

# INTRODUCTION à L'ASTROPHYSIQUE

Cours d'option de Licence Magistère  
Interuniversitaire de Physique.

2006–2007

Steven Balbus

7ème Cours 13 déc 2006: TROUS NOIRS.

## Références Recommandées:

- Shapiro, S. L., & Teukolsy, S. A 1983, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. (New York: Wiley-Interscience) Un livre technique.
- Thorne, K. S., *Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy*. (New York: W.W. Norton) Un livre pour un public cultivé.

## TROUS NOIRS

- Qu'est-ce qui se passe quand un coeur stellaire a une masse plus grande que  $\sim 2 M_{\odot}$ —la masse maximum d'une étoile à neutrons?
- Étonnamment, l'histoire commence au 18<sup>me</sup> siècle, avec John Mitchell (1783) et P.S. de Laplace (1795). Ils ont considéré une étoile "normale," dont la vitesse d'échappement excède celle de la lumière:

$$\frac{1}{2}mc^2 = \frac{GMm}{R} \rightarrow R = \frac{2GM}{c^2}$$

Lorsqu'une étoile est plus petite que  $R$  (ci-dessus), rien ne peut s'échapper de sa surface. L'étoile apparaîtrait complètement noire!

La valeur de  $R$  est correcte(!), mais la démonstration est fautive. La théorie moderne est due à Karl Schwarzschild qui, en utilisant la théorie de la relativité générale, a trouvé la solution exacte pour une masse ponctuelle.



KARL SCHWARZSCHILD (1873-1916)

Pour comprendre sa solution, il faut d'abord comprendre les principes de la relativité générale. Commençons avec la relativité restreinte: (1) La vitesse de la lumière est une constante universelle,  $c$ . (2) Tous les observateurs qui ont une vitesse relative constante les uns par rapport aux autres doivent mesurer les mêmes résultats. Mais si  $dx/dt = c$ , et  $dx = dx' + vdt$  (transf. galiléenne), alors  $dx'/dt = c - v \neq c$ . Si toutefois on essaie une transformation plus générale,  $dx = Adx' + Bdt'$ ,  $dt = Ddx' + Edt'$ , et on demande que

$$c^2 dt^2 - dx^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2,$$

on trouve assez facilement (voir pp. 26–27) que

$$dx = \gamma(dx' + vdt') \quad dt = \gamma(dt' + vdx'/c^2),$$

où  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ .

Ce sont les transformations de Lorentz.

La “forme quadratique”

