frac{R_\star}{d}\right)^2 = 2\frac{Q_0 a}{c^2} \frac{k^{4+\beta}}{h^{3+\beta}} T^{4+\beta}_{\rm d} \mathcal{H}(\beta) \quad \text{avec} \quad \mathcal{H}(\beta) = \int_0^\infty \frac{x^{3+\beta}}{e^x - 1} \mathrm{d}x$$

En remarquant que

$$\sigma_S = \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} \mathcal{H}(0)$$

on en tire

$$\frac{1}{4}\mathcal{H}(0)T_{\star}^{4}\left(\frac{R_{\star}}{d}\right)^{2} = Q_{0}a\frac{k^{\beta}}{h^{\beta}}T_{\mathrm{d}}^{4+\beta}\mathcal{H}(\beta)$$

ce qui donne la température d'équilibre des grains

$$T_{\rm d} = C_{\beta} \left[\frac{T_{\star}^4}{a} \left(\frac{R_{\star}}{d} \right)^2 \right]^{1/(4+\beta)} \quad \text{avec} \quad C_{\beta} = \left[\left(\frac{h}{k} \right)^{\beta} \frac{1}{4Q_0} \frac{\mathcal{H}(0)}{\mathcal{H}(\beta)} \right]^{1/(4+\beta)}$$

Numériquement, on peut prendre par exemple un grain silicaté ($\beta = 2$) avec $Q_0 = 10^{-21} \,\text{Hz}^2 \,\text{m}^{-1}$, de rayon $a = 0.1 \,\mu\text{m}$, situé à une distance $d = 10 \,\text{AU} \simeq 1.5 \times 10^{12} \,\text{m}$ d'une étoile de type A0V ($T_{\star} = 9700 \,\text{K}$ et $R_{\star} = 1.9 \,R_{\odot} \simeq 1.32 \times 10^9 \,\text{m}$). L'application numérique donne $T_{\rm d} \simeq 360 \,\text{K}$.

On note que cette température est nettement plus grande que les valeurs typiques données plus haut, car on a pris un grain très proche d'une étoile chaude. Très grossièrement, on peut dire que la distance moyenne entre étoiles dans le voisinage solaire étant de l'ordre de $10^{17} \text{ m} \sim 10^5 d$, comme $T_{\rm d} \propto d^{-1/3}$ pour $\beta = 2$, on trouve $T_{\rm d} \sim 360 \times 10^{-5/3} \simeq 8 \,\mathrm{K}$.

Ce raisonnement ne fonctionne plus pour les très petits grains (de rayon $r \approx 10$ à 100 Å). En effet, avec quelques atomes, la capacité calorifique C est très faible, donc l'augmentation de température provoquée par l'absorption d'un photon unique (énergie $h\nu$) peut être très grande $(\delta T \sim h\nu/C)$. On ne peut plus considérer le rayonnement comme un flux continu d'énergie, et les très petits grains n'atteignent pas une température d'équilibre bien définie : celle-ci fluctue sans arrêt sous l'effet de l'absorption des photons individuels, comme le montre la Fig. 3.11 issue de [8].

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} \mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{15} \simeq 6.494 \qquad \int_0^\infty \frac{x^4}{e^x - 1} \mathrm{d}x \simeq 24.89 \qquad \int_0^\infty \frac{x^5}{e^x - 1} \mathrm{d}x = \frac{8\pi^6}{63} \simeq 122.08$$

^{4.} Numériquement, on a



FIGURE 3.11 – Chauffage stochastique des grains de poussière interstellaires [8].

3.2.3 Planètes ou objets interplanétaires. Effet de serre

Considérons une planète de rayon r, en rotation, située à une distance D de son étoile, supposée sphérique et de rayon R_{\star} . La luminosité spectrale L_{ν} de l'étoile est la puissance totale émise par intervalle de fréquence. Elle s'écrit donc

$$L_{\nu} = F_{\nu}^+ \times 4\pi R_{\star}^2$$

La luminosité bolométrique est l'intégrale de L_{ν} sur la fréquence, soit

$$L_{\star} = \int_{0}^{\infty} L_{\nu} d\nu = 4\pi R_{\star}^{2} \int_{0}^{\infty} F_{\nu}^{+} d\nu = 4\pi R_{\star}^{2} F_{\star} = 4\pi \sigma_{S} R_{\star}^{2} T_{\star}^{4}$$

où $F_{\star} = \sigma_S T_{\star}^4$ est le flux à la surface de l'étoile. Le flux F mesuré à la distance D est alors

$$F = \frac{L_{\star}}{4\pi D^2} = \sigma_S T_{\star}^4 \left(\frac{R_{\star}}{D}\right)^2$$