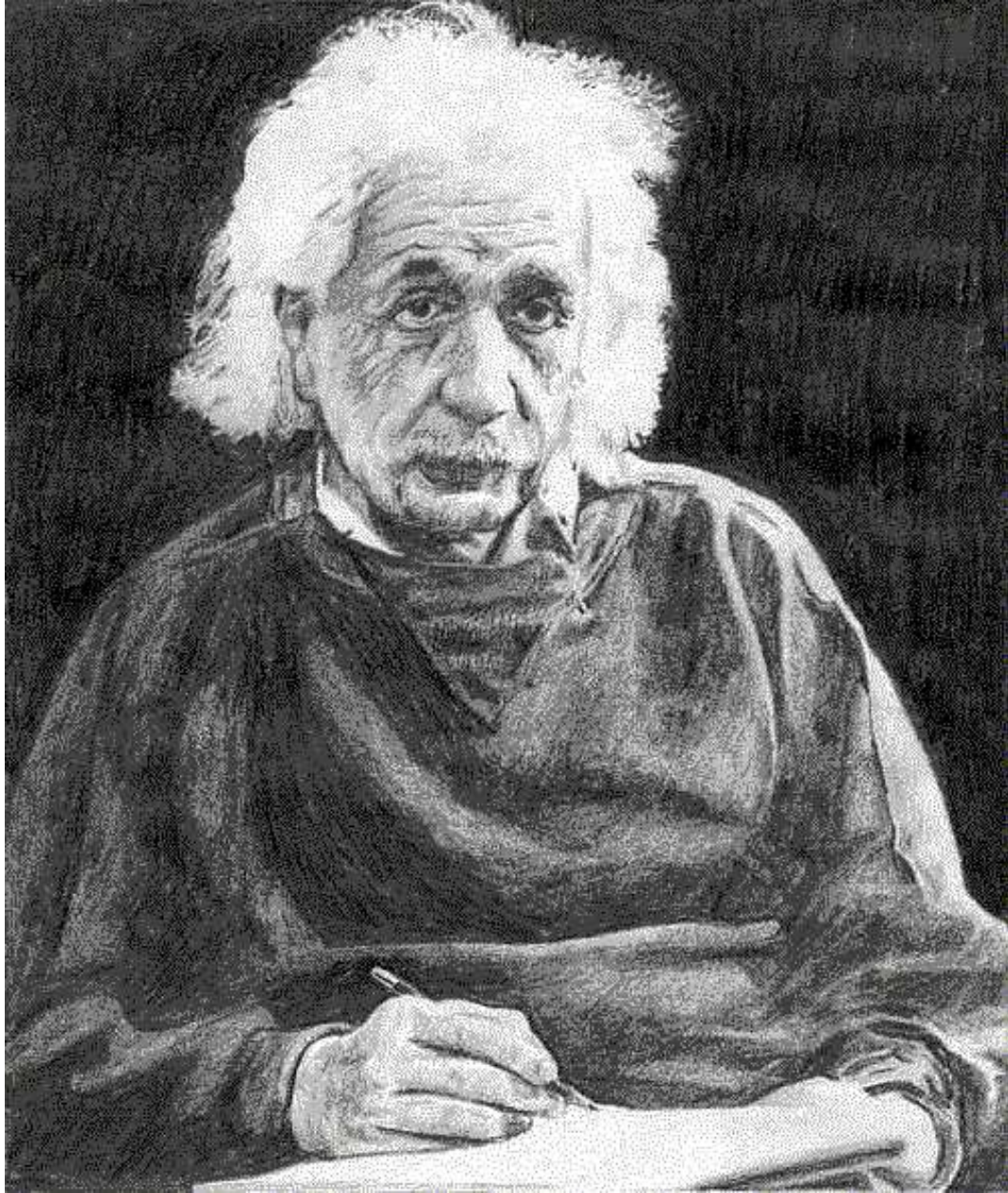
$$ds^2 \equiv c^2 dt'^2 - dx'^2 = c^2 dt^2 - dx^2,$$

est donc toujours *invariante*. Le mathématicien Hermann Minkowski rapprocha cela du fait que  $ds^2 = dx^2 + dy^2$  (théorème de Pythagore) est invariant dans sa forme par rotation:  $dx' = dx \cos \theta + dy \sin \theta$ ,  $dy' = -dx \sin \theta + dy \cos \theta$ , mais  $dx'^2 + dy'^2 = dx^2 + dy^2$  toujours.



HERMANN MINKOWSKI (1864-1909)

Il y a un signe moins en relativité mais le point mathématique est le même. Minkowski proposa que l'espace et le temps pouvaient être combinés en une géométrie non-Euclidienne cohérente avec des propriétés bien définies: l'espace de Minkowski. Cela sembla une approche assez mathématique. Et quant à Einstein, l'auteur de la relativité restreinte, comment a-t-il répondu?



BOF.



Mais Einstein changea vite d'avis. En relativité générale, l'interprétation géométrique est cruciale. En l'absence de matière, l'espace-temps est Minkowskien. ( $c^2 dt^2 - dr^2$  est une "métrique invariante.")

En présence de matière, l'espace-temps est déformé: on parle de "courbure." Notez que les dimensions à la fois spatiale *et* temporelle sont déformées. En présence d'une masse  $M$  située en  $r = 0$ , la solution de Schwarzschild est exprimée comme une métrique:

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2GM/rc^2} - r^2 d\Omega^2$$

où  $\Omega$  est l'angle solide. Cela devient la métrique de Minkowski lorsque  $M/r \rightarrow 0$ .

## L'INTERPRÉTATION DE LA MÉTRIQUE

- $dt =$  intervalle de temps pour un observateur à l'infini.
- $dr =$  intervalle de longueur pour un observateur à l'infini.
- $(1 - 2GM/rc^2)^{1/2}dt =$  intervalle de temps local mesuré en  $r$ .
- $(1 - 2GM/rc^2)^{-1/2}dr =$  intervalle de longueur local mesuré en  $r$ .
- $(1 - 2GM/rc^2)^{-1/2}r^2dr \sin \theta d\theta d\phi =$  élément de volume propre.

Notons que  $\theta$  et  $\phi$  (donc  $d\Omega$ ) ne sont pas affectés.