La puissance reçue par la planète de rayon r s'écrit donc, en introduisant l'efficacité d'absorption dans le visible $Q_{\rm v}$

$$P_r = Q_{\rm v} \times F \times \pi r^2 = \frac{Q_{\rm v} L_{\star} r^2}{4D^2}$$

Notons que plus rigoureusement, il faudrait considérer l'efficacité par intervalle de fréquence Q_{ν} , et écrire

$$P_r = \frac{1}{4} \left(\frac{r}{D}\right)^2 \int Q_{\nu} L_{\nu} \mathrm{d}\nu.$$

Du fait de la rotation rapide, l'ensemble de la surface est éclairée, et on fait l'hypothèse que la température atteinte par la planète est uniforme. On néglige donc les effets de dépendance en latitude, par exemple. À l'équilibre thermique, la planète peut être assimilée à un corps noir sphérique de rayon r à une température effective $T_{\rm eff}$, dont la puissance émise est donc

$$P_e = 4\pi Q_{\rm IR} \sigma_S r^2 T_{\rm eff}^4$$

avec Q_{IR} l'efficacité d'émission en infrarouge, qui est donc égale à l'efficacité en absorption dans le même domaine spectral du fait de la loi de Kirchhoff. En régime permanent, ces deux puissances sont égales, ce qui permet de déterminer la température effective de la planète

$$P_r = P_e \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_{\rm v} L_{\star} r^2}{4D^2} = 4\pi Q_{\rm IR} \sigma_S r^2 T_{\rm eff}^4 \quad \Rightarrow \quad T_{\rm eff} = \left(\frac{Q_{\rm v}}{Q_{\rm IR}} \frac{L_{\star}}{16\pi\sigma_S D^2}\right)^{1/4}$$

Pour simplifier, on va supposer que $Q_{\rm IR} = 1$, et on introduit l'albédo $A = 1 - Q_{\rm V}$ de sorte que

$$T_{\rm eff} = \left[\frac{(1-A)L_{\star}}{16\pi\sigma_S D^2}\right]^{1/4} = \left[\frac{(1-A)F}{4\sigma_S}\right]^{1/4}$$

Numériquement, cette formule s'écrit, en introduisant les grandeurs caractéristiques de distance (1 UA) et de luminosité (1 L_{\odot})

$$T_{\rm eff} = 278 \,\mathrm{K} \times \left(\frac{D}{1 \,\mathrm{UA}}\right)^{-1/2} \,(1-A)^{1/4} \left(\frac{L_{\star}}{L_{\odot}}\right)^{1/4}.$$

Si la planète ne tourne pas sur elle-même et qu'on néglige la conduction thermique interne, la puissance absorbée est identique (même section efficace), mais seule une face est en équilibre avec ce rayonnement (l'autre face est à température nulle), et la puissance émise ne l'est donc que sur

une demi-sphère, soit $P_e = \sigma_S T_{\text{eff}}^2 \times 2\pi r^2$. Tout se passe donc comme si on passait de σ_S à $\sigma_S/2$, ce qui donne

$$T_{\rm eff} = \left[\frac{(1-A)L_{\star}}{8\pi\sigma_S D^2}\right]^{1/4} = 330 \,\mathrm{K} \times \left(\frac{D}{1 \,\mathrm{UA}}\right)^{-1/2} \,(1-A)^{1/4} \left(\frac{L_{\star}}{L_{\odot}}\right)^{1/4}$$

Prenant pour simplifier un albédo A = 0,5 et $L_{\star} = L_{\odot}$ on a, suivant qu'une planète est en rotation rapide ou non

$$T_{\rm eff,rapide} = 234 \,\mathrm{K} \times \left(\frac{D}{1 \,\mathrm{UA}}\right)^{-1/2}$$
$$T_{\rm eff,lente} = 278 \,\mathrm{K} \times \left(\frac{D}{1 \,\mathrm{UA}}\right)^{-1/2}$$

On a alors, dans cette approximation, pour les planètes du système solaire :

Planète	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
Rotation	lente	lente	rapide	rapide	rapide	rapide	rapide	rapide
D (UA)	0.387	0.723	1	1.52	5.20	9.55	19.2	30.1
$T_{\rm eff}$ (K)	447	327	234	190	103	76	53	43
$\langle T_{\rm surf} \rangle$ (K)	452	726	281	230	120	88	59	48

Pour la Terre (et encore plus pour Vénus), la température ainsi obtenue est trop faible. C'est qu'on a négligé un aspect important, à savoir que l'atmosphère produit un "effet de serre" car certains gaz comme le dioxyde de carbone CO_2 jouent un rôle analogue aux vitres des serres (qui sont transparentes vis à vis du rayonnement solaire incident mais opaques au rayonnement infrarouge thermique émis par le sol). La figure 3.12 présente un modèle simpliste de cet effet, pour lequel on considère une atmosphère fine au dessus de la surface de la planète. La température de surface de la planète est T_0 , celle de l'atmosphère est T_1 , les deux systèmes étant considérés comme des corps noirs. La puissance par unité de surface de la planète arrivant depuis l'étoile est située dans le visible essentiellement, pour lequel l'atmosphère est transparente. En revanche, le rayonnement infrarouge de la surface planétaire, dont le flux est $\sigma_S T_0^4$, est absorbé en partie (fraction f) par l'atmosphère. Celle-ci, portée à la température T_1 , réémet vers le haut et vers le bas un flux $\sigma_S T_1^4$. Le bilan de puissance surfaçique pour un observateur extérieur devient

$$\frac{(1-A)F}{4} = (1-f)\sigma_S T_0^4 + \sigma_S T_1^4$$

au lieu de

 $\frac{(1-A)F}{4} = \sigma_S T_0^4$

$$f\sigma_S T_0^4 = 2\sigma_S T_1^4$$

On en déduit la nouvelle relation entre F et T_0 , à savoir

$$\frac{(1-A)F}{4} = (1-f)\sigma_S T_0^4 + \frac{f}{2}\sigma_S T_0^4 = \left(1 - \frac{f}{2}\right)\sigma_S T_0^4$$



FIGURE 3.12 – Modèle simpliste de l'effet de serre.

et donc la température effective de la surface planétaire est donnée par

$$T_{\rm eff} = T_0 = \left[\frac{(1-A)F}{4\sigma_S\left(1-\frac{f}{2}\right)}\right]^{1/4}$$

Avec une valeur typique de f = 0.8, on a pour la Terre $T_{\text{eff}} \simeq 266 \text{ K}$, ce qui est encore trop froid, mais donne une idée du principe, qui peut être raffiné.

3.3 Lois relatives à la matière

3.3.1 Loi de Maxwell

La loi de Maxwell donne la distribution des vitesses des particules libres dans un gaz à l'équilibre thermique. Pour un gaz globalement au repos, la probabilité qu'une particule ait pour vitesse projetée sur un axe Oz une valeur comprise entre v_z et $v_z + dv_z$ s'écrit

$$dP = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right) dv_z.$$
(3.5)

La densité de probabilité $f_{v_z}(v_z)$ est donc une Gaussienne de moyenne nulle et d'écart-type

$$\sigma_{v_z} = \sqrt{\frac{kT}{m}}$$

La densité de probabilité $f_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v})$ du vecteur vitesse \boldsymbol{v} , est quant à elle donnée par

$$f_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right),$$

où v est la norme de v. Enfin, la densité de probabilité du module v de la vitesse est donnée par

$$f_v(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) 4\pi v^2.$$

On peut démontrer ce résultat à partir de considérations très générales sur les symétries (stationnarité, homogénéité et isotropie). Sans hypothèse autre que la présence d'un nombre "suffisamment grand" de particules dans tout élément de volume mésoscopique, on peut écrire *a priori* que la probabilité $dP(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ de trouver, à l'instant *t*, une particule de vitesse \mathbf{v} à $d^3\mathbf{v}$ près dans un volume $d^3\mathbf{r}$ autour du point \mathbf{r} s'écrit au moyen d'une fonction de distribution \mathcal{F} comme

$$\mathrm{d}P(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) = \mathcal{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)\mathrm{d}^{3}\boldsymbol{r}\mathrm{d}^{3}\boldsymbol{v}.$$

L'hypothèse de stationnarité permet de s'affranchir de la dépendance en temps. Quant à l'homogénéité, elle implique que la fonction \mathcal{F} ne dépend pas non plus de r,

$$dP(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) = \mathcal{F}(\boldsymbol{v})d^3\boldsymbol{r}d^3\boldsymbol{v}.$$

En intégrant sur la position, on définit une fonction de distribution $f_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v})$ telle que la probabilité qu'une particule quelconque du fluide ait une vitesse \boldsymbol{v} à d³ \boldsymbol{v} près soit $f_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v})d^{3}\boldsymbol{v}$, avec

$$f_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v}) = \int \mathcal{F}(\boldsymbol{v}) \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r} = V \mathcal{F}(\boldsymbol{v}),$$

où V est le volume total considéré. D'autre part, l'isotropie implique que $f_{v}(v)$ ne doit dépendre que de la norme v de la vitesse, ou encore de son carré, car toutes les directions sont équivalentes, de sorte que'il existe une fonction g telle que

$$f_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v}) = g(v^2) = g(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = h(v_x^2)h(v_y^2)h(v_z^2).$$