## DÉCALAGE GRAVITATIONNEL VERS LE ROUGE

$$\frac{\nu(\infty)}{\nu(r)} = \frac{d\tau(r)}{d\tau(\infty)} = \frac{dt(1 - 2GM/rc^2)^{1/2}}{dt} \simeq 1 - \frac{GM}{rc^2}$$

pour  $2GM/rc^2 \ll 1$ . On obtient le même résultat en utilisant la conservation de l'énergie (e.g. DGR pour une naine blanche).

Le résultat exact,

$d\tau_\infty = d\tau(r)(1 - 2GM/rc^2)^{-1/2}$ , montre que l'intervalle de temps pour des évènements qui se produisent à  $r \rightarrow 2GM/c^2$  devient infini, vu par un observateur à une certaine distance.

Le rayon de Schwarzschild  $R_S = 2GM/c^2$  a une signification importante. Il indique l'endroit où se trouve "l'horizon" des évènements.

## POURQUOI UN HORIZON?

Un observateur extérieur immobile

- voit toutes les fréquences émises à  $r = R_S$  infiniment décalées vers le rouge.
- voit tous les intervalles de temps devenir infinis.
- ne peut *rien* voir en provenance de  $r < R_S$ .
- ne peut être causalement affecté par un évènement se produisant en  $r < R_S$ .

À l'intérieur de l'horizon, la vitesse d'échappement excède la vitesse de la lumière, une impossibilité. Aucun signal, aucun objet matériel ne peut sortir. L'horizon des évènements cache le trou noir. Pour  $r < R_S$ , le futur dans l'espace-temps est dans la "direction" du centre du trou noir!

On remarque que le coefficient de  $dr$  devient infini en  $r = R_S$ . Est-ce que c'est une vraie singularité?

Non! C'est une "singularité des coordonnées". Il n'y a pas de discontinuité physique.

## UNE SINGULARITÉ DES COORDONNÉES: UN EXEMPLE

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$$

C'est la métrique pour une surface sphérique, qui est parfaitement lisse et continue. Mais si on avait utilisé la coordonnée  $x$ , donnée par:

$$x = \sin \theta, \quad d\theta = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

alors

$$ds^2 = \frac{dx^2}{1-x^2} + x^2 d\phi^2.$$

Cela est singulier à  $x = 1$ , mais la surface n'a pas changé! Elle est toujours lisse ...

Pouvez-vous donner une interprétation géométrique de ce qui se passe en  $x = 1$ ?

B. Riemann a développé les mathématiques pour définir et calculer les composantes de la courbure de surfaces très générales, appelées “variétés.” L’espace-temps est une variété Riemannienne. Une singularité temporelle apparaît comme une singularité dans la courbure, et est indépendante des coordonnées utilisées.

Le point  $r = 0$ , par exemple, est une singularité temporelle, et viole l’une des hypothèses de la relativité générale: à un niveau suffisamment local, l’espace-temps a une structure de Minkowski.

En  $r = 0$ , la relativité générale elle-même n'est plus valable. La singularité elle-même ne peut pas être observée, parce qu'elle est à l'intérieur de l'horizon des événements. Est-ce que *toutes* les singularités ont un horizon pour les cacher (l'hypothèse de censure cosmique)? On n'est pas certain. Mais les simulations numériques de Shapiro et Teukolsky semblent montrer que des singularités "nues" peuvent exister. [A ce sujet, Stephen Hawking croit qu'il a perdu un pari! Il a cru que les singularités nues n'existaient pas ... Mais il a payé après que les résultats numériques furent annoncés.]



Comment les particules se déplacent-elles près d'un trou noir?

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)} - r^2 d\Omega^2$$

Les équations du mouvement découlent du principe variationnel, exprimant que

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau$$

est un extrémum. Cela est vrai en général pour n'importe quel espace-temps. Notez que dans la limite de la mécanique classique

$$cd\tau = cdt \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \simeq cdt - \frac{dt}{c} \left(\frac{v^2}{2} - \Phi\right),$$

où  $\Phi = -GM/r$  est le potentiel newtonien.

Mais  $v^2/2 - \Phi$  est simplement le Lagrangien classique! Donc, le principe variationnel pour  $\int d\tau$  se réduit au principe de moindre action en mécanique classique.