En effet, les trois directions Ox, Oy et Oz étant équivalentes, les composantes correspondantes de la vitesse, ainsi que leurs carrés, sont des variables aléatoires indépendantes, ce qui permet la factorisation. De plus, les fonctions de distribution de chacun des carrés sont identiques, là encore parce qu'aucune direction n'est privilégiée. En passant au logarithme, on a

$$\ln f_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v}) = \ln g(v^2) = \ln h(v_x^2) + \ln h(v_y^2) + \ln h(v_z^2).$$

Dérivons alors $\ln g$ par rapport à une composante particulière, par exemple v_x . On obtient

$$\frac{\partial \ln g}{\partial v_x} = \frac{g'(v^2)}{g(v^2)} \frac{\partial v^2}{\partial v_x} = 2v_x \frac{g'(v^2)}{g(v^2)} = \frac{\partial \ln h(v_x^2)}{\partial v_x} = 2v_x \frac{h'(v_x^2)}{h(v_x^2)}.$$

On en déduit, en faisant la même dérivation par rapport à v_y et v_z , que

$$\frac{g'(v^2)}{g(v^2)} = \frac{h'(v_x^2)}{h(v_x^2)} = \frac{h'(v_y^2)}{h(v_y^2)} = \frac{h'(v_z^2)}{h(v_z^2)} = -B,$$

où B est nécessairement une constante⁵. En intégrant, on a

$$h(v_x^2) = A \exp(-Bv_x^2)$$
 et $g(v^2) = A^3 \exp(-Bv^2)$,

ce qui montre que la distribution des vitesses $f_v(v)$ est une Gaussienne. La probabilité qu'une particule ait une vitesse v à d³v près est alors

$$dP(\boldsymbol{v}) = f_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v})d^3\boldsymbol{v} = g(v^2)v^2d\Omega dv = A^3\exp{(-Bv^2)v^2}d\Omega dv,$$

où $v^2 d\Omega dv$ est l'élément d'intégration dans l'espace des vitesses en coordonnées sphériques. La normalisation de la probabilité permet de relier A et B. En effet⁶,

$$\int dP = \int d\Omega \int_0^\infty A^3 \exp((-Bv^2)v^2 dv = 4\pi A^3 \frac{\sqrt{\pi}}{4B^{3/2}} = 1 \quad \text{donc} \quad A = \sqrt{\frac{B}{\pi}}$$

L'équation trouvée exprime directement que ∀x, y h(x) = h(y).
 On donne les intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2n - (r/a)^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (2n)! \, dx \, dx^{2n+1} \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} 2n+1 \, dx^{2n+1} \, dx^{2n+1}$$

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-(x/a)^2} dx = \sqrt{\pi} \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n+1} \quad \text{et} \quad \int_0^\infty x^{2n+1} e^{-(x/a)^2} dx = \frac{n!}{2} a^{2n+2}$$

D'autre part, le calcul de la vitesse quadratique moyenne v_q (qui définit la température T en théorie cinétique des gaz) fournit une seconde équation permettant de déterminer complètement A et B en fonction des paramètres du problème,

$$v_q^2 = \overline{v^2} = \int v^2 dP = \int d\Omega \int_0^\infty \left(\frac{B}{\pi}\right)^{3/2} \exp\left(-Bv^2\right) v^4 dv = 4\pi \left(\frac{B}{\pi}\right)^{3/2} \frac{6\sqrt{\pi}}{16B^{5/2}} = \frac{3}{2B}$$

Comme on a par définition de la température cinétique T

$$\frac{1}{2}mv_q^2 = \frac{1}{2}m\left(\left\langle v_x^2 \right\rangle + \left\langle v_y^2 \right\rangle + \left\langle v_z^2 \right\rangle\right) = \frac{3kT}{2}$$

alors

$$B = \frac{m}{2kT}$$
 et $A = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}$

et la distribution des vitesses de Maxwell-Boltzmann s'écrit finalement

$$f_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right).$$

Outre la vitesse quadratique moyenne

$$v_q = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

on utilise aussi la vitesse la plus probable

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

définie via⁸

$$\frac{\partial f_v}{\partial v} = 0$$

On a aussi la vitesse moyenne

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Numériquement, on a, en posant $\mu=m/m_{\rm p}$ avec $m_{\rm p}=1.67262171\times 10^{-27}\,{\rm kg}$ la masse du proton,

$$v_q = 0.157 \sqrt{\frac{T}{\mu}} \,\mathrm{km}\,\mathrm{s}^{-1} \qquad v_p = 0.128 \sqrt{\frac{T}{\mu}} \,\mathrm{km}\,\mathrm{s}^{-1} \qquad \langle v \rangle = 0.145 \sqrt{\frac{T}{\mu}} \,\mathrm{km}\,\mathrm{s}^{-1}$$

avec la température cinétique T exprimée en Kelvin. Un ordre de grandeur utile à avoir en tête est que la vitesse typique des atomes d'hydrogène à 100 K est de 1 km s^{-1} .

3.3.2 Distribution de Boltzmann

La distribution de Boltzmann précise, pour un système d'atomes ou de molécules par exemple, le peuplement de niveaux discrets i et j, d'énergies respectives E_i et E_j et de multiplicités respectives g_i et g_j , lorsque le système est à l'équilibre thermodynamique :

$$\frac{n_{j,\text{ET}}}{n_{i,\text{ET}}} = \frac{g_j}{g_i} \exp\left(-\frac{E_j - E_i}{kT}\right).$$
(3.6)

^{7.} dite encore rms pour root mean square.

^{8.} Attention au fait qu'on cherche le maximum de f_v et non de f_v !

Cette formule peut être obtenue en considérant un système à deux niveaux, à l'équilibre thermodynamique. La probabilité de trouver le système sur l'un ou l'autre niveau ne peut dépendre que de l'énergie du niveau et de la température. On peut donc écrire

$$\frac{P_i}{P_j} = \frac{f(E_i)}{f(E_j)} = F_T(E_i, E_j)$$

Comme on peut choisir librement l'origine des énergies, la fonction $F_T(E_i, E_j)$ doit en fait dépendre de la différence des énergies, soit

$$\frac{f(E_i)}{f(E_j)} = F_T(E_i - E_j)$$

d'où l'on déduit que $F_T(0) = 1$. Considérons alors un cas particulier pour lequel les deux énergies sont proches, $E_i = E_j + \epsilon$ avec $\epsilon \ll E_j$. Un développement de Taylor donne alors

$$\frac{f(E_i)}{f(E_j)} = \frac{f(E_j + \epsilon)}{f(E_j)} = 1 + \epsilon \frac{f'(E_j)}{f(E_j)} = F_T(\epsilon) = 1 + \epsilon F'(0)$$

d'où l'on déduit que

$$\frac{f'}{f} = (\ln f)' = F'(0) = -\beta \quad \text{donc} \quad f(E) = C \exp(-\beta E)$$

avec β une constante. Pour la calculer, on écrit que la distribution de Maxwell des vitesses peut être vue comme un cas particulier de la formule de Boltzmann, appliquée à un continuum en énergie, en l'occurrence l'énergie cinétique $E = E_c$. La comparaison avec le calcul de la distribution de Maxwell implique alors que

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

Dans les systèmes qui ne sont pas à l'équilibre thermodynamique, le rapport des populations des niveaux n'a pas de raison de suivre la distribution de Boltzmann, mais on peut néanmoins définir une température d'excitation T_x par la relation

$$\frac{n_j}{n_i} = \frac{g_j}{g_i} \exp\left(-\frac{E_j - E_i}{kT_x}\right),\tag{3.7}$$

Si le milieu n'est pas à l'équilibre thermodynamique, on aura $T_x \neq T$ et la valeur de T_x obtenue pourra dépendre du couple de niveaux choisis. On verra des exemples dans la suite. Par ailleurs, on définit les coefficients de déviation par rapport à l'équilibre thermodynamique

$$b_i = \frac{n_i}{n_{i,\text{ET}}}.$$

Ces coefficients sont égaux à un à l'équilibre thermodynamique.

3.3.3 Loi de Saha

Établissement de la loi

La *loi de Saha* régit la distribution des particules d'une même espèce dans différents états d'ionisation lorsque le système est à l'équilibre thermodynamique. Elle s'écrit sous la forme

$$\frac{n_{r+1}n_e}{n_r} = \frac{2Z_{r+1}}{Z_r} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} \exp\left(-\frac{\chi_r}{kT}\right),$$

où n_e est la densité des électrons libres, n_r est la densité de l'ion r fois ionisé, qu'on note A_r , avec χ_r son potentiel d'ionisation (c'est-à-dire l'énergie à fournir pour passer de l'ion r fois ionisé à l'ion



FIGURE 3.13 – Equilibre d'ionisation entre les états r et r + 1 fois ionisé.

r + 1 fois ionisé, tous les deux étant pris dans leurs niveaux fondamentaux respectifs), et Z_r sa fonction de partition, soit

$$Z_r(T) = \sum_{j \ge 0} g_{r,j} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_{r,j}}{kT}\right),$$

avec $g_{r,j}$ et $\mathcal{E}_{r,j}$ le poids statistique et l'énergie du niveau $j \ge 0$ de l'ion r fois ionisé, comptée depuis son état fondamental j = 0, c'est-à-dire que $\mathcal{E}_{r,0} = 0$ pour tous les états r d'ionisation. Pour établir cette équation, on considère l'équilibre d'ionisation