L'équation du mouvement qui ressort de ces calculs (réf: Shapiro et Teukolsky, pp. 339-345) est

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}\right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \left(c^2 + \frac{l^2}{r^2}\right)$$

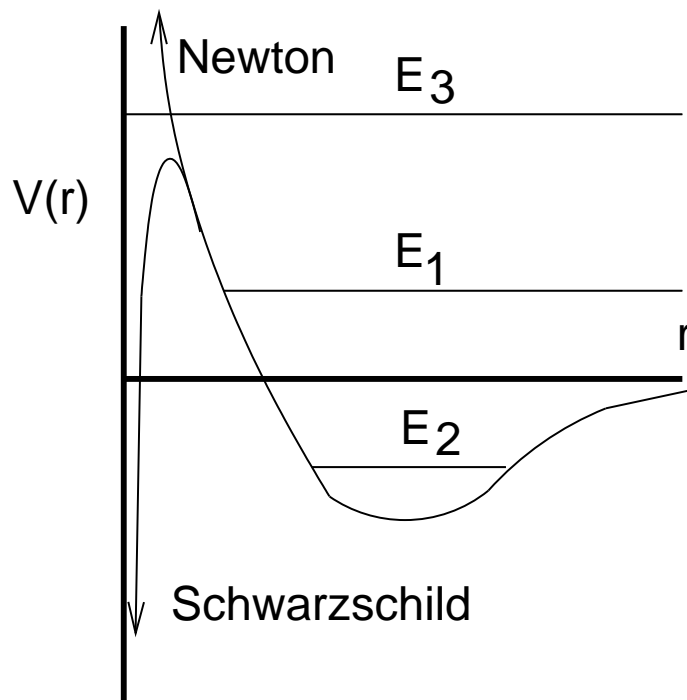
où  $\mathcal{E}$  est l'énergie, qui est conservée, par unité de masse, et  $l$  est le moment cinétique (conservé) par unité de masse.

$$\text{Limite newt.: } v_r^2 = \underbrace{\left(\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - c^2\right)}_{2 \times \text{En.newt.}} + \frac{2GM}{r} - \frac{l^2}{r^2}$$

$$\text{Lorsque } r \rightarrow R_S = 2GM/c^2 : \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2}$$

ce qui signifie que la vitesse radiale des particules s'approche la vitesse de la lumière ( $E = pc$  est retrouvé).

# LES ORBITES AUTOUR D'UN TROU NOIR



Courbes d'énergie potentielle pour les solutions de Newton et de Schwarzschild.

Pour le potential Newtonien, une particule peut être sur une orbite liée (énergie  $E_2$ ) ou sur une orbite non liée hyperbolique ( $E_1$ ), avec un point d'approche minimal.

Pour la solution de Schwarzschild, il y a aussi une troisième classe d'orbites, dites de capture ( $E_3$ ). Même avec du moment cinétique, une particule peut atteindre  $r = 0$ ! Les orbites de capture n'existent qu'en relativité générale.

## TN SOLUTIONS PLUS GÉNÉRALES

- Les trous noirs peuvent avoir au plus 3 caractéristiques: masse, moment cinétique et charge électrique. Un trou noir électriquement chargé serait vite neutralisé par le gaz environnant, mais le moment cinétique est une constante.
- En 1963, R. Kerr découvrit la métrique d'un trou noir avec moment cinétique (la forme mathématique est complexe, et nous ne l'explicitons pas ici. (Voir Shapiro & Teukolsky, pp. 357–364). Les trous noirs de Kerr ont un horizon des évènements, comme ceux de Schwarzschild, mais ils ont aussi un rayon en-deçà duquel il est impossible de rester stationnaire: l'espace-temps est entraîné par la rotation du trou noir! Ce rayon est appelé la "limite statique".

- Il est possible d'extraire l'énergie d'un trou noir en rotation depuis la région comprise au-delà de l'horizon des évènements mais à l'intérieur de la limite statique. Cette région est appelée l'ergosphère. Dans certains modèles, l'ergosphère émet des jets de gaz très énergétiques, qui sont souvent observés dans les quasars lointains.

## EFFETS QUANTIQUES

- En 1974, Hawking fit une découverte incroyable: un trou noir isolé peut émettre des particules!
- L'effet est quantique. Ce que nous appelons le "vide" est en fait associé à des fluctuations d'énergie. Une particule et son anti-particule sont produites temporairement, et puis disparaissent ( $\Delta E \Delta t \simeq h$ ). Cela peut aussi se produire avec des photons.
- Près d'un horizon des événements, l'une des particules "virtuelles" peut tomber à *l'intérieur* de l'horizon! L'autre particule s'échappe, et le trou noir perd de la masse: il s'évapore!