$$A_{r,i} \leftrightarrows A_{r+1,j} + e^{-}(p)$$

où $A_{r,i}$ désigne l'état *i* de l'ion A_r , et $A_{r+1,j}$ l'état *j* de l'ion A_{r+1} . On note α et β les deux états de chaque côté de cette équation d'équilibre, soit $\alpha = \{A_{r,i}\}$ et $\beta = \{A_{r+1,j} + e^{-}(p)\}$. Dans cette écriture, on fait apparaître que l'énergie E_e de l'électron libéré est une fonction de l'impulsion *p*. Dans la limite non relativiste, on a

$$E_e = \frac{p^2}{2m_e}.$$

La loi de Boltzmann donne le rapport des probabilités de trouver le système dans l'un ou l'autre état :

$$\frac{P_{\beta}}{P_{\alpha}} = \frac{g_{\beta}}{g_{\alpha}} \exp\left(-\frac{E_{\beta} - E_{\alpha}}{kT}\right)$$

Or les énergies de ces deux états sont respectivement

$$E_{\alpha} = \mathcal{E}_{r,i}$$
 et $E_{\beta} = \mathcal{E}_{r+1,j} + \frac{p^2}{2m_e} + \chi_r$

D'autre part, les multiplicités des deux états sont

$$g_{\alpha} = g_{r,i}$$
 et $g_{\beta} = g_{r+1,j}g_e(p)$

Dans cette équation, $g_e(p)$ représente le poids statistique des états de l'électron libéré. Pour le calculer, on rappelle que cela revient à calculer le nombre d'états accessibles à un électron d'impulsion p à dp près. Le calcul classique de la densité d'états d'un gaz constitué de N_e électrons libres sans interaction dans une boîte de volume V montre que le nombre d'électrons d'énergieE à $\mathrm{d}E$ près est 9

$$N(E)\mathrm{d}E = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{E}\mathrm{d}E$$

Cette équation peut être modifiée pour faire apparaître $g_e(p)$, soit

$$N(E)dE = N_e g_e(p)dp = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{p^2}{2m_e}} \frac{p\,dp}{m_e}$$

d'où l'on tire que

$$g_e(p) = \frac{V}{N_e} \frac{p^2}{\pi^2 \hbar^3} = \frac{8\pi p^2 \mathrm{d}p}{n_e h^3}$$

avec $n_e = N_e/V$ la densité des électrons libres. Par suite, le rapport des populations est donné par intégration sur les impulsions possibles de l'électron ejecté

$$\frac{n_{r+1,j}}{n_{r,i}} = \int \frac{g_{r+1,j}}{g_{r,i}} \frac{8\pi p^2}{n_e h^3} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_{r+1,j} + \frac{p^2}{2m_e} + \chi_r - \mathcal{E}_{r,i}}{kT}\right) dp$$

ce qui donne

$$\frac{n_{r+1,j}}{n_{r,i}} = \frac{g_{r+1,j}}{g_{r,i}} \frac{2(2\pi m_e kT)^{3/2}}{n_e h^3} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_{r+1,j} + \chi_r - \mathcal{E}_{r,i}}{kT}\right)$$

Or la distribution de Boltzmann donne les populations des différents niveaux de chacun des ions¹⁰

$$\frac{n_{r,i}}{n_r} = \frac{g_{r,i}}{Z_r(T)} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_{r,i}}{kT}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{n_{r,i}}{g_{r,i}} \exp\left(\frac{\mathcal{E}_{r,i}}{kT}\right) = \frac{n_r}{Z_r(T)}$$

ce qui permet de remplacer les facteurs dépendant du niveau considéré par des facteurs globaux

$$\frac{n_{r+1}}{Z_{r+1}(T)} \times \frac{Z_r(T)}{n_r} = 2 \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{n_e h^3} \exp\left(-\frac{\chi_r}{kT}\right)$$

et d'obtenir le rapport des populations des différents états d'ionisation

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} = \frac{2Z_{r+1}(T)}{Z_r(T)} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{n_e h^3} \exp\left(-\frac{\chi_r}{kT}\right)$$

On rappelle que cette équation n'est bien entendu valable qu'à l'équilibre thermodynamique (local).

Exemple : plasma d'hydrogène de la photosphère Solaire

À titre d'exemple, considérons le cas simple d'un gaz d'hydrogène de densité n fixée, à la température T. Les notations n_0 et n_1 désignent alors respectivement les densités des atomes d'hydrogène neutre H (notés habituellement HI) et des protons libres H⁺ (notés habituellement HII).

La fonction de partition de ces derniers est simplement $Z_1(T) = 1$ car l'ion H⁺ n'a pas d'électron lié, par définition. En ce qui concerne l'atome neutre, on a la fonction de partition

$$Z_0(T) = \sum_{j \ge 1} Z_{0,j}(T)$$

^{9.} On se réfèrera aux ouvrages classiques de physique statistique pour l'établissement de ce résultat.

^{10.} Notons que le fait que les références en énergie des états d'ionisation soient différentes n'intervient pas. On pourrait tout aussi bien changer $\mathcal{E}_{r,i} \mapsto \mathcal{E}_{r,i} + a$ sans changer le rapport $n_{r,i}/n_r$.

où chaque terme est donné par

$$Z_{0,j}(T) = g_j \exp\left(-\frac{E_j}{kT}\right) = 2j^2 \exp\left[-\frac{\chi_0}{kT}\left(1-\frac{1}{j^2}\right)\right]$$

avec $\chi_0 = 13.6 \text{ eV} = 2.179 \times 10^{-18} \text{ J}$ l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène, et en prenant comme référence d'énergie le niveau fondamental. Le premier terme de la somme est $Z_{0,1}(T) = 2$, et à la température $T_{\odot} = 6400 \text{ K}$ de la photosphère Solaire, le deuxième terme est $Z_{0,2}(T_{\odot}) \simeq 10^{-7}$, complètement négligeable devant le premier. Les termes suivant étant également négligeables¹¹, on écrit donc $Z_0(T_{\odot}) \simeq 2$, et l'équation de Saha donne alors

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{n_e h^3} \exp\left(-\frac{\chi_0}{kT}\right)$$

qu'on modifie en utilisant d'une part la conservation de la matière $n = n_0 + n_1$ et la neutralité électrique $n_e = n_1$, et en introduisant le degré d'ionisation $y = n_1/n$

$$\frac{n_1}{n - n_1} = \frac{y}{1 - y} = \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{ynh^3} \exp\left(-\frac{\chi_0}{kT}\right)$$

et donc

$$\frac{y^2}{1-y} = \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{nh^3} \exp\left(-\frac{\chi_0}{kT}\right)$$

Numériquement, cela s'écrit

$$\frac{y^2}{1-y} = 2.41 \left(\frac{T}{1 \,\mathrm{K}}\right)^{3/2} \left(\frac{n}{10^{21} \,\mathrm{m}^{-3}}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{1.58 \times 10^5 \,\mathrm{K}}{T}\right).$$

Prenant l'exemple de la photosphère Solaire $(n = 2 \times 10^{23} \,\mathrm{m}^{-3} \text{ et } T = 6400 \,\mathrm{K})$, on trouve

$$y = \frac{n_1}{n} \simeq \frac{n_1}{n_0} \simeq 3.7 \times 10^{-4}.$$

On constate que l'hydrogène de la photosphère solaire est pres
que entièrement neutre. Il faudrait augmenter la température vers 23000 K pour obtenir un taux d'ionisation
 $y\simeq 1$, comme l'indique la Fig. 3.14.

Notons que cette température est nettement inférieure à χ_0/k (de l'ordre de 1.58×10^5 K), à laquelle on aurait pu intuitivement penser. La raison en est que dans les gaz diffus considérés, un

$$\frac{n_{\rm H,2}}{n_{\rm tot}} = \frac{n_{\rm H,2}}{n_{\rm H}} \times \frac{n_{\rm H}}{n_{\rm tot}} = \frac{n_{\rm H,2}}{n_{\rm H,1} + n_{\rm H,2}} \times \frac{n_{\rm H}}{n_{\rm H} + n_{\rm H^+}} = \frac{\frac{n_{\rm H,2}}{n_{\rm H,1}}}{1 + \frac{n_{\rm H,2}}{n_{\rm H,1}}} \times \frac{1}{1 + \frac{n_{\rm H^+}}{n_{\rm H^+}}}$$

n_H 2

^{11.} Il convient cependant de remarquer que la somme infinie Z_0 est en toute rigueur divergente, et ce parce que terme générique ne tend pas vers zéro pour $j \to \infty$, puisque le facteur exponentiel tend vers une limite finie non nulle $\exp(-\chi_0/kT)$ et que le facteur $2j^2$ tend vers l'infini. La résolution de ce paradoxe consiste à remarquer qu'aux niveaux les plus élevés correspondent des rayons d'orbitales très grands (en j^2) de sorte que l'électron n'est plus associé au proton considéré, mais peut être tout aussi bien associé aux protons voisins. Autrement dit, les niveaux supérieurs de l'atome d'hydrogène neutre sont dépeuplés par ionisation. Cet effet est d'autant plus marqué qu'on est à haute température et que l'énergie d'agitation thermique kT est donc supérieure à l'écart entre le niveau excité considéré et le niveau d'ionisation. Pour rendre cette idée quantitative, on peut calculer la fraction d'hydrogène neutre es ur le niveau j = 2 en fonction de la température, par rapport à la population totale (hydrogène neutre et ionisé). Pour simplifier, on néglige les niveaux supérieurs, en argumentant que de toutes les manières ceux ci sont moins peuplés que le niveau j = 2 pour la raison invoquée. On a alors

Le premier facteur tend vers 4/5 quand $T \rightarrow \infty$ du fait de Boltzmann, mais le second tend vers 0 car $n_{\rm H} \ll n_{\rm H^+}$. Numériquement, on trouve que la fraction d'hydrogène sur le niveau j = 2 atteint son maximum pour $T \sim 10000$ K et retombe ensuite exponentiellement.