- Hawking a montré que les particules ont un spectre d'énergie à l'équilibre thermique à la température

$$kT = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM}, \quad T = 10^{-7} \text{ K} \left( \frac{M_{\odot}}{M} \right)$$

- Si le trou noir a une température alors il a une entropie!



## SECTION OPTIONNELLE: L'ENTROPIE D'UN TROU NOIR

La surface d'un trou noir est donnée par  $4\pi R_S^2$ , ou

$$A = 4\pi \left( \frac{2GM}{c^2} \right)^2$$

$$dA = 4\pi \left( \frac{2G}{c^2} \right)^2 2M dM = \frac{32G^2\pi M}{c^6} d(Mc^2)$$

$$\text{ou } dE = d(Mc^2) = \frac{c^6}{32\pi G^2 M} dA$$

D'après Hawking,

$$\frac{1}{GM} = \frac{8\pi kT}{\hbar c^3} \rightarrow$$

$$dE = \frac{c^6}{32\pi G} \frac{8\pi kT}{\hbar c^3} = \frac{c^3 kT}{4 G \hbar} dA = T d \left( \frac{1}{4} \frac{Ac^3 k}{G \hbar} \right)$$

## SECTION OPTIONNELLE

D'autre part, en l'absence de pression externe,  $dE = TdS$ . L'entropie d'un trou noir est donc

$$S = \frac{Akc^3}{4G\hbar}$$

- Cela est en parfait accord avec un résultat antérieur également obtenu par Hawking: au cours de n'importe quelle interaction classique, la surface d'un trou noir ne peut jamais décroître. Cela est maintenant compris comme étant une conséquence de la deuxième loi de la thermodynamique!
- Lorsqu'un trou noir s'évapore, son entropie diminue. Mais l'entropie totale, qui comprend celle du trou noir et celle de toute la matière extérieure, ne décroît jamais.

## SECTION OPTIONNELLE

- La valeur typique de la température d'un trou noir est très faible, mais l'entropie est énorme! Pour un trou noir d'une masse solaire,  $S = 10^{77}k$  (pour le Soleil,  $S = 10^{58}k$ ). Le plupart de l'entropie de l'Univers peut être dans les trous noirs!

## SECTION OPTIONNELLE: TRANS. DE LORENTZ

On demande que  $c^2 dt^2 - dx^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2$ ,  
avec  $dx = A dx' + B dt'$ ,  $dt = D dx' + E dt'$ :

$$\begin{aligned}c^2 dt^2 - dx^2 &= c^2 [D dx' + E dt']^2 - [A dx' + B dt']^2 \\ &= c^2 dt'^2 [E^2 - B^2/c^2] - 2 dx' dt' [D E c^2 - A B] \\ &\quad - dx'^2 [A^2 - c^2 D^2]\end{aligned}$$

$$\text{Donc } E^2 = 1 + B^2/c^2 > 1 \equiv \frac{1}{1 - (v^2/c^2)},$$

ou  $v$  est, pour le moment, un paramètre mathématique. (Il faut avoir  $E = +1$  quand  $v, D = 0$ , et  $dt = dt'$ .) Donc

$$B^2 = \frac{v^2}{1 - (v^2/c^2)}, \quad B = \frac{\epsilon v}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}},$$

où  $\epsilon = \pm 1$ .

## SECTION OPTIONNELLE

Le coefficient de  $dx'dt'$  doit être égal à zéro.  
Donc  $DEc^2 = AB$ , d'où

$$D = \epsilon Av/c^2.$$

Le coefficient de  $-dx'^2$  doit être égal à un.

$$A^2 - c^2 D^2 = A^2 - (A\epsilon v/c)^2 = A^2(1 - v^2/c^2) = 1,$$

d'où

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}},$$

puisque  $A = +1$  lorsque  $v = 0$ . Finalement,

$$D = \epsilon Av/c^2 = \frac{\epsilon v/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

Quand  $v/c \ll 1$ , il faut retrouver la transformation galiléenne, alors on identifie le paramètre  $\epsilon v$  avec la vitesse. Voilà la transformation de Lorentz.