FIGURE 3.14 – Fraction d'ionisation d'un plasma d'hydrogène en fonction de la température, pour une densité totale $n = 2 \times 10^{23} \,\mathrm{m}^{-3}$. Le cas de la photosphère Solaire ($T = 6400 \,\mathrm{K}$) est représenté par le point rouge.

atome, une fois ionisé, a peu de chances de rencontrer un électron pour se recombiner. C'est aussi pour cette raison qu'à température donnée, le degré d'ionisation augmente lorsque la densité totale n diminue¹². On peut voir sur la Fig. 3.15 la représentation du rapport n_1/n_0 en fonction de la température, pour un certain nombre de valeurs de la densité totale n, allant de la densité moyenne de la matière visible dans l'univers aux densités maximales au-delà desquelles la séparation entre atomes approche la taille caractéristique d'un atome.

Exemple : découplage matière-rayonnement

Une seconde application de la formule de Saha au cas d'un plasma d'hydrogène pur est le cas du découplage de la matière et de la radiation qui a donné naissance au CMB. La densité totale d'hydrogène varie avec le redshift du fait de l'expansion comme $n \propto (1 + z)^{-3}$. La densité n_d au moment du découplage (redshift z_d) est donc

$$n_d = n_b (1 + z_d)^3$$

où $n_b \simeq 0.25 \,\mathrm{m}^{-3}$ est la densité de matière baryonique dans l'Univers actuel (z = 0). D'autre part, la constance de l'entropie du gaz de photons permet de relier la température du CMB au redshift par $T_{\rm CMB} = T_0(1+z)$ avec $T_0 = 2.725 \,\mathrm{K}$ la température du CMB à l'époque actuelle.

Au moment du découplage, la température du plasma est égale à celle du CMB puisque les

^{12.} Remarquons qu'en appliquant cette formule au centre du Soleil, pour lequel on prend $n = 6 \times 10^{31} \,\mathrm{m^{-3}}$ et $T = 1.5 \times 10^7 \,\mathrm{K}$, on trouve $y \simeq 0.75$. Bien entendu, ce résultat est erroné ! En réalité, à ces densités, la distance moyenne entre deux atomes s'approche de la taille d'un atome isolé, de sorte que les électrons ne sont plus liés à un seul atome en particulier, mais forment un continuum entre les protons. Le centre du Soleil est entièrement ionisé (y = 1) par la pression énorme qui y règne.



FIGURE 3.15 – Rapport n_1/n_0 d'un plasma d'hydrogène en fonction de la température, pour plusieurs densités totales n. Le cas de la photosphère Solaire (T = 6400 K) est représenté par le point rouge, celui du découplage ayant donné naissance au CMB par le point bleu.

photons et la matière sont en équilibre thermique, soit $T_d = T_0(1 + z_d)$. On a donc

$$\frac{y_d^2}{1-y_d} = \frac{(2\pi m_e k T_d)^{3/2}}{n_d h^3} \exp\left(-\frac{\chi_0}{kT_d}\right) = \frac{(2\pi m_e k T_0)^{3/2}}{n_b (1+z_d)^{3/2} h^3} \exp\left(-\frac{\chi_0}{kT_0 (1+z_d)}\right)$$

Le découplage correspond au moment où le milieu passe d'entièrement ionisé ($y \simeq 1$) à entièrement neutre ($y \simeq 0$). On cherche donc une estimation du redshift auquel a lieu cette transition en posant $y_d = 1/2$, ce qui donne, pour l'équation ci-dessus

$$\frac{1}{2} = \frac{(2\pi m_e k T_0)^{3/2}}{n_b (1+z_d)^{3/2} h^3} \exp\left(-\frac{\chi_0}{k T_0 (1+z_d)}\right)$$

En insérant les valeurs numériques, on a

$$1 = \frac{5.43 \times 10^{21}}{(1+z_d)^{3/2}} \exp\left(-\frac{5.8 \times 10^4}{(1+z_d)}\right)$$

La résolution numérique de cette équation donne $z_d\simeq 1480,$ ce qui correspond à une température $T_d\simeq 4000\,{\rm K}$ et $n_d\simeq 8\times 10^8\,{\rm m}^{-3}.$